Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

Управление в социально-экономических системах

© 2020 г. **Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru)**
(Алтайский государственный университет, Барнаул),
Ю.Г. АЛГАЗИНА, канд. эконом. наук (algazina@inbox.ru)
(Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова, Барнаул)

РЕФЛЕКСИВНАЯ ДИНАМИКА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОЛИГОПОЛИИ КУРНО

Представлена модель динамического поведения на рынке Курно в классе линейных функций спроса и издержек агентов. Агенты, наблюдая сложившееся состояние рынка и учитывая текущие экономические ограничения, в динамике от игры к игре уточняют объемы выпуска, делая шаги в направлении текущего положения своей цели. Получены достаточные условия на величины шагов, выбираемые агентами независимо друг от друга, для сходимости динамики к статичному равновесию Курно–Нэша.

Ключевые слова: олигополия, неполная информированность, рефлексивное поведение, равновесие Курно–Нэша, условия сходимости.

DOI: 10.31857/S0005231020020087

1. Введение

Наблюдая текущее состояние рынка, агент может убедиться в том, что его объемы выпуска продукции не являются оптимальными. К такому выводу могут прийти не один, а несколько или сразу все, конкурирующие друг с другом объемами выпуска, агенты. Естественно, что у каждого из них возникает желание уточнить свой объем выпуска так, чтобы он был оптимальным ответом на действия остальных агентов. Если это удастся сделать всем агентам, то при отсутствии кооперации на рынке выбранные объемы выпуска будут равновесными, так как агенты не будут заинтересованы, чтобы в одиночку изменить их (см., например, [1–4]). Агент принимает решение на основе доступной ему информации. Поскольку в олигополии состояние рынка зависит от действий всех агентов, то в условиях неполной информированности он вынужден рефлексировать, т.е. предсказывать их действия.

Исследование моделей олигополии Курно с учетом неполноты информированности агентов приводит к возникновению различных моделей рефлексии, выявлению условий существования равновесия, его единственности и сходимости к нему динамики.

Рефлексивное поведение в моделях олигополии с реакцией фирм по Курно обсуждается при различных предпосылках. Динамика изучается в непрерывном [5, 6] или дискретном времени [7–14]. Функции полных издержек агентов предполагаются нелинейными [10–17] или линейными [9, 18, 19], функции спроса, предпочтительно, линейными. Особенности моделирования динамики поведения по Курно с применением рефлексивных игр с различным порядком (одновременным, последовательным, последовательно-групповым, хаотичным) ходов игроков можно найти в [7, 18, 20, 21]. Возможности изменения правил поведения или ранга рефлексии агентов обсуждается в [3–5, 13]. Исходная информация для развития динамики может быть представлена известными всем агентам функциями издержек или целевыми функциями конкурентов [12, 13], текущими действиями или состояниями конкурентов [3, 6, 10–15, 19], текущей рыночной ценой и эластичностью спроса [5, 9] и т.д.

Результаты исследований сходимости динамик представлены в различных формах. В [5] они получены в виде функций предложения, приводящих к равновесию с использованием динамических имитационных моделей в непрерывном времени. В [18] обсуждаются условия сходимости для процессов рефлексии с различным порядком ходов. В [8, 22–24] можно найти условия сходимости, области притяжений, условия на величины шагов, обеспечивающих сходимость динамики коллективного поведения при предположениях, что каждому агенту при продвижении к цели надо знать текущие действия или состояния всех агентов. В [7, 10, 11] аналогичные условия рассмотрены для других видов динамик. В [3, 4, 25] ставится задача определения равновесий и управления поведением агентов с применением метода рефлексивных разбиений, а в [13] для частного случая рефлексивного управления показана возможность применения этого метода для управления рыночной ценой и формулируются условия приведения рынка к равновесной цене. В [17] формулируются условия равновесия Нэша для процесса последовательных реакций при текущих ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов. В [9] получены достаточные условия сходимости к равновесию модели коллективного поведения, с помощью которой агенты уточняют свои представления о предельных издержках конкурентов. В [20, 21] дается анализ «хаотичных» процессов поведения фирм с реакцией по Курно при динамическом взаимодействии. В [14–16, 18] условия сходимости динамик получены только для случая дуополии.

Работы в этом направлении остаются актуальными ввиду значимости проблемы сближения теоретических моделей равновесий Нэша с эмпирическими параметрами состояний реальных рынков олигополии.

В настоящей статье основное внимание уделяется анализу традиционных моделей рефлексии; построению адекватного процесса рефлексии, учитывающего недостатки традиционных; условиям и аналитическим оценкам сходимости этого процесса. Во внимание принимаются такие экономические категории, как конкурентоспособность и убыточность агентов, а также начальное состояние рынка.

Теоретической основой динамического процесса являются теория рефлексивных игр и теория коллективного поведения. Их подходы дополняют друг друга тем, что в условиях неполной информированности агентов и неадекватности предсказаний действий конкурентов рефлексивные игры позволяют использовать процессы коллективного поведения и результаты размышлений игроков, приводящие к равновесию [3, 4].

2. Базовая модель олигополии

Пусть $i \in N = \{1, \ldots, n\}$ — множество агентов, конкурирующих на рынке объемами выпуска однородной продукции. Каждый агент продает произведенный им выпуск q_i по единой рыночной цене $p(Q)$, которая определяется общим объемом выпуска $Q = \sum_{i \in N} q_i$. Действия агентов направлены на максимизацию собственной прибыли:

$$\Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \phi_i(q_i) \to \max_{q_i}, \quad i \in N. \tag{1}$$

Цена $p(Q)$ и полные издержки фирм $\phi_i(q_i)$ заданы линейными функциями

$$p(Q) = a - bQ, \quad \phi_i(q_i) = c_i q_i + d_i, \quad i \in N, \tag{2}$$

где a, b — параметры спроса, c_i, d_i — предельные и постоянные издержки фирм.

Предпосылки базовой модели: 1) дискретность процесса; 2) однородность продукции; 3) конкуренция объемами выпусков, весь выпуск реализуется; 4) единая рыночная цена; 5) произвольное число агентов на рынке; 6) линейность функций спроса и полных затрат агентов, имеющих различные предельные издержки; 7) отсутствие ограничений мощности и коалиций; 8) рациональное поведение агентов, направленное на максимизацию собственной прибыли; 9) одновременный порядок ходов.

3. Анализ и постановка проблемы

Агенты вынуждены прибегать к рефлексии, если в базовой модели отсутствует общее знание относительно множества агентов, множеств их допустимых действий, параметров и целевых функций конкурентов. Традиционный процесс пошаговой рефлексии предполагает, что агенты выбирают оптимальный отклик в соответствии со своей функцией реакции.

Оптимальный отклик i-го агента находится из условия $\partial\Pi_i / \partial q_i = 0$ с учетом (2)

$$q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2 + \partial Q_{-i} / \partial q_i} \quad (i \in N), \tag{3}$$

где использованы обозначения:

$$h_i = \frac{a - c_i}{b}, \tag{4}$$

$$Q_{-i} = \sum_{j \neq i} q_j. \tag{5}$$

Согласно предположению Курно [26] относительно объемов выпуска каждая фирма действует так, что не ожидает от своих конкурентов изменения объемов выпуска, даже если сама сделает это. Формально его можно записать в виде условий равенства нулю предположительных вариаций [26, 27] $\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0$, $i \neq j$; $i, j \in N$. Отсюда

$$\frac{\partial Q_{-i}}{\partial q_i} = 0, \quad i \in N. \tag{6}$$

Если система условий (3)–(6) имеет решение, то состояние, в которое приходит рынок, когда агенты выбирают в качестве своей стратегии это решение, называется равновесием Курно [26]. Для базовой модели олигополии это состояние является равновесием Нэша [28].

Тогда из (3) и (6) имеем выражение для оптимального отклика (см., например, [18])

$$q_i = \frac{h_i - Q_{-i}}{2}. \tag{7}$$

Преобразуем (1) с учетом (2) к виду $\Pi_i = b(h_i - Q_{-i} - q_i)q_i - d_i$. При ожиданиях $h_i - Q_{-i} > 0$ агент выбирает положительный выпуск, который определяется выражением (7). При ожиданиях $h_i - Q_{-i} \leq 0$ положительный выпуск дает отрицательную валовую прибыль (т.е. прибыль без учета постоянных издержек d_i) и, чтобы минимизировать потери, агент выбирает нулевой выпуск.

Рекуррентные соотношения соответствующей многошаговой рефлексивной игры, предложенной в [18], имеют вид:

1. Каждый из агентов независимо от других, используя наблюдаемые выпуски каждого агента q_i^t и полагая, что в текущем $(t+1)$-м моменте времени все остальные агенты выберут те же действия, как и в предыдущем t-м моменте, на основе (7) рассчитывает свой текущий оптимальный выпуск (оптимальный отклик на действия конкурентов) x_i^t по формуле

$$x_i^t = \frac{1}{2}(h_i - Q_{-i}^t). \tag{8}$$

Здесь $i \in N$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ — моменты времени (периоды, номера партий или сеансы игры и пр.). Начальный вектор выпусков $q^0 = (q_1^0, \ldots, q_n^0)$ считается заданным. Остальные правила игры определяются условиями базовой модели олигополии 1)–9) в разделе 2.

2. Каждый агент изменяет свой выпуск за предыдущий t-й момент времени по формуле

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} x_i^t, & x_i^t > 0; \\ 0, & x_i^t \leq 0 \end{cases} \qquad (i \in N; \quad t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Затем процесс повторяется с п.1.

Условно процесс (8)–(9) определим как вариант 1 рефлексивной игры.

Достоинства такого процесса: целевая направленность, агент в каждый момент выбирает наилучший ответ, экономическая содержательность процесса, выраженная в том, что гарантируются неотрицательный текущий выпуск (конкурентоспособность) и неотрицательная текущая валовая прибыль агентов.

Недостатки процесса: плохо поддается аналитическому исследованию сходимость процесса в зависимости от параметров и начального состояния рынка, поэтому как основной используется метод численного моделирования; численными экспериментами показано [18], что «при числе фирм не больше двух процесс сходится, иначе расходится»; текущая цена товара может быть ниже предельных издержек, что приводит к убыткам агента и ставит под сомнение целесообразность продолжения его участия в процессе. Возможна отрицательная текущая цена. Имеется возможность зацикливания процесса, препятствующего достижению агентами равновесия, что иллюстрируется на следующем простом примере. Здесь и далее верхним индексом “(c)” обозначим показатели в статическом равновесии Курно–Нэша для базовой модели.

Пример 1. Пусть $q^0 = (0, \ldots, 0)$. Тогда по (8) и (9) получим $q_i^1 = \frac{h_i}{2}$ и $h_i - Q_{-i}^1 = h_i - \frac{1}{2}\sum_{j \neq i} h_j$. Пусть также все агенты имеют одинаковые предельные издержки, $c_i = c$, $i \in N$. Тогда $h_i = h$ и $h_i - Q_{-i}^1 = \frac{(3-n)h}{2}$. При $n = 3$ имеем $h_i - Q_{-i}^1 = 0$, при $n > 3$ имеем $h_i - Q_{-i}^1 < 0$ для $i \in N$ и $q^2 = (0, \ldots, 0)$. Процесс вернулся в исходное состояние, очевидно, что $q^0 = (0, \ldots, 0) = q^2 = q^4 = \ldots$ и $q^1 = \left(\frac{h}{2}, \ldots, \frac{h}{2}\right) = q^3 = q^5 = \ldots$. При этом статичное равновесие $q^{(c)} = \frac{a-c}{(1+n)b} = \frac{h}{1+n}$, как решение (3)–(6) не достигается. Зацикливание также может иметь место, если взять начальный вектор с малыми компонентами. Пусть $q^0 = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$. Тогда $q_i^1 = \frac{h_i - (n-1)\varepsilon}{2}$ и $h_i - Q_{-i}^1 = h_i - \frac{1}{2}\sum_{j \neq i} h_j + \frac{(n-1)^2\varepsilon}{2}$. Для случая одинаковых предельных издержек всех агентов $2x_i^1 = h_i - Q_{-i}^1 = \frac{(3-n)h}{2} + \frac{(n-1)^2\varepsilon}{2}$. Так, при $n > 3$ зацикливание будет, если $x_i^1 \leq 0$, т.е. $\varepsilon \leq \frac{(n-3)h}{(n-1)^2}$. При $n = 2$ и нулевом начальном векторе агентов с различными предельными издержками имеем

$$q_i^1 = \frac{h_i}{2}, \quad q_1^2 = x_1^1 = \frac{1}{2}\left(h_1 - \frac{h_2}{2}\right) = \frac{3}{4}q_1^{(c)}, \quad q_2^2 = x_2^1 = \frac{1}{2}\left(h_2 - \frac{h_1}{2}\right) = \frac{3}{4}q_2^{(c)},$$

$$q_1^3 = x_1^2 = \frac{1}{2}\left(h_1 - q_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(h_1 - \frac{h_2}{2} + \frac{h_1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}q_1^{(c)} + \frac{h_1}{4}\right) = \frac{1}{8}h_1 + \frac{3}{4}q_1^{(c)},$$

$$q_2^3 = x_2^2 = \frac{1}{2}\left(h_2 - q_1^2\right) = \frac{1}{8}h_2 + \frac{3}{4}q_2^{(c)} \quad \text{и т.д.}$$

Зацикливания не происходит. Здесь использовано, что $q_1^{(c)} = \frac{1}{3b}(a - 2c_1 + c_2)$ и $q_2^{(c)} = \frac{1}{3b}(a + c_1 - 2c_2)$ есть решение (3)–(6) при $n = 2$.

Для аналитического исследования динамики рефлексии нередко применяются технически более удобные рекуррентные соотношения, когда вместо (9) используется следующая формула (вариант 2 рефлексивной игры)

$$q_i^{t+1} = x_i^t \quad (i \in N; \quad t = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Как отмечается в [18], тогда «имеют место адаптивные ожидания, которые нерациональны в том смысле, что выпуск конкурентов на текущем шаге изменяется и, в общем, не соответствует ожиданиям. В этом случае фирма не попадает на свою функцию реакции». Также для такого процесса не гарантируются текущие неотрицательные выпуски, положительная валовая прибыль агентов, положительная цена товара.

Хотя факт того, что процессы (8), (9) и (8), (10) сходятся или расходятся одновременно, формально не доказан, но численным моделированием для (8), (9) и аналитически для (8), (10) показывается [18], что при $n = 2$ как тот, так и другой варианты процесса сходятся при любых начальных условиях, а при $n > 2$ расходятся.

С учетом достоинств и недостатков рассмотренных традиционных схем пошаговой рефлексии, в настоящей статье предложены их модификации, которые представлены в следующем разделе.

4. Адаптивная динамика в модели олигополии Курно

Отсутствие сходимости является основным недостатком рассмотренных традиционных схем пошаговой рефлексии. Поэтому авторами предложены их модификации, в основу которых положена адаптивная динамика движения агентов к цели.

Рассмотрим динамический процесс (вариант 3), в котором в каждый момент каждый из агентов рассчитывает свое текущее положение цели и изменяет свое состояние в направлении текущего положения цели:

1. Каждый из агентов независимо от других, используя наблюдаемые выпуски каждого агента q_i^t и полагая что в текущем $(t+1)$-м моменте времени все остальные агенты выберут те же действия, как и в предыдущем t-м моменте, рассчитывает свой текущий оптимальный выпуск x_i^t по прежней формуле (8).

Начальный вектор выпусков q^0 также считается заданным, а остальные правила игры определяются условиями 1)–9) в разделе 2.

2. Каждый агент изменяет свой выпуск за предыдущий t-й момент времени, делая от него шаг по направлению к текущему оптимальному выпуску x_i^t по формуле

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i^t - q_i^t), & x_i^t > 0; \\ 0, & x_i^t \le 0. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь: $i \in N$; $t = 0, 1, 2, \ldots$; $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ — параметры, определяющие величины шагов. Условия (11) гарантируют, что выпуск q_i^{t+1} и валовая прибыль агента не могут быть отрицательными.

Затем процесс повторяется с п.1.

Если (11) заменить на формулу

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i^t - q_i^t) \quad (i \in N; \quad t = 0, 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

то получим соответствующий варианту 2 аналог рефлексивной игры. Назовем его вариант 4. Он характерен для таких процессов, когда агенты имитируют автоматы, формально выполняя выбор действий, невзирая на возможные текущие отрицательные выпуски, отрицательные цены и убытки. Хотя, в конечном счете, процесс может быть сходящимся [9, 19]. В теории коллективного поведения (12) описывает динамику выбора решений, основанного на аксиоме индикаторного поведения [4, 23, 24].

Примечание: варианты 1 и 2 процессов можно рассматривать как частные случаи вариантов 3 и 4 соответственно при $\gamma_i^{t+1} \equiv 1$; в последних же допускается «неполный» щаг.

5. Результаты и обсуждение

Аналитическое исследование варианта 3 рефлексивной игры (динамического процесса (8), (11)) представляет не меньшую сложность, чем варианта 1, для которого основным является метод численного моделирования. Оно также существенно сложнее, чем для варианта 4 (процесса (8), (12)).

Поэтому основная идея статьи состоит в том, чтобы найти условия сходимости для процесса (8), (12), в котором в отличие от процесса (8), (11) агенты не обнуляют свой выпуск, если $x_i^t \leq 0$. Затем обобщить полученные результаты на динамику (8), (11).

Введем в рассмотрение функции-индикаторы [29, с. 49], характеризующие отклонения текущих выпусков от текущих оптимумов, вида $\alpha_i^t = 2(x_i^t - q_i^t)$. Присутствие коэффициента «2» объясняется последующими удобствами. Используя (11), а также то, что по (7) $h_i = Q^{(c)} + q_i^{(c)}$, имеем

$$\alpha_i^t = Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^t - q_i^t. \tag{13}$$

Равенство нулю отдельных α_i^t еще не означает, что агенты достигли равновесия. В равновесии все α_i^t равны нулю и из соответствующей однородной системы уравнений (13) находится, что $q_i^t = q_i^{(c)}$. Ниже будет показана важная роль, которую играет также выражение $\max\limits_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}$ в исследовании и доказательстве сходимости процессов.

В Приложении приводятся доказательства следующих утверждений.

Утверждение 1. *Если для процесса* (8), (12) *в последовательности* $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ *имеются не только положительные члены, то*

$$\max_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Утверждение 2. *Если для процесса* (8), (12) *в последовательности* $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ *имеются не только положительные члены, то при*

$\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в последовательности* $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ *есть члены с разными знаками.*

Утверждение 3. Если в последовательности $\left\{\alpha_i^0,\ i \in N\right\}$ *имеются не только положительные члены, то при* $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ *процесс* (8), (12) *сходится.*

Следующее утверждение также связано с начальными условиями процесса (8), (12), когда в $\left\{\alpha_i^0,\ i \in N\right\}$ все члены: а) положительны, б) меньше или равны нулю.

Утверждение 4. Пусть $\gamma_i^1 \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ $(i \in N)$. *Тогда справедливы неравенства:* а) $0 < Q^{(c)} - Q^1 < Q^{(c)} - Q^0$, *если* $\alpha_i^0 > 0$ $(i \in N)$; б) $0 < Q^1 - Q^{(c)} < Q^0 - Q^{(c)}$, *если* $\alpha_i^0 \leq 0$ $(i \in N)$.

Примечания. 1. Если $\alpha_i^0 = 0$ $(\forall i \in N)$, то исходное состояние уже является равновесным. 2. Утверждение 4 имеет место также для любого момента времени t, если в $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ все $\alpha_i^t > 0$ или все $\alpha_i^t \leq 0$. 3) Неравенства можно записать одним неравенством $\left|Q^{(c)} - Q^1\right| < \left|Q^{(c)} - Q^0\right|$.

Основной результат работы для процесса (8), (12) сформулирован в следующем утверждении.

Утверждение 5. При $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ $(i \in N;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$ *процесс* (8), (12) *сходится при любых начальных выпусках агентов* $\left\{q_i^0,\ i \in N\right\}$.

Следующий основной результат работы относится к процессу (8), (11), в котором агенты обнуляют свой выпуск при $x_i^t \leq 0$.

Утверждение 6. При $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ $(i \in N;\ t = 0, 1, 2, \ldots)$ *процесс* (8), (11) *сходится при любых начальных выпусках агентов* $\left\{q_i^0,\ i \in N\right\}$.

Доказательство утверждения 6, формулировки и доказательства вспомогательных утверждений П.1–П.5 приведены в Приложении. Результаты, сформулированные в виде вспомогательных утверждений, используются при доказательстве основного утверждения 6 и отчасти повторяют результаты утверждений 1–4, но вместе с тем их доказательства имеют отличия в виду специфики процесса (8), (11). Ниже показан пример этого процесса.

Пример 2. Исходные данные: на рынке с параметрами $a = 100$, $b = 0{,}1$ присутствуют три агента с предельными издержками $c_1 = 10$, $c_2 = 20$, $c_3 = 40$ соответственно. По (4) имеем $h = (900, 800, 600)$. В табл. 1 и табл. 2 представлены начальный и завершающий фрагменты процесса.

Согласно (12) на 1-й итерации $q_2 = q_3 = 0$, поскольку на 0-й $x_2 = 0$, $x_3 < 0$; а на 2-й, 3-й и 7-й итерациях $q_3 = 0$, поскольку на 1-й, 2-й и 6-й итерациях $x_3 < 0$. В этих случаях параметр γ не используется и поэтому его значения в таблице отсутствуют. Чтобы получить сходящийся процесс, значения параметра γ для $n = 3$ выбраны в диапазоне (0; 0,5). Начиная с 1-й итерации $\max\limits_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}$ монотонно убывает по t, поскольку $\alpha_1^t, \alpha_2^t, \alpha_3^t$ не одного знака

Таблица 1. Начальные итерации процесса (8), (11) для трех агентов

Итерация	Текущие выпуски агентов			Текущие цели агентов			Значения функций-индикаторов			Параметры шагов			$\max\{\alpha_i - \alpha_j\}$
t	q_1	q_2	q_3	x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	α_3	γ_1	γ_2	γ_3	
0	750,0	100,	50,0	375,0	0,0	−125,0	−750,0	−200,0	−350,0				550,0
1	675,0	0,0	0,0	450,0	62,5	−37,5	−450,0	125,0	−75,0	0,2			575,0
2	585,0	25,0	0,0	437,5	107,5	−5,0	−295,0	165,0	−10,0	0,4	0,4		460,0
3	548,1	49,8	0,0	425,1	125,9	1,1	−246,0	152,4	2,1	0,25	0,3	0,25	398,4
4	517,4	72,6	0,3	413,5	141,2	5,0	−207,7	137,1	9,4	0,25	0,3	0,3	344,8
5	501,8	86,3	1,3	406,2	148,5	5,9	−191,2	124,3	9,4	0,15	0,2	0,2	315,5
6	492,2	114,3	1,3	392,2	153,3	−3,3	−200,0	77,9	−9,0	0,1	0,45		278,0
7	452,2	122,1	0,0	389,0	173,9	12,8	−126,6	103,6	25,7	0,4	0,2	0,35	230,2
8	426,9	142,8	5,1	376,0	184,0	15,1	−101,8	82,3	20,0	0,4	0,4	0,4	184,1
9	406,6	161,3	9,1	364,8	192,1	16,1	−83,6	61,6	13,8	0,4	0,45	0,4	145,2

Таблица 2. Завершающие итерации сходящегося процесса (8), (11) для трех агентов

Итерация	Текущие выпуски агентов			Текущие цели агентов			Значения функций-индикаторов			Параметры шагов			$\max\{\alpha_i - \alpha_j\}$
t	q_1	q_2	q_3	x_1	x_2	x_3	α_1	α_2	α_3	γ_1	γ_2	γ_3	
23	329,8	221,6	23,7	327,3	223,3	24,3	−4,9	3,3	1,2	0,25	0,35	0,2	8,2
24	329,1	222,1	24,0	327,0	223,4	24,4	−4,4	2,7	0,8	0,25	0,3	0,4	7,1
25	328,3	222,7	24,1	326,6	223,8	24,5	−3,3	2,2	0,9	0,4	0,48	0,2	5,5
26	327,9	223,1	24,2	326,3	224,0	24,5	−3,0	1,8	0,6	0,25	0,3	0,4	4,8
27	327,5	223,4	24,3	326,1	224,1	24,5	−2,7	1,3	0,5	0,25	0,4	0,3	4,1
28	327,1	223,6	24,4	326,0	224,2	24,6	−2,3	1,2	0,5	0,25	0,3	0,2	3,5
29	326,6	223,9	24,5	325,8	224,5	24,7	−1,6	1,2	0,6	0,45	0,4	0,4	2,8
30	326,4	224,0	24,5	325,7	224,5	24,8	−1,4	1,1	0,5	0,25	0,2	0,25	2,4
31	326,1	224,2	24,6	325,6	224,6	24,8	−1,1	0,8	0,4	0,45	0,4	0,4	1,9
32	326,0	224,3	24,7	325,5	224,7	24,9	−0,9	0,8	0,4	0,25	0,2	0,22	1,7

для каждого $t \geq 1$. Процесс сходится к $q^{(c)} = (325,\ 225,\ 25)$, как показано в табл. 2. Критерий останова процесса в примере $\left| q_i^{(c)} - q_i^t \right| \leq 1$.

6. Заключение

Проведено исследование процессов рефлексивного поведения в традиционной теоретико-игровой модели конкурентного рынка Курно в классе линейных функций спроса и издержек агентов. Получены следующие основные результаты:

— предложен адаптивный процесс рефлексивного коллективного поведения, учитывающий текущую информированность и экономические ограничения агентов, обобщающий традиционные процессы рефлексии в условиях неполного знания;

— представлены аналитические исследования процесса. Получены достаточные условия на выбор агентами независимо друг от друга величин текущих шагов для сходимости в дискретном времени процесса к статичному равновесию Курно–Нэша. Доказаны соответствующие утверждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. По (8) $x_i^t - q_i^t = \frac{1}{2}(h_i - Q^t - q_i^t)$ и по (7) $h_i = Q^{(c)} + q_i^{(c)}$. С учетом (13) $x_i^t - q_i^t = \frac{\alpha_i^t}{2}$. Тогда перепишем (12) в виде

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\alpha_i^t. \tag{П.1}$$

Из (13) и (П.1) имеем

$$\alpha_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t + Q^t - Q^{t+1}. \tag{П.2}$$

Тогда

$$\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - \left(1 - \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\right)\alpha_j^t. \tag{П.3}$$

Обозначим $\alpha_{M^{t+1}}^{t+1} = \max\limits_i \left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ и $\alpha_{m^{t+1}}^{t+1} = \min\limits_i \left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$. Тогда по (П.3)

$$\alpha_{M^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m^{t+1}}^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_{M^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{M^{t+1}}^t - \left(1 - \frac{\gamma_{m^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{m^{t+1}}^t.$$

Но $\alpha_{M^{t+1}}^t \le \alpha_{M^t}^t > 0$ и $0 \ge \alpha_{m^t}^t \le \alpha_{m^{t+1}}^t$. Поэтому

$$\max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} = \alpha_{M^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m^{t+1}}^{t+1} < \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m^t}^t = \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 2. Для процесса (8), (12) из (П.1) имеем

$$Q^{t+1} = Q^t + \sum_{j\in N}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t. \tag{П.4}$$

Соответственно, (П.2) представимо в виде

$$\alpha_i^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - \sum_{j\in N}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t. \tag{П.5}$$

Из (П.5) получаем, что

$$\alpha_{m^t}^{t+1} < \left(1 - \frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2}\right) \alpha_{m^t}^t - \alpha_{m^t}^t \sum_{j \in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} = \alpha_{m^t}^t \left(1 - \sum_{j \in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2}\right).$$

По условию $\alpha_{m^t}^t \leq 0$, и если $1 - \sum_{j \in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2} \geq 0$, то $\alpha_{m^t}^{t+1} < 0$, т.е. в последовательности $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ есть отрицательный член.

С другой стороны, также по (П.5) имеем, что

$$\alpha_{M^t}^{t+1} > \left(1 - \frac{\gamma_{M^t}^{t+1}}{2}\right) \alpha_{M^t}^t - \alpha_{M^t}^t \sum_{j \in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} = \alpha_{M^t}^t \left(1 - \sum_{j \in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{M^t}^{t+1}}{2}\right).$$

По предположению $\alpha_{M^t}^t > 0$, и если $1 - \sum_{j \in N} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2} - \frac{\gamma_{M^t}^{t+1}}{2} > 0$, то $\alpha_{M^t}^{t+1} > 0$, т.е. в последовательности $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ есть положительный член.

Таким образом, если для каждого агента выбор параметра ограничить диапазоном $\left(0;\ \frac{2}{1+n}\right]$, то в последовательности $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ будут члены с разными знаками.

Утверждение доказано.

Доказательство утверждения 3. Согласно утверждению 2 для каждого $t > 0$ в последовательности $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ будут члены с разными знаками. Тогда по утверждению 1 имеем

$$\max_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} <$$
$$< \max_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^{t-1} - \alpha_j^{t-1}\right\} < \ldots < \max_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^0 - \alpha_j^0\right\}.$$

Таким образом, $\max\limits_{i,j \in N} \left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} \to 0$ при $t \to \infty$. Поскольку знаки $\alpha_{m_t}^t$ и $\alpha_{M_t}^t$ не совпадают, если $\alpha_{m_t}^t \neq 0$, то $\alpha_i^t \to 0$ при $t \to \infty$ и $Q^t \to Q^{(c)}$, $q_i^t \to q_i^{(c)}$.

Утверждение 3 доказано.

Доказательство утверждения 4. По (П.5) и (13) имеем

$$(n+1)\left(Q^{(c)} - Q^1\right) = \sum_{j \in N} \alpha_j^1 =$$
$$= \sum_{j \in N} \left(1 - \frac{1+n}{2}\gamma_j^1\right) \alpha_j^0 < \max_{i \in N} \left\{1 - \frac{1+n}{2}\gamma_i^1\right\} \sum_{j \in N} \alpha_j^0 =$$
$$= \max_{i \in N} \left\{1 - \frac{1+n}{2}\gamma_i^1\right\} (n+1)\left(Q^{(c)} - Q^0\right).$$

Из условия $0 < \max\limits_{i \in N} \left\{1 - \frac{1+n}{2}\gamma_i^1\right\} < 1$ следует первая часть доказываемого утверждения. Аналогичным образом доказывается его вторая часть.

Доказательство утверждения 5. Возможны 3 сценария начала и развития процесса (8), (12). Первый сценарий: в последовательности $\left\{\alpha_i^0,\ i \in N\right\}$ не только положительные члены, есть и другие (отрицательные и/или нулевые члены). Такой процесс сходится согласно утверждению 3. Второй сценарий: процесс начинается с последовательности, в которой все $\alpha_i^0 > 0$ или все $\alpha_i^0 < 0$, и в какой-то момент времени появится последовательность с членами разных знаков. Тогда в силу утверждения 2 все последующие последовательности будут с членами разных знаков и опять в силу утверждения 3 процесс сходится. Третий сценарий: процесс начинается с последовательности, в которой все $\alpha_i^0 > 0$ или все $\alpha_i^0 < 0$, и знаки всех членов последовательностей не меняются в течение всего процесса. Тогда согласно утверждению 4 (см. примечание) для каждого $t > 1$ $\left|Q^{(c)} - Q^0\right| > \left|Q^{(c)} - Q^1\right| > \ldots$ $\ldots > \left|Q^{(c)} - Q^t\right| > \left|Q^{(c)} - Q^{t+1}\right|$ и $Q^t \to Q^{(c)}$. По (П.2) $\alpha_i^t \to 0$, а по (13) $q_i^t \to q_i^{(c)}$ $(i \in N)$. Процесс (8), (12) сходится к истинному равновесию.

Утверждение 5 доказано.

Примечание. Если $\alpha_i^t > 0$ или $\alpha_i^t < 0$ $(\forall i \in N)$, то в $(t+1)$-й момент знаки всех членов не могут измениться на противоположные. Так, если $\alpha_1^t > 0$, то в условиях утверждения 5 на выбор параметров γ, как показано в ходе доказательства утверждения 2, $\alpha_{M^t}^{t+1} > 0$. Аналогично, если $\alpha_i^t < 0$, то $\alpha_{m^t}^{t+1} < 0$.

Доказательство утверждения 6. Доказательство начнем с введения новых обозначений и соотношений, затем докажем вспомогательные утверждения и их следствия, опираясь на которые завершим доказательство утверждения 6.

Обозначим: $N_1^t = \{i \mid x_i^t > 0, i \in N\}$, $N_2^t = \{i \mid x_i^t \le 0, i \in N\}$. Тогда $N_1^t \cap N_2^t = \otimes$ и $N_1^t \cup N_2^t = N$.

С учетом введенных обозначений и (13) запишем (11) как

$$\text{(П.6)} \qquad q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \dfrac{\gamma_i^{t+1}}{2}\alpha_i^t, & i \in N_1^t; \\ 0, & i \in N_2^t. \end{cases}$$

Далее имеем:

$$\text{(П.7)} \qquad Q^{t+1} = Q^t + \sum_{j \in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t - \sum_{j \in N_2^t} q_j^t;$$

$$Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^{t+1} - q_i^{t+1} = Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^t - q_i^t - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\alpha_i^t - Q^{t+1} + Q^t, \quad i \in N_1^t;$$

$$\text{(П.8)} \qquad \begin{aligned} \alpha_i^{t+1} &= \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - Q^{t+1} + Q^t = \\ &= \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - \sum_{j \in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j \in N_2^t} q_j^t, \quad i \in N_1^t; \end{aligned}$$

$$Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^{t+1} - q_i^{t+1} = Q^{(c)} + q_i^{(c)} - Q^t - q_i^t + q_i^t - Q^{t+1} + Q^t, \quad i \in N_2^t;$$

$$\text{(П.9)}\quad \alpha_i^{t+1} = \alpha_i^t + q_i^t - Q^{t+1} + Q^t = \alpha_i^t + q_i^t - \sum_{j\in N_1^t} \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t + \sum_{j\in N_2^t} q_j^t, \quad i \in N_2^t.$$

Результат, полученный в утверждении П.1, повторяет результат утверждения 1 для процесса (8), (12), однако его доказательство усложняется с введением множеств N_1^t и N_2^t.

Утверждение П.1. Если для процесса (8), (11) *в последовательности* $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ *имеются не только положительные члены, то* $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$

Доказательство. Возможно 4 случая для агентов i и j, на которых достигается $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\}$:

1) $i, j \in N_1^t$;
2) $i \in N_1^t$, $j \in N_2^t$;
3) $i \in N_2^t$, $j \in N_1^t$;
4) $i, j \in N_2^t$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $i, j \in N_1^t$. Обозначим $\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1} = \max\limits_i\left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N_1^t\right\}$ и $\alpha_{m_1^{t+1}}^{t+1} = \min\limits_i\left\{\alpha_i^{t+1}, i \in N_1^t\right\}$. По (П.8) $\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m_1^{t+1}}^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_{M_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{M_1^{t+1}}^t - \left(1 - \frac{\gamma_{m_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{m_1^{t+1}}^t$. Но $\alpha_{M_1^{t+1}}^t \le \alpha_{M^t}^t > 0$ и $\alpha_{m_1^{t+1}}^t \ge \alpha_{m^t}^t \le 0$. Поэтому

$$\text{(П.10)}\quad \max_{i,j\in N_1^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \alpha_{M_1^{t+1}}^t - \alpha_{m^t}^t < \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m^t}^t = \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Рассмотрим второй случай, когда $i \in N_1^t$, $j \in N_2^t$. По (П.8) и (П.9) имеем, что $\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t - (\alpha_j^t + q_j^t)$. Или $\alpha_{M_1^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m_2^{t+1}}^{t+1} = \left(1 - \frac{\gamma_{M_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{M_1^{t+1}}^t - \left(\alpha_{m_2^{t+1}}^t + q_{m_2^{t+1}}^t\right)$. Здесь $\alpha_{m_2^{t+1}}^{t+1} = \min\limits_i\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N_2^t\right\}$ и $\alpha_{M_1^{t+1}}^t \le \alpha_{M^t}^t > 0$. Тогда

$$\text{(П.11)}\quad \max_{i\in N_1^t, j\in N_2^t}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m_2^{t+1}}^t \le \alpha_{M^t}^t - \alpha_{m^t}^t = \max_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}.$$

Рассмотрим следующий случай, когда $i \in N_2^t$, $j \in N_1^t$. По (П.8) и (П.9) $\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1} = (\alpha_i^t + q_i^t) - \left(1 - \frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\right)\alpha_j^t$ и, используя, что $\alpha_i^t + q_i^t < \alpha_{M^t}^t$, имеем

$$\alpha_{M_2^{t+1}}^{t+1} - \alpha_{m_1^{t+1}}^{t+1} = \left(\alpha_{M_2^{t+1}}^t + q_{M_2^{t+1}}^t\right) - \left(1 - \frac{\gamma_{m_1^{t+1}}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{m_1^{t+1}}^t <$$

$$< \alpha^t_{M^t} - \left(1 - \frac{\gamma^{t+1}_{m^{t+1}_1}}{2}\right) \alpha^t_{m^t} < \alpha^t_{M^t} - \alpha^t_{m^t} = \max_{i,j\in N} \left\{\alpha^t_i - \alpha^t_j\right\}.$$

Пусть теперь $i, j \in N^t_2$. Тогда по (П.9) $\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j = (\alpha^t_i + q^t_i) - (\alpha^t_j + q^t_j)$. Поскольку $\alpha^t_i + q^t_i = 2x^t_i - q^t_i \le 0$, а $\alpha^t_{M^t_1} > 0$, то $\max\limits_{i,j\in N^t_2} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\} < \max\limits_{i\in N^t_1, j\in N^t_2} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\}$. Далее доказываемое следует из (П.11).

Обобщая рассмотренные случаи, имеем, что

$$\max_{i,j\in N} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\} = \max \left\{ \max_{i,j\in N^t_1} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\}, \max_{i\in N^t_1, j\in N^t_2} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\}, \right.$$
$$\left. \max_{i\in N^t_2, j\in N^t_1} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\}, \max_{i,j\in N^t_2} \left\{\alpha^{t+1}_i - \alpha^{t+1}_j\right\} \right\} < \max_{i,j\in N} \left\{\alpha^t_i - \alpha^t_j\right\}.$$

Утверждение П.1. доказано.

Следующие два утверждения П.2 и П.3 для процесса (8), (11) отчасти повторяют утверждение 2 для процесса (8), (12).

Утверждение *П.2. Если для процесса* (8), (11) *в последовательности* $\left\{\alpha^t_i,\ i \in N\right\}$ *есть положительные члены, то при* $\gamma^{t+1}_i \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в* $\left\{\alpha^{t+1}_i,\ i \in N\right\}$ *также есть положительные члены.*

Доказательство утверждения П.2. Имеем $\alpha^t_{M^t} > 0$ и $M^t \in N^t_1$. По (П.5) $\alpha^{t+1}_{M^t} > \left(1 - \frac{\gamma^{t+1}_{M^t}}{2}\right) \alpha^t_{M^t} - \alpha^t_{M^t} \sum\limits_{j\in N^t_1} \frac{\gamma^{t+1}_j}{2} = \alpha^t_{M^t} \left(1 - \frac{\gamma^{t+1}_{M^t}}{2} - \sum\limits_{j\in N^t_1} \frac{\gamma^{t+1}_j}{2}\right)$. Если $\gamma^{t+1}_i \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$, то $1 - \frac{\gamma^{t+1}_{M^t}}{2} - \sum\limits_{j\in N^t_1} \frac{\gamma^{t+1}_j}{2} > 0$ и $\alpha^{t+1}_{M^t} > 0$. Что доказывает утверждение.

Из доказанного утверждения П.2 вытекает следствие, которое может быть полезным при исследовании хода процесса и его сходимости.

Следствие. Если для процесса (8), (11) *в последовательности* $\{\alpha^t_i, i \in N\}$ *есть положительные члены, то при* $\gamma^{t+1}_i \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в* $\left\{\alpha^{t+1}_i,\ i \in N\right\}$ *не могут быть только отрицательные и нулевые члены.*

Другими словами, могут быть только а) положительные члены, б) положительные и нулевые, в) члены с разными знаками и нулевые члены.

Утверждение *П.3. Если для процесса* (8), (11) *в последовательности* $\left\{\alpha^t_i,\ i \in N\right\}$ *есть отрицательные или нулевые члены и* $N^t_1 = N$, *то при* $\gamma^{t+1}_i \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в* $\left\{\alpha^{t+1}_i,\ i \in N\right\}$ *есть отрицательные члены.*

Доказательство утверждения П.3. Из (П.8) получаем, что $\alpha_{m^t}^{t+1} < \left(1-\frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2}\right)\alpha_{m^t}^t - \alpha_{m^t}^t \sum_{j\in N}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2} = \alpha_{m^t}^t\left(1-\sum_{j\in N}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}-\frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2}\right)$. По условию $\alpha_{m^t}^t \le 0$, и если $1-\sum_{j\in N}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}-\frac{\gamma_{m^t}^{t+1}}{2} \ge 0$, то $\alpha_{m^t}^{t+1} < 0$, т.е. в последовательности $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i\in N\right\}$ есть отрицательный член. Утверждение П.3 доказано.

Из утверждения П.3 вытекает следствие.

Следствие. Если для процесса (8), (11) *в последовательности* $\{\alpha_i^t, i\in N\}$ *нет положительных членов и* $N_1^t = N$, *то при* $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right]$ *в* $\{\alpha_i^{t+1}, i\in N\}$ *не могут быть только положительные и нулевые члены.*

Другими словами, могут быть только а) отрицательные члены, б) отрицательные и нулевые, в) члены с разными знаками и нулевые члены.

Для процесса (8), (11) докажем утверждение, аналогичное утверждению 4 для процесса (8), (12)

Утверждение П.4. Пусть $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ $(i\in N)$. *Тогда справедливы неравенства:* а) $0 < Q^{(c)} - Q^{t+1} < Q^{(c)} - Q^t$, *если* $\alpha_i^t > 0$ $(\forall i\in N)$; б) $0 < Q^{t+1} - Q^{(c)} < Q^t - Q^{(c)}$, *если* $\alpha_i^t \le 0$, $\alpha_i^{t+1} \le 0$ $(\forall i \in N)$.

Доказательство утверждения П.4. Первая часть утверждения доказывается так же, как для утверждения 4, и поэтому здесь приводить не будем. Докажем его вторую часть. Исключая равновесие, допускаем, что в $\left\{\alpha_i^t\right\}$ и $\left\{\alpha_i^{t+1}\right\}$ есть хотя бы один отрицательный член. Также случай, когда N_2^t пусто, доказан в утверждении 4. Пусть N_2^t не пусто.

Суммируя по индексу i формулы (П.8) и (П.9), с учетом (13) имеем $(1+n)\left(Q^{(c)} - Q^{t+1}\right) = \sum\limits_{j\in N}\alpha_j^{t+1} = \sum\limits_{j\in N_1^t}\left(1-\frac{1+n}{2}\gamma_j^{t+1}\right)\alpha_j^t + \sum\limits_{j\in N_2^t}\alpha_j^t + (1+n)\sum\limits_{j\in N_2^t} q_j^t$.

Тогда $0 < (1+n)\left(Q^{t+1}-Q^{(c)}\right) = \sum\limits_{j\in N}\left(-\alpha_j^{t+1}\right) < \sum\limits_{j\in N_1^t}\left(1-\frac{1+n}{2}\gamma_j^{t+1}\right)\left(-\alpha_j^t\right) + \sum\limits_{j\in N_2^t}\left(-\alpha_j^t\right) < \max\limits_{i\in N_1^t}\left\{1-\frac{1+n}{2}\gamma_i^{t+1}\right\}\sum\limits_{j\in N_1^t}\left(-\alpha_j^t\right) + \sum\limits_{j\in N_2^t}\left(-\alpha_j^t\right) \le \sum\limits_{j\in N}\left(-\alpha_j^t\right) = (n+1)\left(Q^t - Q^{(c)}\right)$. Использовано, что по условию $0 < \max\limits_{i\in N}\left\{1-\frac{1+n}{2}\gamma_i^{t+1}\right\} < 1$.

Утверждение П.4. доказано.

Приведем еще одно вспомогательное утверждение, связанное со сменой знаков при переходе процесса (8), (11) из t-го в $(t+1)$-й момент времени.

Утверждение П.5. Если в процессе (8), (11) а) *некоторый отрицательный член последовательности* $\left\{\alpha_i^t, i\in N\right\}$ *в* $\left\{\alpha_i^{t+1}, i\in N\right\}$ *станет положительным, то все положительные члены* $\left\{\alpha_i^t, i\in N\right\}$ *сохранят свои знаки в* $\left\{\alpha_i^{t+1}, i\in N\right\}$; б) *некоторый положительный член последовательности* $\left\{\alpha_i^t,\ i\in N\right\}$ *в* $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i\in N\right\}$ *станет отрицательным, то все отрицательные члены* $\left\{\alpha_i^t,\ i\in N\right\}$ *сохранят свои знаки в* $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i\in N\right\}$.

Доказательство утверждения П.5. Докажем часть а) утверждения. Пусть k — индекс отрицательного члена, переходящего в положительный. Пусть $k \in N_1^t$. По (П.8) $-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t}q_j^t>0$, и поскольку для положительных α_i^t значение α_i^{t+1} рассчитывается по (П.8), то их знаки не изменятся. Пусть $k \in N_2^t$. По (П.9), учитывая что $2x_k^t=\alpha_k^t+2q_k^t\le 0$, также имеем $-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t}q_j^t>0$. Поэтому новые значения α_i^{t+1} для положительных α_i^t, рассчитанные по (П.8), будут тех же знаков. Часть а) доказана. Часть б) утверждения доказывается аналогичным образом.

Утверждение П.5 доказано.

После доказательства вспомогательных утверждений вернемся непосредственно к *доказательству утверждения 6.*

Вначале обратим внимание на последовательности только с отрицательными членами и нулевыми членами. Такая последовательность может в следующий момент времени перейти в последовательности 1) имеющие положительные члены, 2) не имеющие положительных членов.

Если реализуется первый случай, то последовательность только с отрицательными и нулевыми членами далее не встретится. Действительно, согласно следствию утверждению П.2 последовательность с хотя бы одним положительным членом не может при $\gamma_i^{t+1}\in\left(0;\ \frac{2}{1+n}\right]$ перейти в последовательность только с отрицательными и нулевыми членами. Поэтому во всех последующих моментах времени будут положительные члены.

Если реализуется второй случай, то согласно утверждению П.4 $0<Q^{t+1}-Q^{(c)}<Q^t-Q^{(c)}$. Опять возможно, что в $(t+2)$-й момент времени окажутся только отрицательные и нулевые члены. Таким образом, последовательности только с отрицательными и нулевыми членами могут иметь место либо в начальной стадии процесса, либо на протяжении всего процесса. Последнее рассмотрим подробнее. Последовательное применение утверждения П.4 дает цепочку неравенств $Q^0-Q^{(c)}>Q^1-Q^{(c)}>\ldots>Q^t-Q^{(c)}>Q^{t+1}-Q^{(c)}>\ldots$ $\ldots>0$ $(t>1)$, из которой следует $Q^t\to Q^{(c)}$. Покажем, что $\alpha_i^t\to 0$ и $q_i^t\to q_i^{(c)}$. Пусть $\alpha_i^t\le 0$ $(\forall i\in N)$ и вначале $i\in N_2^t$. По (П.9) и (П.6) $2x_i^{t+1}=\alpha_i^{t+1}=\alpha_i^t+q_i^t-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t}q_j^t=\alpha_i^t+2q_i^t-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t\setminus i}q_j^t=2x_i^t-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t\setminus i}q_j^t>2x_i^t$. Для $i\in N_1^t$ по (П.8) и (П.6) $2x_i^{t+1}=\alpha_i^{t+1}+2q_i^{t+1}=\left(1-\frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\right)\alpha_i^t-\sum_{j\in N_1^t}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t+\sum_{j\in N_2^t}q_j^t+2q_i^t+\gamma_i^{t+1}\alpha_i^t=\alpha_i^t+2q_i^t-\sum_{j\in N_1^t\setminus\{i\}}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t=2x_i^t-\sum_{j\in N_1^t\setminus\{i\}}\frac{\gamma_j^{t+1}}{2}\alpha_j^t>2x_i^t$. Таким образом, если в последующие моменты времени последовательности будут только с отрицательными и нулевыми членами, то будут расти текущие оптимальные выпуски и после некоторого t^* окажется, что $x_i^{t^*}>0$ $(\forall i\in N)$. Тогда при $t>t^*$ будет $i\in N_1^t=N$, по (П.8) $\alpha_i^t\to 0$, а по (14) $q_i^t\to q_i^{(c)}$. Такой процесс сходится к статичному равновесию.

Пусть теперь $\alpha_i^t>0$ $(\forall i\in N)$. Поскольку $\alpha_i^t=2(x_i^t-q_i^t)$, то $x_i^t>0$ $\forall(i\in N)$, и агенты рассчитывают свой текущий выпуск по формуле (12). Тогда при $\gamma_i^{t+1} \in \left(0; \frac{2}{1+n}\right)$ из утверждения П.4, справедливого для любого момента времени, следует неравенство $0 < Q^{(c)} - Q^{t+1} < Q^{(c)} - Q^t$, указывающее на приближение к равновесию в $(t+1)$-й момент времени. Если и в последующие моменты знаки всех членов останутся положительными, то из цепочки неравенств $Q^{(c)} - Q^t > Q^{(c)} - Q^{t+1} > \ldots > Q^{(c)} - Q^{t+k} > Q^{(c)} - Q^{t+k+1} > \ldots > 0$ $(k > 1)$ следует, что $Q^t \to Q^{(c)}$. По (П.8) $\alpha_i^t \to 0$, а по (14) $q_i^t \to q_i^{(c)}$ $(i \in N)$.

Пусть в последовательности $\left\{\alpha_i^t,\ i \in N\right\}$ не только положительные члены. По утверждению П.1 процесс сделает последовательное приближение к равновесию, так как $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\}$. По утверждению П.2 в $\left\{\alpha_i^{t+1},\ i \in N\right\}$ есть положительные члены. Если в ней есть также отрицательные или нулевые члены, то процесс сделает следующее приближение к равновесию $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+2} - \alpha_j^{t+2}\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\}$. Если подобная ситуация повторяется на протяжении всего процесса, то по утверждению П.1 имеем $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t+1} - \alpha_j^{t+1}\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^{t-1} - \alpha_j^{t-1}\right\} < \ldots < \max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^0 - \alpha_j^0\right\}$. Таким образом, $\max\limits_{i,j\in N}\left\{\alpha_i^t - \alpha_j^t\right\} \to 0$ при $t \to \infty$. Поскольку знаки $\alpha_{m_t}^t$ и $\alpha_{M_t}^t$ не совпадают, если $\alpha_{m_t}^t \neq 0$,то $\forall i \in N$ $\alpha_i^t \to 0$ при $t \to \infty$ и $Q^t \to Q^{(c)}$, $q_i^t \to q_i^{(c)}$. Процесс сходится. В дополнение отметим, что ряд полезных результатов, связанных со сменой или сохранением знаков при переходе процесса (8), (11) из t-го в $(t+1)$-й момент времен, приведены в утверждениях П.3 и П.5.

Сформулированные положения указывают на сходимость процесса (8), (11) при любых начальных выпусках агентов $\left\{q_i^0,\ i \in N\right\}$.

Утверждение 6 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Myerson R.* Game Theory: Anaysis of Conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.
2. *Mas-Collel A., Whinston D., Green J.* Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
3. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
4. *Новиков Д.А.* Модели стратегической рефлексии // АиТ. 2012. № 1. С. 3–18.
   Novikov D.A. Models of Strategic Behavior // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 1–19.
5. *Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В.* Исследование нестационарных олигопольных рынков // Сиб. журн. индустр. мат. 2017. Т. 20. № 1. С. 11–20.
6. *Васин А.А., Васина П.А., Рулева П.Ю.* Об организации рынков однородных товаров //Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 1. С. 98–112.
7. *Kukushkin N.S.* Best Response Dynamics in Finite Games with Additive Aggregation // Games Econom. Behavior. 2004. No. 48. P. 94–110.
8. *Weihong H.* Theory of adaptive adjustment // Discret. Dynam. Nature Soc. 2000. V. 5. No. 4. P. 247–263.

9. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Информационное равновесие в модели динамики коллективного поведения на конкурентном рынке // Управление большими системами. 2016. № 64. С. 112–136.

10. *Kamalinejad H., Majda V.J., Kebriaei H., Kian A.R.* Cournot Games with Linear Regression Expectations in Oligopolistic Markets // Math. Comput. Simulat. 2010. V. 80. No. 9. P. 1874–1885.

11. *Gao X., Zhong W., Mei S.* Convergence of a Cournot Oligopoly Game with Extrapolative Expectations. Southeast University. China, 2012.

    (http://www.ecocyb.ase.ro/32012/Xing%20Gao.pdf)

12. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели рефлексивных игр в задачах управления эколого–экономическими системами // Управление большими системами. 2015. № 55. С. 362–372.

13. *Корепанов В.О.* Управление рефлексивным поведением агентов в модели олигополии Курно // Управление большими системами. 2010. № 31. С. 225–249.

14. *Yang H., Zhang Y.* Complex Dynamics Analisis for Cournot Game with Bounded Rationality in Power Market // J. Electromagnet. Anal. & Appl. 2009. No. 1. P. 48–60.

15. *Agiza H.N., Elsadany A.A.* Chaotic Dynamics in Nonlinear Duopoly Game with Heterogeneous Players // Appl. Math. Comput. 2004. V. 149. No. 4. P. 843–860.

16. *Bischi G.I., Kopel M.* Equilibrium Selection in a Nonlinear Duopoly Game with Adaptive Expectations // J. Econom. Behavior & Organ. 2001. No. 46. P. 73–100.

17. *Гераськин М.И., Чхартишвили А.Г.* Анализ игровых моделей рынка олигополии при ограничениях по мощности и конкурентоспособности агентов // АиТ. 2017. № 11. С. 105–121.

    Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2025–2038.

18. *Дюсуше О.М.* Статическое равновесие Курно–Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек // Эконом. журн. ВШЭ. 2006. № 1. С. 3–32.

19. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // АиТ. 2017. № 9. С. 91–105.

    Algazin G.I., Algazina D.G. Collective Behavior in the Stackelberg Model under Incomplete Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1619–1630.

20. *Puu T.* Attractors, Difurcations, & Chaos: Nonlinear Phenomena in Economics. Berlin: Heidelberg, 2003.

21. *Matsumoto A.* Controlling the Cournot–Nash Chaos // J. Optim. Theory Appl. 2006. V. 128. No. 2. P. 379–392.

22. *Васин А.А.* Модели динамики коллективного поведения. М.: Изд-во МГУ, 1989.

23. *Опойцев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.

24. *Беленький В.З., Волконский В.А. Иванков С.А. др.* Итеративные методы в теории игр и программировании. М.: Наука, 1974.

25. *Гераськин М.И.* Моделирование рефлексии в нелинейной модели трехагентной олигополии Штакельберга для телекоммуникационного рынка России // АиТ. 2018. № 5. С. 83–106.

Geras'kin M.I. Modeling Reflection in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.

26. *Cournot A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
27. *Frisch R.* Monopoly-Polypoly-the Concert of Force in the Economy // Internat. Econom. Papers. London-N.Y., 1951. No. 1. P. 23–36. (Original 1933.)
28. *Nash J.* Non-Cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
29. *Малишевский А.В.* Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 14.08.2018

После доработки 29.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019