Автоматика и телемеханика, № 2, 2020

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2020 г. **М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)**
(Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева)

РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ В ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ ДУОПОЛИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА ПРИ НЕСОВПАДЕНИИ РАНГОВ РЕФЛЕКСИИ

Рассматривается проблема определения равновесий на рынке олигополии при наличии лидера (лидеров) по Штакельбергу с учетом рефлексивного поведения агентов рынка в случае несовпадения рангов рефлексии при различных предельных и постоянных издержках агентов. Разработана модель рефлексивной игры для рынка дуополии, позволившая получить формулы расчета информационных равновесий при несовпадении рангов рефлексии агентов и при различных предельных и постоянных издержках агентов. Показано, что опережение (запаздывание) рефлексии одного агента по сравнению с контрагентом влияет на интенсивность конкуренции на рынке олигополии и на неравномерность распределения выигрыша между агентами в пользу рефлексивного лидера.

Ключевые слова: олигополия, лидер по Штакельбергу, рефлексивная игра, равновесие по Нэшу.

DOI: 10.31857/S0005231020020099

1. Введение

В условиях олигополии [1] прибыль каждого продавца (агента) является функцией не только его действия в виде выбранного объема выпуска, но и действий остальных агентов, называемых окружением. Поэтому олигополия моделируется в форме игры [2]. Максимизирующие полезность (прибыль) каждого агента действия, т.е. наилучшие ответы, формализуемые в виде функций реакций, приводят к формированию равновесия Нэша [3] как решения соответствующей игры. Несмотря на то, что функции полезности агентов считаются известными всем агентам, при моделировании олигополии имеет место фундаментальная проблема несовершенства информированности агента о действиях окружения. Проблема заложена в самой концепции наилучших ответов и заключается в априорной неосведомленности каждого агента о том, на основе какого предположения окружение выбирает действия: предположения о неизменности действий агента, предположения о наилучшем ответе агента на действия окружения, предположения о наилучшем ответе агента на наилучший ответ окружения и т.д.

Классический подход к разрешению этой проблемы сводился к выдвижению некоторой гипотезы о поведении окружения, причем считалось, что фактические действия агентов совпадают с предположениями об этих действиях. Поэтому вектор действий агентов, являющийся решением игры по Нэшу, расценивался как реальное результирующее равновесие рынка. Исторически первой стала гипотеза А. Курно [4] об игнорировании влияния выпуска окружения на выбор данного агента. В дальнейшем в модели выбора действий агента считались заданными предположительные вариации [5], выражающие предполагаемое агентом ответное изменение выпуска контрагента, оптимизирующее критерий последнего при выбранном действии первого. В частности, модель олигополии, в которой один из агентов (лидер) информирован о том, что окружение игнорирует его действия в соответствии с гипотезой Курно, рассмотрена Г. Штакельбергом [6] в виде так называемого лидерства по Штакельбергу.

В русле классического подхода к проблеме несовершенства информированности агента современные исследователи, как правило, рассматривают линейную модель олигополии, т.е. вводят гипотезу о линейных функциях рыночного спроса и издержек агентов. Сформировался обширный корпус исследований таких равновесий в случае симметричной информированности агентов для линейной модели олигополии [7–13], а также для нелинейной модели олигополии, см. [14–18], в том числе обзоры [19, 20]. Линейные модели олигополии, как правило, незначительно уступая в адекватности нелинейным, существенно превосходят последние в результативности, позволяя получить аналитические решения. Исследования рынка олигополии с лидерством по Штакельбергу [21–24], как правило, базируются на априори заданных позициях лидера и ведомого. Кроме того, постановка проблемы сравнительного анализа позиций лидера и ведомого [25, 26] определила направление исследований состояний рынка олигополии в случае неединственности лидеров [27–29].

Другой подход разрешения проблемы несовершенства информированности базируется на анализе мыслительного процесса (рефлексии) агентов, формализуемого в виде представлений о стратегиях окружения, выдвигаемых каждым из агентов. Соответственно набору возможных представлений решение игры по Нэшу формирует набор векторов действий агентов, расцениваемых как возможные равновесия рынка. С учетом рефлексивной модели асимметрии человеческого восприятия Лефевра [30–32] под рефлексией в дальнейшем понимается процесс выдвижения агентом гипотез о возможных действиях окружения или так называемая рефлексия второго рода. Отметим, что далее рассматривается стратегическая рефлексия, при которой агент предполагает действия окружения, а не его информированность, в отличие от модели игры с неполной информированностью [33, 34]. Рефлексивный анализ оперирует также понятием глубины рефлексии, мерой которой является ранг — порядковый номер представления в следующей бесконечной последовательности: 1) представление агента о стратегиях окружения; 2) представление агента о представлениях окружения о стратегии агента; 3) представление агента о представлениях окружения о представлении агента о стратегиях окружения и т.д. Исследования рефлексивных моделей направлены в первую очередь на оценку оптимальной глубины стратегической рефлексии [35–38].

Модель рефлексивной игры является инструментом описания информированности агентов, с помощью которого множество представлений агентов (о стратегиях окружения или о представлениях окружения в зависимости от моделируемого ранга рефлексии) как экзогенно заданная информированность сводится к множеству возможных игр с полной информированностью. Затем в каждой из этих игр находится решение игры агента с представляемыми (фантомными) агентами окружения. Поэтому решением рефлексивной игры является не реальное, а информационное равновесие — вектор действий реальных и фантомных (существующих во мнении реальных) агентов, при котором агент максимизирует полезность исходя из своей информированности об окружении, т.е. если бы окружение выбирало те действия, которые представляет этот агент. Решения всех возможных игр агента с фантомами образуют набор информационных равновесий, используемый для последующего сравнения с параметрами реальных рынков с целью оценки ранга рефлексии реальных агентов.

В модели олигополии рефлексивный анализ был впервые применен [6] (как было отмечено в [39]) в дуополии Штакельберга как «борьба за лидерство», при которой оба агента предполагают, что их контрагенты действуют как ведомые; поскольку эти предположения одновременно не могут быть реальностью, то они являются представлениями агентов, а соответствующая игра, приводящая к неравновесию Штакельберга, является рефлексивной. Рефлексивные игры агентов рынка олигополии исследованы в модели Курно – Штакельберга для первых двух рангов стратегической рефлексии [40–42], анализировались информационные равновесия при информационной рефлексии о значениях экзогенного параметра функции полезности [43], а также о параметрах функций издержек окружения [44]. Проводился [45] сравнительный анализ эффективности равновесий по Курно и Штакельбергу; рассматривались [46] динамические рефлексивные игры в модели Штакельберга и анализировалось временное влияние информационного преимущества на эффективность агентов. Оценивалась эффективность лидерства по Штакельбергу по сравнению с представлением агента о рынке как о совершенной конкуренции [47]. В модели олигополии с нелинейными функциями издержек агентов исследовалось [48–50] взаимодействие ведомых агентов и лидеров по Штакельбергу, имеющих различные ранги рефлексии. В модели дуополии с линейными функциями спроса и издержек при одинаковых предельных и постоянных издержках агентов найдены [51] информационные равновесия при наличии лидеров по Штакельбергу произвольного уровня в случае совпадающих рангов рефлексии. Однако актуальной задачей, требующей дальнейшего исследования, представляется анализ равновесий на рынке дуополии при различных предельных и постоянных издержках агентов в случае несовпадения рангов рефлексии агентов, когда один из агентов имеет опережающее рефлексивное представление («рефлексивный лидер»), а другой, соответственно, запаздывает («рефлексивный последователь»). В такой постановке оценка оптимальной глубины стратегической рефлексии производится путем сравнительного анализа эффективности опережения рефлексии одних агентов относительно других.

2. Методология

Рассмотрим следующую линейную модель рынка олигополии. Пусть агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

$$\Pi_i\left(Q, Q_i\right) = P\left(Q\right) Q_i - C_i\left(Q_i\right), \quad Q_i \geq 0, \quad i \in N = \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

при линейной модели спроса

$$P\left(Q\right) = a - bQ, \quad a, b > 0, \tag{2}$$

где совокупный выпуск равен

$$Q = \sum_{i \in N} Q_i, \tag{3}$$

и линейных функциях издержек

$$C_i(Q_i) = d_i + c_i Q_i, \quad c_i, d_i > 0, \quad c_i < a, \quad i \in N, \tag{4}$$

где Q_i, Π_i — выпуск и прибыль i-го агента; N — множество агентов рынка; n — количество агентов; P, Q — равновесная цена и суммарный объем рынка; c_i, d_i — коэффициенты функций издержек агентов, d_i интерпретируется как постоянные издержки, c_i — предельные издержки; a, b — коэффициенты функции рыночного спроса.

Модель выбора оптимального действия агента определяет неотрицательное действие Q_i^*, максимизирующее прибыль i-го агента, зависящую также от суммарного действия всех агентов Q (символом «*» обозначено оптимальное действие). Модели выбора действий агентов при (1)–(4) записываются в следующем виде:

$$Q_i^* = \arg\max_{Q_i \geq 0} \Pi_i\left(Q, Q_i\right) = \arg\max_{Q_i \geq 0} \left\{\left(a - bQ\right) Q_i - d_i - c_i Q_i\right\}, \quad i \in N. \tag{5}$$

Равновесие Нэша [3] в системе (5) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения. Поскольку оптимальные по модели (5) действия должны удовлетворять условию первого порядка [52], то равновесие Нэша определяется из решения следующей системы уравнений (так называемых уравнений реакций):

$$\frac{\partial \Pi_i\left(Q_i, \rho_{ij}\right)}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N, \tag{6}$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация в уравнении реакции i-го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j-го агента в ответ на единичный прирост выпуска i-го агента. Поскольку согласно модели (5) оптимумы агентов зависят не только от собственного действия i-го агента Q_i, но и от действий окружения через Q, то последняя зависимость представлена в системе (6) как функция полезности $\Pi_i\left(Q_i, \rho_{o\to j}\right)$ от вектора предположительных вариаций, характеризующих влияние действий окружения на изменение Q.

Вектор предположительных вариаций i-го агента $\rho_i = \{\rho_{ij}, j \in N\}$ формализует априори неизвестную ему информацию о принципах действия окружения, поэтому система (6) имеет множество решений, зависящих от вектора $\rho = \{\rho_{ij}, i, j \in N\}$ как от параметра. Для нахождения множества возможных векторов ρ используем рефлексивный анализ, т.е. будем считать предположительные вариации некоторыми функциями предположений агентов о стратегиях окружения.

При анализе рефлексии примем следующие гипотезы: 1) агенты выбирают действия одновременно, однократно и независимо; 2) агент выбирает действия, максимизирующие его функцию полезности исходя из доступной ему информации о действиях окружения; 3) в момент выбора действий агенты располагают информацией о функциях полезности всех агентов (функциях рыночного спроса и издержек агентов), о количестве агентов, а также о том, что окружение имеет равный с ними уровень информированности; 4) агенты на каждом ранге рефлексии могут иметь представления о наилучших стратегиях окружения, а также о представлениях окружения, т.е. для всех агентов рассматривается стратегическая рефлексия второго рода[1].

Рефлексивные представления, т.е. мнения агентов о стратегиях окружения, обусловливают стратификацию агентов по уровням лидерства следующим образом: агент, вычисляя свою оптимальную реакцию, подставляет в соответствующее уравнение системы (6) некоторые предположительные вариации действий окружения, которые выбираются исходя из представлений агента — нулевые вариации соответствуют представлению об окружении как о ведомых, поэтому данный агент становится лидером первого уровня; ненулевые вариации соответствуют представлению об окружении как о лидерах, следовательно, агент становится лидером более высокого уровня. На втором ранге рефлексии агент анализирует возможные представления окружения о своей стратегии, аналогичные вышеуказанным (ведомый или лидер), и рассчитывает предположительные вариации окружения исходя из того, что окружение само является лидером более высокого уровня. Вследствие этого уровень лидерства агента становится еще выше по сравнению с первым рангом рефлексии. Отметим, что используемое далее понятие ранга рефлексии соответствует известному подходу [54][2], адаптированному применительно к задаче олигополии, в которой классически сложилась бинарная система пред-

[1] Напомним, что согласно принятой терминологии [53] рефлексия первого рода — это мнение агента о собственных представлениях о реальности; рефлексия второго рода — это мнение агента о действиях или представлениях окружения; стратегическая рефлексия — это мнение агента о действиях (стратегиях или принципах принятия решений) окружения.

[2] Напомним краткую характеристику этого подхода: «Агент имеет нулевой ранг рефлексии, если он знает только матрицу платежей. Агент обладает первым рангом рефлексии, если он считает, что его противники имеют нулевой ранг рефлексии, т.е. знают только матрицу платежей. Вообще агент с k-м рангом рефлексии предполагает, что его противники имеют $(k-1)$-й ранг рефлексии».

ставлений агентов вида «ведомый–лидер». Используемый далее термин «уровень лидерства» является расширением классического понятия лидерства по Штакельбергу [6], соответствующего первому рангу рефлексии («я думаю, что окружение является ведомыми») на случай углубления рефлексии («я думаю, что окружение думает, что я ведомый» и т.д.).

Возникающую в результате представляемую иерархию агентов запишем в виде множества

$$G = (M_0, M_1, \dots, M_l), \tag{7}$$

где l — количество уровней лидерства агентов; M_m $(m = 0, \dots, l)$ — множества агентов; M_0 – множество ведомых агентов; M_m $(m = 1, \dots, l)$ — множество лидеров m-го уровня. Множество (7) есть разбиение множества агентов, удовлетворяющее ограничениям

$$M_m \cap M_j = \varnothing, \quad m \neq j, \quad M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_l = N = \{1, \dots, n\}.$$

В силу гипотезы 4 агент имеет какие-либо представления о стратегиях окружения и его представлениях, что позволяет ему на каждом ранге рефлексии построить конкретное множество вида (7). В частности, структура множества (7) определяется следующим образом: если на первом ранге рефлексии агент представляет, что окружение выбирает стратегию ведомого, то последнее относится к множеству M_0; если в этом случае агент думает, что окружение является «классическим» лидером по Штакельбергу, то он относит окружение к множеству лидеров первого уровня M_1. Соответственно, если на втором ранге рефлексии агент представляет, что окружение думает о нем как о ведомом, т.е. само является лидером первого уровня, то оно относится к множеству M_1; если в этом случае агент представляет, что окружение думает о нем как о лидере по Штакельбергу, т.е. оно является лидером второго уровня, то окружение относится к множеству M_2. Аналогично окружение стратифицируется на последующих рангах рефлексии. Поэтому между рангом рефлексии агента и уровнем лидерства окружения имеет место следующее соотношение: уровень лидерства окружения либо равен рангу рефлексии агента, если в представлении фигурирует термин «лидер», либо на единицу меньше ранга рефлексии агента, если в представлении фигурирует термин «ведомый».

С учетом терминологии, введенной в [50], F-стратегией (стратегией ведомого агента) считается выбор агентом действия по (5) без учета действий окружения согласно гипотезе Курно [4], в результате данный агент имеет в множестве (7) уровень M_0; L-стратегия (стратегия лидера по Штакельбергу [6]) — это выбор действия по модели (5) в предположении, что окружение придерживается F-стратегии, в результате агент имеет уровень M_1. Формально эти стратегии можно записать следующим образом: если η_0-й агент выбирает F-стратегию, то в η_0-м уравнении системы (6) полагается $\rho_{\eta_0 j} = 0 \forall j \in N \backslash \eta_0$; если η_1-й агент выбирает L-стратегию, то в η_1-м уравнении системы (6) $\rho_{\eta_1 j}$ вычисляется дифференцированием по Q_{η_1} остальных $(N-1)$ уравнений (6), в которых полагается $\rho_{ij} = 0 \forall j \in N \backslash i$. В частности, для модели (5) без учета рефлексивных представлений эти стратегии имеют классический вид [39] функций реакций ведомого агента Курно и лидера по Штакельбергу:

$$Q_i^{*F} = \frac{a - c_i}{2b} - \frac{Q_j}{2}; \quad Q_i^{*L} = \frac{a - c_i}{1{,}5b} - \frac{Q_j}{1{,}5}, \quad i, j \in N.$$

Последовательность представлений i-го агента, упорядоченная по возрастанию последовательности рангов рефлексии, записывается в виде множества

$$G_i = \left\{ G_{ij}^r, j \in N \backslash i, r \in Z \right\}, \quad i \in N, \tag{8}$$

где G_{ij}^r — представляемая i-м агентом стратегия окружения на r-м ранге рефлексии; в нижнем индексе первый символ обозначает рефлексирующего агента, второй символ — номер агента окружения; r — ранг рефлексии; Z — множество целых чисел. Представляемая стратегия окружения может быть двух типов (F или L) и записывается либо в виде $G_{ij}^r = F \vee G_{ij}^r = L$, либо в виде обусловленных этими стратегиями уровней лидерства окружения $G_{ij}^r = (M_0) \vee G_{ij}^r = (M_1)$.

Для применения классического информационного регламента Штакельберга [6], определяющего равновесие при полной информированности, множество возможных рефлексивных представлений агентов (8) на r-м ранге рефлексии необходимо свести к набору множеств уровней лидерства (7) на первом ранге рефлексии. Тем самым рефлексивная игра сводится к множеству игр с полной информированностью вида

$$\Gamma = \left\langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, G^1 \right\rangle, \tag{9}$$

где G^1 — система представлений всех агентов о принципах выбора действий окружением на первом ранге рефлексии в виде (7).

Определение 1. Информационное равновесие в игре двух агентов (9) *есть вектор действий агентов* $\left(Q_i^*, Q_j^*, i, j \in N\right)$, *полученный из решения задачи* (6).

В дальнейшем информационное равновесие описывается парой (ψ^*, Q^*), где $Q^* = Q_i^* + Q_j^*$, $i, j \in N$ — сумма равновесных действий агентов, $\psi^* = \frac{Q_j^*}{Q_i^*}$, $i, j \in N$ — показатель структуры равновесных действий.

Определение 2. Показатель структуры выигрыша в игре двух агентов (9) *при информационном равновесии есть величина* $\Psi^* = \frac{\Pi_j\left(Q_j^*\right)}{\Pi_i\left(Q_i^*\right)}$, $i, j \in N$.

Определение 3. Рефлексивным лидером называется j-й агент, ранг рефлексии которого больше ранга рефлексии i-го агента, называемого рефлексивным последователем, на целое число γ, которое называется параметром опережения, если $\gamma > 0$ (запаздывания, если $\gamma < 0$), т.е. $r_j = r_i + \gamma$, $\gamma \in Z$.

В случае $\gamma < 0$ рефлексивные позиции лидера и последователя меняются местами, однако представляется целесообразным сохранить введенную терминологию для идентичности понятийного аппарата при анализе рефлексии с различными типами несовпадения рангов, как при опережении, так и при запаздывании.

Поставим задачу нахождения всех информационных равновесий в игре (9) на произвольном ранге рефлексии i-го агента при произвольном значении параметра опережения γ ранга рефлексии j-го агента.

В дальнейшем будем придерживаться следующей логики. Решение игры (9) в виде равновесного по Нэшу вектора действий Q_i^*, $i \in N$ может быть получено из системы уравнений (6), для чего должен быть задан вектор предположительных вариаций $\rho = \{\rho_{ij}, i, j \in N\}$. Этот вектор согласно определению предположительной вариации ($\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$) вычисляется дифференцированием уравнений системы (6), соответствующих окружению i-го агента. Поскольку i-й агент на первом ранге рефлексии может выдвигать предположение о двух стратегиях окружения (F или L), т.е. относить окружение либо к множеству M_0, либо к множеству M_1, то в уравнениях (6) для окружения может быть либо $\rho_{ji} = 0 \forall j \in M_0$, либо $\rho_{ji} = -\frac{1}{2} \forall j \in M_1$. На втором ранге рефлексии i-й агент также может выдвигать предположение о двух стратегиях окружения (F или L), но это означает, что, по мнению агента, окружение относит его либо к множеству M_0, либо к множеству M_1. На последующих рангах рефлексии интерпретация предположений еще более усложняется, поэтому первый этап решения игры (9) состоит в редукции предположений агентов на r-м ранге рефлексии к предположениям на первом ранге, когда вектор ρ можно вычислить непосредственно. На втором этапе решения игры (9) определяется зависимость ρ_{ij} от предположений i-го агента, сведенных к первому рангу рефлексии, как функция ранга рефлексии этого агента, т.е. вычисляется вектор ρ. На третьем этапе путем решения системы (6) вычисляется вектор Q_i^*, $i \in N$ как функция ранга рефлексии i-го агента r и параметра опережения (запаздывания) γ.

3. Результаты

Как было показано [50], представление агента о стратегиях окружения при гипотезах 1–4 может быть либо L-стратегией, либо F-стратегией. Поэтому запишем в виде (7) совокупность представлений двух агентов на r-м ранге рефлексии:

$$G^r_{t=1} = (M_0 = (i,j))\,, \quad G^r_{t=2} = (M_1 = (i,j))\,,$$
$$G^r_{t=3} = (M_0 = (i) \wedge M_1 = (j))\,, \quad G^r_{t=4} = (M_0 = (j) \wedge M_1 = (i))\,, \tag{10}$$

где $t = 1, 2, 3, 4$ — номер игрового случая (рис. 1–4), определяющего игру (9) соответствующего вида. На рис. 1–4 использована следующая символика: ○ — агент; □ — представляемая агентом стратегия окружения; → — представления i-го агента; $--\rightarrow$ — представления j-го агента; ■■■ — непоказанные стрелки; { — последовательность представлений (8) каждого агента до r-го ранга рефлексии включительно.

В соответствии с (10) возможно четыре игровых случая, схематично изображенных на рис. 1–4: идентичность представлений агентов друг о друге как о ведомых агентах (рис. 1); идентичность представлений агентов друг о друге

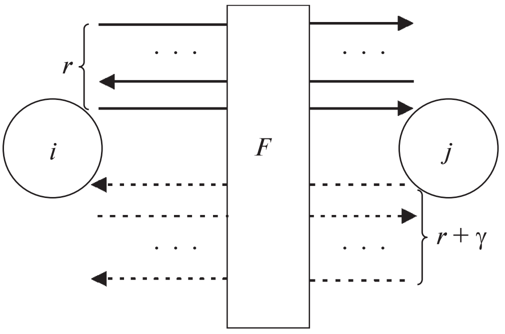

Рис. 1. Схема игры при идентичности представлений агентов друг о друге как о последователях.

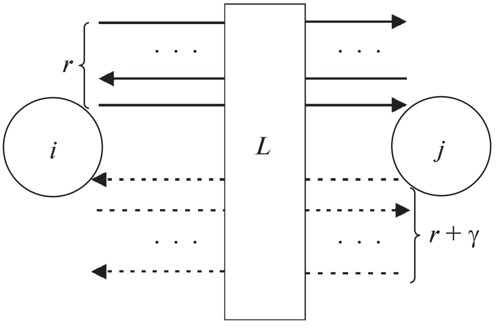

Рис. 2. Схема игры при идентичности представлений агентов друг о друге как о лидерах.

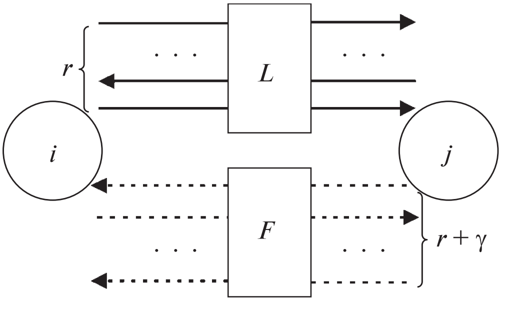

Рис. 3. Схема игры при контрадикторности представлений агентов: i-й агент считает контрагента лидером, j-й агент считает контрагента последователем.

как о лидерах по Штакельбергу (рис. 2); контрадикторность представлений агентов, когда рефлексивный последователь представляет рефлексивного лидера лидером по Штакельбергу, а последний считает контрагента ведомым (рис. 3); контрадикторность представлений агентов, когда рефлексивный последователь представляет рефлексивного лидера ведомым, а последний считает контрагента лидером по Штакельбергу (рис. 4). Отметим, что непосредственное сравнение этих случаев с возможными в реальности ситуациями

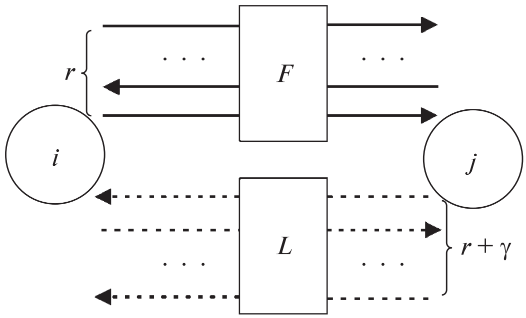

Рис. 4. Схема игры при контрадикторности представлений агентов: i-й агент считает контрагента последователем, j-й агент считает контрагента лидером.

допустимо только при $\gamma = 0$: случаи идентичности представлений не соответствуют реальности (как «борьба за лидерство»), а случаи контрадикторности представлений реалистичны, поскольку агент, которого окружение представляет лидером по Штакельбергу, считает контрагента ведомым, а последний, соответственно, представляет контрагента лидером по Штакельбергу. При $\gamma > 0$ соответствие представлений реальности устанавливается посредством анализа информационных равновесий.

Определим виды рефлексивной игры двух агентов с представлениями (10) в указанных случаях в виде следующего утверждения.

Утверждение 1. Рефлексивная игра двух агентов (9) *в случае несовпадения рангов рефлексии на величину γ при различных представлениях на r-м ранге рефлексии описывается следующей системой разбиений типа* (7) *на первом ранге рефлексии:*

$$G^1_{t=1} = (M_r, M_{r+\gamma}), \ M_r = (i), \ M_{r+\gamma} = (j) \quad \text{при } G^r_{ij} = (M_0 = (j)) \wedge G^{r+\gamma}_{ji} = (M_0 = (i)), \tag{11a}$$

$$G^1_{t=2} = (M_{r+1}, M_{r+\gamma+1}), \ M_{r+1} = (i), \ M_{r+\gamma+1} = (j) \quad \text{при } G^r_{ij} = (M_1 = (j)) \wedge G^{r+\gamma}_{ji} = (M_1 = (i)), \tag{11b}$$

$$G^1_{t=3} = (M_{r+1}, M_{r+\gamma}), \ M_{r+1} = (i), \ M_{r+\gamma} = (j) \quad \text{при } G^r_{ij} = (M_1 = (j)) \wedge G^{r+\gamma}_{ji} = (M_0 = (i)), \tag{11c}$$

$$G^1_{t=4} = (M_r, M_{r+\gamma+1}), \ M_r = (i), \ M_{r+\gamma+1} = (j) \quad \text{при } G^r_{ij} = (M_0 = (j)) \wedge G^{r+\gamma}_{ji} = (M_1 = (i)), \tag{11d}$$

$$i, j \in N, r, \gamma \in Z.$$

Формализация (11) системы представлений агентов на первом ранге рефлексии при различных видах (10) представлений агентов на r-м ранге рефлексии позволяет найти информационные равновесия в игре (9). Для этого на базе соответствующих множеств G^1 формируются функции наилучших ответов агентов в виде системы (6), решение которой зависит от вектора предположительных вариаций на r-м ранге рефлексии.

Утверждение 2. *Предположительная вариация на произвольном ранге рефлексии в уравнении реакции i-го агента, такого что $M_r = (i)$, в системе уравнений* (6) *вычисляется по формуле*

$$\rho_{ij}^r = -\frac{r_i}{r_i + 1}. \tag{12}$$

Утверждение 3. *Информационное равновесие в рефлексивной игре* (9) *на произвольном ранге рефлексии для двух агентов с различными предельными издержками вычисляется по формулам*

$$\begin{aligned}
&Q_i^*(r_i,\gamma) = \frac{\alpha_i\left(2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)-\alpha_j}{\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)\left(2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)-1},\\
&Q_j^*(r_i,\gamma) = \frac{\alpha_j\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)-\alpha_i}{\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)\left(2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)-1}, \quad i,j \in N,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&Q^*(r_i,\gamma) = \frac{\alpha_i\left(1-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)+\alpha_j\left(1-\frac{r_i}{r_i+1}\right)}{\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)\left(2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)-1},\\
&\psi^*(r_i,\gamma) = \frac{\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(2-\frac{r_i}{r_i+1}\right)-1}{2-\frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}-\frac{\alpha_j}{\alpha_i}}, \quad i,j \in N,
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\alpha_i = \frac{a-c_i}{b}, \quad i \in N.$$

Формулы (13) представляют собой равновесные по Нэшу действия агентов в игре (9). Формулы (13), (14) выражают информационное равновесие как функцию ранга рефлексии r_i рефлексивного последователя и параметр опережения γ рефлексивного лидера $Q^*(r_i,\gamma)$, $\psi^*(r_i,\gamma)$, что позволяет анализировать влияние этих показателей на структуру равновесия в игре в виде следующего утверждения.

Рассмотрим пример применения формул (13) в случае классической игры Штакельберга, для которой $r_i = 0$, $\gamma = 1 \Rightarrow r_j = 1$. В этом случае из (13) следует, что $Q_i^*(0,1) = \frac{\frac{3}{2}\alpha_i-\alpha_j}{2}$, $Q_j^*(0,1) = \frac{2\alpha_j-\alpha_i}{2}$, а если агенты имеют идентичные параметры функций издержек $c = c_i$, $i \in N$, т.е. $\alpha = \alpha_i$, $i \in N$, то $Q_i^*(0,1) = \frac{\alpha}{4}$, $Q_j^*(0,1) = \frac{\alpha}{2}$, что совпадает с известным результатом для равновесия Штакельберга [55]: $Q^F = \frac{a-c}{4b}$, $Q^L = \frac{a-c}{2b}$.

Утверждение 4. *В информационном равновесии рефлексивной игры* (9) *двух агентов на произвольном ранге рефлексии структура равновесных действий неравномерна и зависит от параметра опережения и ранга рефлексии*

$$\psi^* \begin{cases} > 1, & \textit{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} > \omega\left(r_i\right), \\ < 1, & \textit{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} < \omega\left(r_i\right), \ i, j \in N, \end{cases}$$

(15)
$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} \begin{cases} > 0, & \textit{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} > \zeta\left(r_i\right), \\ < 0, & \textit{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} < \zeta\left(r_i\right), \ i, j \in N, \end{cases}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} \begin{cases} > 0, & \textit{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} > \bar{\zeta}\left(r_i\right), \\ < 0, & \textit{при} \quad \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} < \zeta\left(r_i\right), \ i, j \in N, \\ < 0, & \textit{при} \quad \zeta\left(r_i\right) < \dfrac{\alpha_j}{\alpha_i} < \bar{\zeta}\left(r_i\right) \wedge \delta_1 > \left|\delta_2\right|, \end{cases}$$

где

$$\omega = \frac{3 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}}{3 - \frac{r_i}{r_i+1}}, \quad \zeta = \frac{1}{2 - \frac{r_i}{r_i+1}}, \quad \bar{\zeta} = 2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1},$$
$$\delta_1 = \frac{\alpha_j}{\alpha_i\left(r_i+1\right)^2}\left(2 - \bar{\zeta} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right), \quad \delta_2 = \frac{1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_i \zeta}}{\left(r_i+\gamma+1\right)^2}.$$

Структура действий в информационном равновесии рефлексивной игры двух агентов согласно формулам (15) в общем случае зависит от ранга рефлексии и параметра опережения через функции $\omega\left(r_i\right)$, $\zeta\left(r_i\right)$, $\bar{\zeta}\left(r_i\right)$. Однако для практически важного частного случая существенного превышения параметра обратной функции спроса a над предельными издержками агентов c_i, c_j можно выявить однозначный характер зависимости $\psi^*\left(r_i, \gamma\right)$.

Утверждение 5. *В информационном равновесии рефлексивной игры* (9) *двух агентов на произвольном ранге рефлексии при условии* $a \gg \max\left\{c_i, c_j\right\}$, $c_i, c_j > 0$, $i, j \in N$ *неравномерность действий растет с увеличением параметра опережения рефлексии и убывает с увеличением ранга рефлексии:*

(15a)
$$\psi^* \begin{cases} > 1, & \text{если} \quad \gamma \geq 1, \\ < 1, & \text{если} \quad \gamma \leq -1, \left|\gamma\right| < r_i, \end{cases} \qquad \frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0, \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} < 0.$$

Результат игры (9) оценивается не только по параметрам информационного равновесия (14), но и по распределению выигрыша (прибыли) между агентами, определенному в виде следующего утверждения.

Утверждение 6. *Показатель структуры выигрыша равен*

(16)
$$\Psi^* = \frac{\left(a - bQ^* - c_j\right)\psi^* Q^* - \left(1+\psi^*\right)d_j}{\left(a - bQ^* - c_i\right)Q^* - \left(1+\psi^*\right)d_i}, \quad i, j \in N,$$

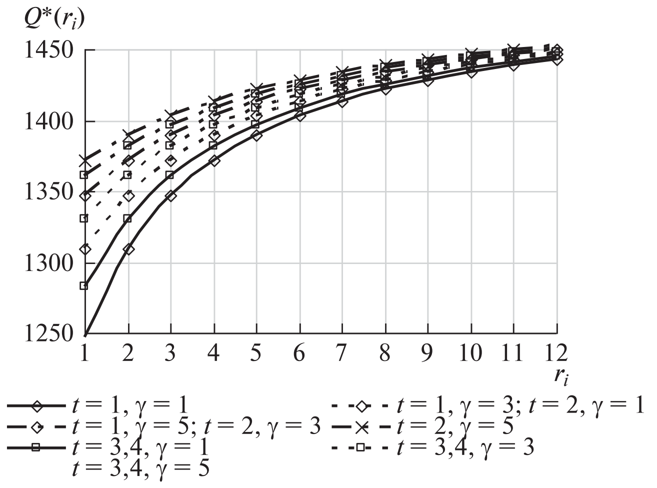

Рис. 5. Суммарное действие агентов (млрд мин) в зависимости от ранга рефлексии.

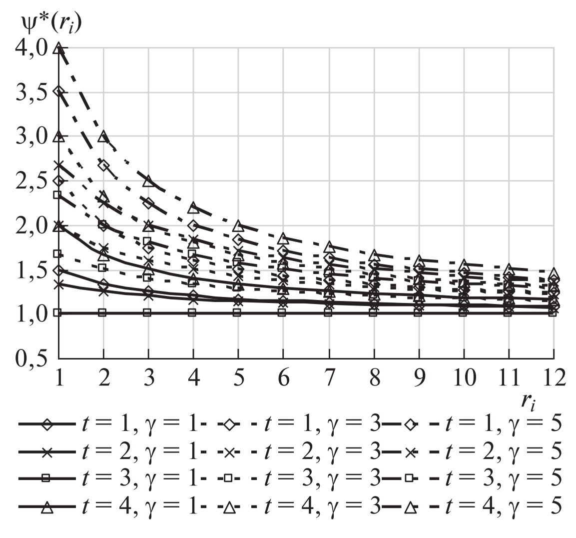

Рис. 6. Показатель структуры равновесных действий агентов в зависимости от ранга рефлексии.

а при условиях $P(Q^*) \gg \max\{c_i, c_j\} \wedge P(Q^*)\,Q^* \gg \max\{d_i, d_j\}$, $i, j \in N$, *равен* $\Psi^* \approx \psi^*$.

Формула (16) определяет полезности агентов в равновесии Нэша в относительной форме; абсолютные равновесные значения полезностей вычисляются на основе равновесных действий (13) через функции полезности агентов (1).

Рассмотрим модельный пример расчета информационных равновесий рынка дуополии на основе данных для двух агентов ($i = 1$, $j = 2$), полученных [53] для телекоммуникационного рынка России. Коэффициенты регрес-

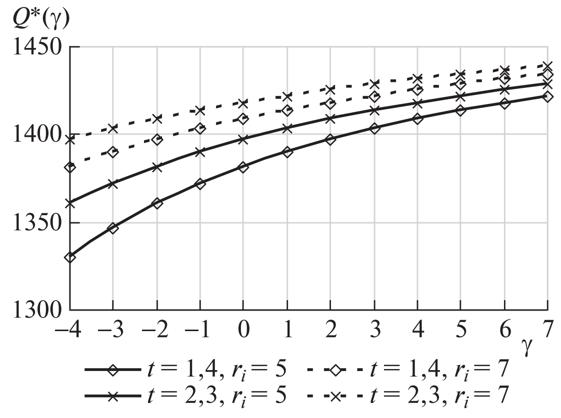

Рис. 7. Суммарное действие агентов (млрд мин) в зависимости от параметра опережения рефлексии.

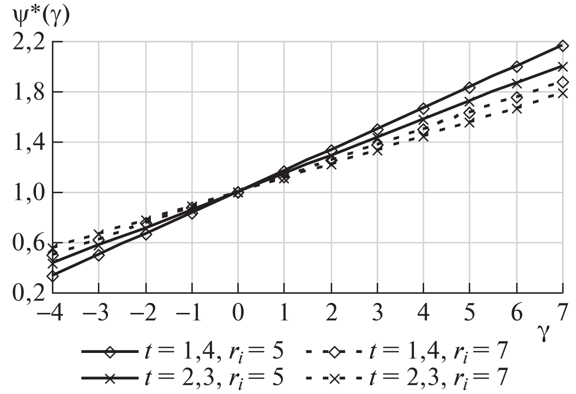

Рис. 8. Показатель структуры равновесных действий агентов в зависимости от параметра опережения рефлексии.

сионных моделей функции спроса (2) и функций издержек агентов (4) приведены в табл. 1.

На рис. 5, 6 показаны параметры информационных равновесий (суммарного действия агентов и показателя структуры равновесных действий) для различных игровых случаев ($t = 1, 2, 3, 4$) в зависимости от ранга рефлексии i-го агента, рассчитанные по формулам (14).

Таблица 1. Коэффициенты функции спроса, функций издержек агентов

Коэффициенты функции спроса		Коэффициенты функций издержек			
		Агент 1		Агент 2	
a, руб	b, руб/млн мин	c, тыс. руб/ мин	d, млрд руб	c, тыс. руб/ мин	d, млрд руб
1,85	0,0000001	0,0004	63,4	0,0003	58,6

На рис. 7, 8 показаны параметры информационных равновесий (суммарного действия агентов и показателя структуры равновесных действий) для различных игровых случаев ($t = 1, 2, 3, 4$) в зависимости от параметра опережения рефлексии γ при значениях ранга рефлексии i-го агента $r_i = 5, 7$, рассчитанные по формулам (14).

4. Обсуждение

Структуры игры (11) показывают, что 1) на r-м ранге рефлексивный последователь имеет статус лидера по Штакельбергу r-го уровня, если в его представлении контрагент ведомый, и $(r+1)$-го уровня, если в его представлении контрагент — лидер; 2) рефлексивный лидер имеет статус, превышающий на величину γ статус рефлексивного последователя в случаях 1, 2 идентичности представлений агентов; 3) статус рефлексивного лидера выше статуса рефлексивного последователя на величину $(\gamma - \varepsilon)$ в случаях 3, 4 контрадикторности представлений агентов, где ε характеризует степень контрадикторности представлений, $\varepsilon = m_i - m_j$, в частности $\varepsilon = 1 - 0 = 1$ в случае 3, $\varepsilon = 0 - 1 = -1$ в случае 4.

Формулы информационных равновесий (14) позволяют оценить степень близости равновесия к конкурентному состоянию [56], поскольку чем больше величина Q^*, тем ниже равновесная рыночная цена, следовательно, тем сильнее конкуренция агентов. Показатель структуры равновесных действий ψ^* характеризует эффективность опережения рефлексивного представления для рефлексивного лидера: с ростом ψ^* увеличивается дифференциация рынка в пользу рефлексивного лидера.

Формулы (15) определяют зависимость структуры равновесных действий и тенденций изменения этой структуры от соотношения параметров α для рефлексивного лидера (α_j) и рефлексивного последователя (α_i). В практически реализуемом случае (15а) $a \gg c_i, c_j,\ i, j \in N$, т.е. когда параметр обратной функции спроса a, интерпретируемый как максимальная цена спроса, существенно превышает предельные издержки агентов [57], сумма действий всегда перераспределяется в пользу рефлексивного лидера ($\psi^* > 1$), неравномерность распределения действий в пользу рефлексивного лидера возрастает с ростом параметра опережения ($\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0$) и убывает с ростом ранга рефлексии ($\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} < 0$).

Анализ результатов численного эксперимента приводит к следующим выводам.

Из анализа рис. 5, во-первых, следует, что суммарное действие (суммарный выпуск) агентов возрастает, следовательно, равновесная рыночная цена снижается, с увеличением ранга рефлексии r_i и параметра опережения рефлексии γ, что свидетельствует об усилении конкуренции, но различие суммарных выпусков с ростом γ сокращается — значит, рефлексия агентов не способна бесконечно развивать конкуренцию.

Во-вторых, рис. 5 показывает, что при одном и том же значении параметра опережения рефлексии ($\gamma = \mathrm{const}$) имеет место следующее соотношение между суммарными действиями агентов:

$$Q^*(t=2) > Q^*(t=3,4) > Q^*(t=1),$$

которое позволяет классифицировать влияние типа рефлексивных представлений агентов на интенсивность их конкуренции следующим образом. Случай $t=2$ приводит к наиболее сильной конкуренции, поскольку при этом достигается наибольшая сумма действий агентов, что ведет к наименьшей равновесной рыночной цене по (2). Случай $t=1$ дает наименьшее суммарное действие, что ведет к наибольшей равновесной цене, т.е. наиболее слабому влиянию рефлексии агентов на интенсивность конкуренции. Следовательно, полученные выводы о влияние типа рефлексивных представлений агентов на динамику суммарного действия согласуются с классическими результатами, полученными при отсутствии рефлексии [39].

Из анализа рис. 6, во-первых, следует, что неравномерность равновесных действий снижается с ростом ранга рефлексии r_i, подтверждая свойство (15а), что согласуется с известным для случая совпадения рангов рефлексии положением о неэффективности рефлексии [54]. Во-вторых, при $\gamma = \mathrm{const}$ имеет место следующее соотношение между показателями структуры равновесных действий:

$$\psi^*(t=4) > \psi^*(t=1) > \psi^*(t=2) > \psi^*(t=3),$$

которое позволяет оценить влияние типа рефлексивных представлений агентов на эффективность опережающего представления для рефлексивного лидера.

Суммарное действие агентов (рис. 7) возрастает с увеличением параметра опережения рефлексии γ, т.е. конкуренция усиливается, поскольку при этом фактически возрастает ранг рефлексивного лидера. Также из рис. 7 следует, что характер зависимости $Q^*(\gamma)$ в различных игровых случаях имеет закономерность

$$Q^*(\gamma, t=2) = Q^*(\gamma, t=3) > Q^*(\gamma, t=1) = Q^*(\gamma, t=4),$$

позволяющую оценить влияние опережения рефлексии на интенсивность конкуренции.

Из анализа рис. 8 следует, что неравномерность равновесных действий возрастает с ростом параметра опережения рефлексии, подтверждая свойство (15а). Характер зависимости $\psi^*(\gamma)$ имеет следующую закономерность в случае $\gamma > 0$:

$$\psi^*(\gamma, t=2) = \psi^*(\gamma, t=3) < \psi^*(\gamma, t=1) = \psi^*(\gamma, t=4),$$

а в случае запаздывания рефлексии ($\gamma < 0$) имеет место обратное соотношение, т.е. вид функции влияния опережения рефлексии на неравномерность равновесных действий зависит только от представления рефлексивного последователя. Неравномерность равновесных действий в случаях $t=2,3$ одинакова и не превышает этого показателя в случаях $t=1,4$ при любом $\gamma > 0$.

5. Заключение

Исследована проблема поиска равновесий на рынке олигополии при наличии лидера (лидеров) по Штакельбергу с учетом рефлексивного поведения агентов рынка в случае несовпадения рангов рефлексии. Сформированы модели рефлексивных игр для рынка дуополии в случаях идентичности представлений агентов друг о друге как о ведомых агентах, идентичности представлений агентов друг о друге как о лидерах по Штакельбергу, противоположности представлений агентов, один из которых представляет контрагента ведомым, а другой — лидером. Разработаны механизмы установления равновесия рынка дуополии при данном многообразии рефлексивных представлений агентов на одинаковых рангах рефлексии. Моделирование игры в зависимости от ранга рефлексии показало влияние опережения (запаздывания) рефлексии одного агента по сравнению с контрагентом, во-первых, на интенсивность конкуренции, во-вторых, на неравномерность распределения выигрыша между агентами в пользу рефлексивного лидера.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Представления агентов на произвольном ранге рефлексии i-го агента $r_i = \eta$ при произвольном значении параметра опережения $\gamma = \theta$ записаны в табл. 2. Представления агентов на первом ранге рефлексии рассчитаны в табл. 2 по формуле [51]

$$G^1_{ij} = (M_{m+r-1}) \, \forall \, G^r_{ij} = (M_m)\,, \quad j \in N \backslash i, \quad r \in Z, \quad i \in N.$$

Рефлексивная игра в каждом случае получена по наилучшему ответу [51] $BR_i\left(G^1_{ij}\right) \in M_{m+1} \ \forall G^1_{ij} = (M_m)$ на представления агентов, приведенные к первому рангу рефлексии. Аналогичные результаты можно получить при $r_i = \eta + 1$, $\gamma = \theta + 1$, поэтому по индукции формулы (11) доказаны.

Доказательство утверждения 2. Уравнение (6) j-го агента для задачи (5) имеет вид $a - bQ - bQ_i\left(1 + \rho^r_{ji}\right) - c_i = 0$, $i, j \in N$, откуда следует уравнение реакции j-го агента $Q_j = \frac{\alpha_i - Q_i}{2+\rho^r_{ji}}$, $i, j \in N$. Предположительные вариации для уравнения реакции i-го агента получены дифференцированием

Таблица 2. Структуры игры двух агентов в различных случаях рефлексивных представлений при $r_i = \eta$, $\gamma = \theta$, $r_j = \eta + \theta$

Случай	1	2	3	4
G^r_{ij}	M_0	M_1	M_1	M_0
G^1_{ij}	$M_{\eta-1}$	M_η	M_η	$M_{\eta-1}$
G^r_{ji}	M_0	M_1	M_0	M_1
G^1_{ji}	$M_{\eta+\theta-1}$	$M_{\eta+\theta}$	$M_{\eta+\theta-1}$	$M_{\eta+\theta}$
G^r	$(M_\eta, M_{\eta+\theta})$	$(M_{\eta+1}, M_{\eta+\theta+1})$	$(M_{\eta+1}, M_{\eta+\theta})$	$(M_\eta, M_{\eta+\theta+1})$

этого уравнения по Q_i для $r = 0, 1, 2, \ldots, \theta$:

$$
\begin{aligned}
&r_i = 1 \Rightarrow \rho_{ji}^0 = 0 \Rightarrow \rho_{ij}^1 = -\frac{1}{2},\\
&r_i = 2 \Rightarrow \rho_{ji}^1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \rho_{ij}^2 = -\frac{2}{3},\\
&r_i = 3 \Rightarrow \rho_{ji}^2 = -\frac{2}{3} \Rightarrow \rho_{ij}^3 = -\frac{3}{4},\\
&r_i = \theta \Rightarrow \rho_{ji}^{\theta-1} = -\frac{\theta-1}{\theta} \Rightarrow \rho_{ij}^\theta = -\frac{\theta}{\theta-1},
\end{aligned}
$$

поскольку для $r = \theta + 1$ выражение аналогично, то по индукции формула (12) доказана.

Доказательство утверждения 3. Система уравнений реакций (6) в задачах выбора (5) на произвольном ранге рефлексии для двух агентов с различными предельными издержками

$$
(2 + \rho_{ij}^r)Q_i + Q_j = \alpha_i, \quad Q_i + (2 + \rho_{ji}^r)Q_j = \alpha_j,
$$

имеет решение

$$
Q_i^* = \frac{\alpha_i(2 + \rho_{ji}^r) - \alpha_j}{(2 + \rho_{ij}^r)(2 + \rho_{ji}^r) - 1}, \quad Q_j^* = \frac{\alpha_j(2 + \rho_{ij}^r) - \alpha_i}{(2 + \rho_{ij}^r)(2 + \rho_{ji}^r) - 1}, \quad i, j \in N,
$$

подстановка в которое формулы (12) дает (13). Нахождение суммы и отношения (13) дает (14).

Доказательство утверждения 4. Из (14) следует, что $\psi^* > 1$, если $\alpha_j\left(2 - \frac{r_i}{r_i+1}\right) - \alpha_i > \alpha_i\left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right) - \alpha_j$; далее, $\alpha_j\left(3 - \frac{r_i}{r_i+1}\right) > \alpha_i\left(3 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}\right)$; поскольку $\alpha_i, \alpha_j > 0$, то это неравенство дает $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \omega(r_i)$. Дифференцирование $\psi^*(r_i, \gamma)$ по γ дает

$$
\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} = \frac{\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(2 - \frac{r_i}{r_i+1}\right) - 1}{\left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)^2} \frac{1}{(r_i + \gamma + 1)^2};
$$

неравенство $\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0$ выполняется, если $\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(2 - \frac{r_i}{r_i+1}\right) - 1 > 0$, что дает $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \zeta(r_i)$. Дифференцирование функции $\psi^*(r_i, \gamma)$ по r_i дает

$$
\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} = -\frac{\frac{\alpha_j}{\alpha_i(r_i+1)^2}\left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right) + \frac{1}{(r_i+\gamma+1)^2}\left(1 - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\left(2 - \frac{r_i}{r_i+1}\right)\right)}{\left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)^2} =
$$

$$
= -\frac{\delta_1 + \delta_2}{\left(2 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} - \frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)^2}.
$$

Отсюда следует, что неравенство $\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} < 0$ выполняется в следующих случаях:

i) если

$$\text{(П.1)} \qquad \frac{\alpha_j}{\alpha_i} < 2 - \frac{r_i + \gamma}{r_i + \gamma + 1} = \bar{\zeta}\left(r_i\right),$$

$$\text{(П.2)} \qquad \frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \frac{1}{2 - \frac{r_i}{r_i+1}} = \zeta\left(r_i\right).$$

Обозначим $\beta = \frac{r_i}{r_i+1}$, $\bar{\beta} = \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1}$, $\beta, \bar{\beta} < 1\ \forall r_i \geq 1$, $|\gamma| < r_i$. Поскольку $2 - \bar{\beta} - \frac{1}{2-\beta} = \frac{\left(2-\bar{\beta}\right)(2-\beta)-1}{2-\beta} > 0$, то $\bar{\zeta}\left(r_i\right) > \zeta\left(r_i\right)$, значит неравенство (П.2) является необходимым условием для неравенства (П.1), а неравенство (П.2) соответствует (15).

ii) если $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \bar{\zeta}\left(r_i\right) \wedge \frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \zeta\left(r_i\right) \wedge \delta_1 > |\delta_2|$, что соответствует (15).

iii) если $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \bar{\zeta}\left(r_i\right) \wedge \frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \zeta\left(r_i\right) \wedge \delta_2 > |\delta_1|$, что противоречит $\bar{\zeta}\left(r_i\right) > \zeta\left(r_i\right)$. Неравенство $\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} > 0$ выполняется, если

$$\text{(П.3)} \qquad \frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \bar{\zeta}\left(r_i\right)$$

$$\text{(П.4)} \qquad \frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \zeta\left(r_i\right).$$

В случаях $\gamma \geq 1$ и $\gamma \leq -1$, $|\gamma| < r_i$ неравенство (П.3) является необходимым условием для неравенства (П.4), а неравенство (П.3) соответствует (15).

Доказательство утверждения 5. Покажем, что $\psi^* > 1$: при $\gamma \geq 1$ выполняется $\frac{r_i}{r_i+1} < \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} < 1\ \forall r_i \geq 1$, значит $3 - \frac{r_i+\gamma}{r_i+\gamma+1} < 3 - \frac{r_i}{r_i+1}$, поэтому $\omega\left(r_i\right) < 1\ \forall i \in N$. Из (14) следует, что при $\psi^* > 1$ выполняется $\alpha_j > \omega\left(r_i\right)\alpha_i$, откуда $\frac{a-c_j}{b} > \omega\left(r_i\right)\frac{a-c_i}{b}$; поскольку $b > 0$, это равносильно $a - c_j > \omega\left(r_i\right)\left(a - c_i\right)$, или

$$\text{(П.5)} \qquad a\left(1 - \omega\left(r_i\right)\right) > c_j - \omega\left(r_i\right)c_i.$$

Если $c_j - \omega\left(r_i\right)c_i < 0$, то (П.5) верно для всех $c_i, c_j > 0$; если $c_j - \omega\left(r_i\right)c_i > 0$, то пусть $\exists c > 0$: $c > c_j - \omega\left(r_i\right)c_i$, $c > \max\left\{c_i, c_j\right\}$, тогда (П.5) верно при $a\left(1 - \omega\left(r_i\right)\right) > c \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{1}{1-\omega(r_i)} \Rightarrow a \gg c$, поскольку $\omega\left(r_i\right) \in \left[\frac{4}{5}, 1\right)$; так как $c > \max\left\{c_i, c_j\right\}$, то при условии $a \gg \max\left\{c_i, c_j\right\}$ верно $\psi^* > 1$. Случай $\psi^* < 1$ доказывается аналогично.

Покажем, что выполняется неравенство $\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0$, которое верно при

$$\text{(П.6)} \qquad a\left(1 - \zeta\left(r_i\right)\right) > c_j - \zeta\left(r_i\right)c_i.$$

Поскольку $\zeta\left(r_i\right) < 1\ \forall r_i \geq 1$, то если $c_j - \zeta\left(r_i\right)c_i < 0$, то (П.6) верно для всех $c_i, c_j > 0$; если $c_j - \zeta\left(r_i\right)c_i > 0$, то пусть $\exists c > 0$: $c > c_j - \zeta\left(r_i\right)c_i$, $c > \max\left\{c_i, c_j\right\}$, тогда (П.6) верно при $a\left(1 - \zeta\left(r_i\right)\right) > c \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{1}{1-\zeta(r_i)} \Rightarrow a \gg c$, поскольку $\zeta\left(r_i\right) \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)$; так как $c > c_i, c_j$, то при условии $a \gg \max\left\{c_i, c_j\right\}$ верно $\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} > 0$. Случай $\frac{\partial \psi^*}{\partial \gamma} < 0$ доказывается аналогично.

Покажем, что $\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} > 0$. При $\gamma \geq 1$, $\gamma \leq -1$, $|\gamma| < r_i$ верно $\bar{\zeta}(r_i) > 1$, $\bar{\zeta}(r_i) \in$ $\in (1; 1,5]$. Из (15) следует

$$a\left(\bar{\zeta}(r_i) - 1\right) < \bar{\zeta}(r_i)\, c_i - c_j. \tag{П.7}$$

Если $\bar{\zeta}(r_i)c_i - c_j < 0$, то (П.7) не верно для всех $c_i, c_j > 0$; если $\bar{\zeta}(r_i)c_i - c_j > 0$, то пусть $\exists c > 0$: $c < \bar{\zeta}(r_i)\, c_i - c_j$, $c < \max\{c_i, c_j\}$, тогда (П.7) верно при $a(\bar{\zeta}(r_i) - 1) < c \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{1}{\bar{\zeta}(r_i) - 1}$, что противоречит условию $a \gg \max\{c_i, c_j\} > c$. Значит случай $\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} > 0$ при $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} > \bar{\zeta}(r_i)$ исключен. Поскольку $\zeta(r_i) < 1$, то из (15) при $\frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \zeta(r_i)$ следует, что

$$a\left(1 - \zeta(r_i)\right) < c_j - \zeta(r_i)\, c_i. \tag{П.8}$$

По аналогии с (П.7) это исключено. Из (П.7), (П.8) следует, что возможен только случай $\zeta(r_i) < \frac{\alpha_j}{\alpha_i} < \bar{\zeta}(r_i)$, при котором по (15) $\frac{\partial \psi^*}{\partial r_i} < 0$.

Доказательство утверждения 6. Из формулы показателя структуры равновесных действий $\psi^* = \frac{Q_j^*}{Q_i^*}$ следует, что $\psi^* = \frac{Q^* - Q_i^*}{Q_i^*} \Rightarrow Q_i^* = \frac{Q^*}{1+\psi^*}$, $Q_j^* = \frac{\psi^* Q^*}{1+\psi^*}$. Подстановка этих выражений в формулу прибыли (1), а затем в формулу показателя структуры выигрыша дает $\Psi^* = \frac{(a - bQ^* - c_j)\psi^* Q^* - (1+\psi^*)d_j}{(a - bQ^* - c_i)Q^* - (1+\psi^*)d_i}$. Если $P(Q^*) \gg \max\{c_i, c_j\}$, и $P(Q^*)Q^* \gg \max\{d_i, d_j\}$, то $\Psi^* = \frac{(a - bQ^*)\psi^* Q^*}{(a - bQ^*)Q^*} = \psi^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mas-Collel A., Whinston M., Green J.* Microeconom. Theory. N.Y.: Oxford Univer. Press, 1995.
2. *Shapiro C.* Theories of Oligopoly Behavior // Discussion paper 126. Woodrow Wilson School. Princeton Univer. Press, 1987.
3. *Nash J.* Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
4. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838.)
5. *Bowley A.L.* The Mathematical Groundwork of Economics. Oxford: Oxford Univers. Press, 1924.
6. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934.)
7. *Karmarkar U.S., Rajaram K.* Aggregate Production Planning for Process Industries under Oligopolistic Competition // Eur. J. Oper. Res. 2012. No. 223 (3). P. 680–689.
8. *Ledvina A., Sigar R.* Oligopoly Games under Asymmetric Costs and an Application to Energy Production // Math. Financ. Econom. 2012. No. 6(4). P. 261–293.
9. *Currarini S., Marini M.A.* Sequential Play and Cartel Stability in Cournot Oligopoly // Appl. Math. Scie. 2013. No. 7 (1-4). P. 197–200.
10. *Vasin A.* Game-theoretic Study of Electricity Market Mechanisms // Procedia Comput. Sci. 2014. No. 31. P. 124–132.
11. *Sun F., Liu B., Hou F., Gui L., Chen J.* Cournot Equilibrium in the Mobile Virtual Network Operator Oriented Oligopoly Offloading Market // 2016 IEEE Int. Conf. Commun., ICC 2016. No. 7511340.

12. *Lorenczik S., Panke T.* Assessing Market Structures in Resource Markets — An Empirical Analysis of the Market for Metallurgical Coal Using Various Equilibrium Models // Energy Econom. 2016. No. 59. P. 179–187.
13. *Li X., Xu X., Sun Y.* Advance Selling Strategies for Oligopolists by Considering Product Diffusion Effect // Kybernet. 2016. No. 45(5). P. 744–759.
14. *Naimzada A.K., Sbragia L.* Oligopoly Games with Nonlinear Demand and Cost Functions: Two Boundedly Rational Adjustment Processes //Chaos, Solit. Fractal. 2006. No. 29 (3). P. 707–722.
15. *Askar S., Alnowibet K.* Nonlinear Oligopolistic Game with Isoelastic Demand Function: Rationality and Local Monopolistic Approximation // Chaos, Solit. Fractal. 2016. No. 84. P. 15–22.
16. *Naimzada A., Tramontana F.* Two Different Routes to Complex Dynamics in an Heterogeneous Triopoly Game // J. Difference Equat. Appl. 2015. No. 21 (7). P. 553–563.
17. *Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F.* Nonlinear Dynamics and Global Analysis of a Geterogeneous Cournot Duopoly with a Local Monopolistic Approach Versus a Gradient Rule with Endogenous Reactivity // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015 No. 23 (1–3). P. 245–262.
18. *Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I.* Existence of the Nash-Optimal Strategies in the Meta-Game / Ceberio M., Kreinovich V. (eds.). Constraint Programming and Decision Making: Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 100. Springer, Cham, 2018. P. 95–100.
19. *Colacicco R.* Ten Years of General Oligopolistic Equilibrium: A survey // J. Econom. Surveys. 2015. No. 29 (5). P. 965–992.
20. *Jørgensen S., Zaccour G.* A Survey of Dame-theoretic Models of Cooperative Advertising // Eur. J. Oper. Res. 2014. V. 237. No. 1. P. 1–14.
21. *Ino H., Matsumura T.* Welfare-Improving Effect of a Small Number of Followers in a Stackelberg Model // B.E. J. Theoret. Econom. 2016. No. 16 (1). P. 243–265.
22. *Peng Y., Lu Q., Xiao Y.* A Dynamic Stackelberg Duopoly Model with Different Strategies // Chaos, Solitons Fractals. 2016. Vol. 85. P. 128–134.
23. *Hayakawa H.* The Tragedy of the Commons: the Logic of Entry and the Dynamic Process under Ttwo Scenarios // Eurasian Econom. Rev. 2017. No. 7 (3). P. 311–328.
24. *Yoo T.-H., Ko W., Rhee C.-H., Park, J.-K.* The Incentive Announcement Effect of Demand Response on Market Power Mitigation in the Electricity Market // Renewable Sustainable Energy Rev. 2017. No. 76. P. 545–554.
25. *Sherali H.D.* Multiple Leader Stackelberg Model and Analysis // Oper. Res. 1984. No. 32 (2). P. 390–404.
26. *Boyer M., Moreaux M.* Being a Leader or a Follower. Reflections on the Distribution of Roles in Duopoly // Int. J. Industr. Organ. 1987. No. 5(2). P. 175–192.
27. *DeMiguel V., Xu H.* A Stochastic Multiple-leader Stackelberg Model: Analysis, Computation, and Application // Oper. Res. 2009. No. 57 (5). P. 1220–1235.
28. *Julien L.A.* On Noncooperative Oligopoly Equilibrium in the Multiple Leader — follower Game // Eur. J. Oper. Res. 2017. No. 256 (2). P. 650–662.
29. *Solis C.U., Clempner J.B., Poznyak A.S.* Modeling Multileader — Follower Noncooperative Stackelberg Games // Cybernet. Syst. 2017. No. 47 (8). P. 650–673.
30. *Лефевр В.А.* О самоорганизующихся и саморефлексивных системах и их исследовании. Проблемы исследования систем и структур // Матер. конф. М.: Изд-во АН СССР, 1965. С. 61–68.

31. *Lefebvre V.* Reflexive Analysis of Groups (Book Chapter) / Comput. Methods Counterterr. 2009. P. 173–210.
32. *Lefebvre V.* Lectures on the Reflexive Games Theory. N.Y.: Leaf & Oaks Publish., 2010.
33. *Rgo L., Halpern J.* Generalized Solution Concepts in Games with Possibly Unaware Players // Int. J. Game Theory. 2012. No. 41. P. 131–155.
34. *Heifetz A., Meier M., Schipper B.C.* Unawareness, Beliefs, and Speculative Trade // Games Econom. Behavior. 2013. No. 77 (1). P. 100–121.
35. *Alaoui L., Penta A.* Endogenous Depth of Reasoning // Rev. Econom. Studies. 2016. No. 83(4). P. 1297–1333.
36. *Kneeland T.* Coordination under Lmited Depth of Reasoning // Games Econom. Behavior. 2016. No. 96. P. 49–64.
37. *Brocas I., Carrillo J.D., Wang W., Camerer C.F.* Imperfect Choice or Imperfect Attention? Understanding Strategic Thinking in Private Information Games // Rev. Econom. Studies. 2014. No. 81 (3). P. 944–970.
38. *Crawford V.P., Costa-Gomes M.A., Iriberri N.* Structural Models of Nonequilibrium Strategic Thinking: Theory, Evidence, and Applications // J. Econom. Literat. 2013. No. 51 (1). P. 5–62.
39. *Fellner W.* Competition among the Few. N.Y.: Knopf A. 1949.
40. *Korepanov V.O., Novikov D.A.* The Reflexive Partitions Method in Models of Collective Behavior and Control // Autom. Remote Control. 2012. Vol. 73. No. 8. P. 1424–1441.
41. *Chkhartishvili A.G.* Reflexive games: Transformation of Awareness Structure // Autom. Remote Control. 2010. Vol. 71. No. 6. P. 1208–1216.
42. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // Advances Syst. Sci. Appl. 2014. No. 3. P. 254–277.
43. *Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.* Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. No. 49 (32). P. 19–23.
44. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Информационное равновесие в модели динамики коллективного поведения на конкурентном рынке// УБС. 2016. № 64. С. 112–136.
45. *Liu Y., Gao L., Guan J.* Marketing Strategy of Price Competition and Product Differentiation in Duopoly Enterprises with Asymmetric Information // Int. Conf. Servic. Syst. Servic. Management, Proc. of ICSSSM'05. 2005. No. 1. (1499557). P. 665–668.
46. *Gilpatric S.M., Li Y.* Information Value under Demand Uncertainty and Endogenous Market Leadership // Econom. Inquiry. 2015. No. 53 (1). P. 589–603.
47. *Филатов А.Ю.* Неоднородность поведения фирм на олигопольном рынке: стратегические фирмы и ценополучатели // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2015. Т. 13. С. 72—83.
48. *Geraskin M.I., Chkhartishvili A.G.* Structural Modeling of Oligopoly Market under the Nonlinear Functions of Demand and Agents' Costs // Autom. Remote Control. 2017. Vol. 78. No. 2. P. 332–348.
49. *Geraskin M.I., Chkhartishvili A.G.* Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market with Nonlinear Agent Cost Functions // Autom. Remote Control. 2017. Vol. 78. No. 9. P. 1631–1650.
50. *Geraskin M.I.* Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market// Autom. Remote Control. 2018. Vol. 79. No. 5. P. 841–859.

51. *Geraskin M.I.* Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents // Kybernet. 2017. No. 46(6). P. 1052–1067.

52. *Bresnahan T.* Duopoly Models with Consistent Conjectures // Amer. Econom. Rev. 1981. 7 No. 1. P. 934–945.

53. *Гераськин М.И., Бирюкова И.А.* Анализ рефлексивной игры агентов на телекоммуникационном рынке для случая двух рефлексирующих агентов // Актуальные проблемы экономики и права. 2018. Т. 12 (3). С. 468–480.

54. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.

55. *Intriligator M.D.* Mathematical Optimization and Economic Theory. New Jersey. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. 1971.

56. *Balash V., Sidorov S., Faizliev A.* Analysis of news flow dynamics based on the company co-mention network characteristics // Studies in Comput. Intelligence. 2019. No. 813. P. 521–533.

57. *Sidorov S.P., Faizliev A.R., Balash V.A.* A long memory property of economic and financial news flows // Int. J. Data Analysis Techniques Strategies. 2018. No. 10(4). P. 406–420.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 02.02.2018

После доработки 28.03.2019

Принята к публикации 18.07.2019