

Тематический выпуск

© 2020 г. В.М. АБРАМОВ, канд. физ.-мат. наук (vabramov126@gmail.com)

(Университет им. Монаша, Мельбурн, Австралия),

Б.М. МИЛЛЕР, д-р. физ.-мат. наук (bmiller@iitp.ru)

(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;

Университет им. Монаша, Мельбурн, Австралия),

Е.Я. РУБИНОВИЧ, д-р. техн. наук (rubinvch@ipu.rssi.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),

П.Ю. ЧИГАНСКИЙ, канд. техн. наук (pchiga@mssc.huji.ac.il)

(Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль)

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ В РАБОТАХ Р.Ш. ЛИПЦЕРА¹



2 января 2019 г. от нас ушел дорогой друг и коллега Роберт Швидчиков Липцер (1936–2019). Долгие годы он был членом редакционной коллегии журнала “Автоматика и телемеханика”, и во многом благодаря его усилиям журнал стал одним из ведущих в России в области теории и практики управления. В настоящий памятный выпуск включены публикации его учеников и коллег, посвященные основным направлениям работы Р.Ш. Липцера в области стохастического управления. Данная статья

¹ Данный памятный сборник включает работы коллег и учеников Р.Ш. Липцера, охватывающие основные направления его деятельности в области стохастического анализа и его приложений в различных областях статистики, управления, теории массового обслуживания и финансовой математики. Публикация работ сборника будет продолжена в № 4, 2020.

является вводной, и ее цель показать основные этапы творческой биографии Р.Ш. Липцера, продемонстрировать его вклад в развитие теории стохастического управления и статистики случайных процессов и показать его влияние на развитие теории стохастического управления в России и за рубежом.

Ключевые слова: случайные процессы, фильтрация, стохастическое управление.

DOI: 10.31857/S0005231020030010

1. Основные этапы жизни и творчества

Роберт Шевичевич Липцер родился 20 марта 1936 г. на Украине в городе Кировограде. С 1953 по 1959 гг. он учился в Московском авиационном институте, где получил квалификацию инженера-электромеханика по специальности “Авиационные прицелы”. После окончания института, до 1962 г. он работал на заводе Министерства авиационной промышленности в городе Калининграде Московской области (ныне город Королев). Однако любовь к математике привела его в 1961 г. на вечернее отделение мехмата МГУ, где его научным руководителем, а позднее его коллегой и соавтором стал Альберт Николаевич Ширяев, плодотворное сотрудничество с которым продолжалось затем долгие годы. Следующим этапом стал переход в 1962 г. на работу в Институт проблем управления РАН, называвшийся в те годы Институтотом автоматки и телемеханики, где он прошел все ступени от старшего инженера до начальника сектора. В 1990 г. Р.Ш. Липцер был приглашен в Институт проблем передачи информации РАН на должность заведующего лабораторией стохастических систем, где проработал до 1993 г., и затем переехал с семьей в Израиль. Там он получил место профессора факультета систем управления (electrical engineering) Тель-Авивского университета, где и состоял до своей кончины 2 января 2019 г.

2. Основные направления исследований

На своей странице университетского сайта в середине 90-х гг. Р.Ш. Липцер перечисляет основные направления деятельности и текущие проекты. Следует отметить, что они включают многие современные направления стохастического анализа. С тех пор область его интересов только расширялась.

Основные направления исследований:

- Аппроксимация в задачах фильтрации.
- Большие отклонения.
- Диффузионная аппроксимация в системах массового обслуживания.
- Аппроксимация в задачах стохастического управления.
- Теория мартигалов.
- Умеренные отклонения в задачах диффузионной аппроксимации.
- Робастная диффузионная аппроксимация в задачах нелинейной фильтрации.
- Умеренные отклонения для случайно возбуждаемых динамических систем.

- Нелинейная фильтрация с “загрязнением”.
- Асимптотическая оптимальность для задач стохастического управления с использованием диффузионной аппроксимации.
- Принцип усреднения Боголюбова для семимартингалов.
- Умеренные уклонения для семимартингалов.
- Модель Бенеша с зависимостью от состояния с быстрой загрузкой и скоростью отклика.

За время своей работы Р.Ш. Липцер опубликовал 10 монографий и более 100 статей в самых престижных журналах по теории вероятностей и случайным процессам. Далее остановимся на наиболее значимых результатах Р.Ш. Липцера в этой области, поскольку описать его вклад во все разделы теории вероятностей и случайных процессов в рамках короткой заметки не представляется возможным.

Отметим, что данный выпуск продолжает традицию памятных изданий, посвященных деятельности ученых, оказавших существенное влияние на развитие математики и ее приложений. Сборник, посвященный 60-летию юбилею Р.Ш. Липцера, был издан в 1997 г. [1].

2.1. Теория условно-гауссовских процессов

Работы по фильтрации условно-гауссовских процессов значительно расширили теорию оценивания случайных процессов, позволив распространить принципы калмановской фильтрации на задачи со случайными матричными коэффициентами, зависящими от наблюдений. Кроме того, они обогатили теорию нелинейной фильтрации диффузионных процессов [2–4], позволив не только установить теоремы разделения в задачах управления с неполной информацией, но и открыть новые подходы к решению задач управления наблюдениями, в частности совместного управления наблюдаемым и ненаблюдаемым процессами [5].

В 1968 г. Р.Ш. Липцер защитил кандидатскую диссертацию на факультете радиотехники и кибернетики Московского физико-технического института, основу которой как раз и составили его результаты по фильтрации условно-гауссовских диффузионных процессов, а в 1974 г. опубликовал совместно с А.Н. Ширяевым монографию [6]. Эта книга и ее перевод стали настольными для российских и зарубежных специалистов в области статистики случайных процессов и теории стохастического управления.

2.2. Развитие теории мартингалов

Работы в области фильтрации стали базой для перехода к глубокому изучению теории мартингалов, что позволило перенести идеи калмановской фильтрации на более широкий класс дискретно-непрерывных случайных процессов [7]. С середины 70-х гг. работы Р.Ш. Липцера посвящены детальному исследованию процессов этого класса. Были доказаны теоремы, описывающие, в частности, сходимости и свойства предельных процессов [8].

Ряд работ по прикладной теории вероятностей привели к получению ключевых результатов в области статистики случайных процессов. В серии работ,

выполненных совместно с Ю.М. Кабановым и А.Н. Ширяевым, были получены фундаментальные результаты по абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер, выведены эффективные формулы для вычисления плотностей Радона–Никодима [9, 10], доказаны теоремы по представлению целочисленных мер и локальных мартингалов [11] с помощью случайных мер с детерминированными компенсаторами, и найдены условия контигуальности и полной асимптотической разделимости последовательностей вероятностных мер [12]. Эти результаты вместе с центральной предельной теоремой для семимартингалов [13, 14] вошли в монографию [15], которая совместно с упомянутой книгой [6] “образует наивысшее достижение в развитии парадигмы современного стохастического анализа и является стандартом для ссылок в данной области”, как отмечалось в [1].

Естественным развитием работ по теории мартингалов была теория больших и “умеренных” уклонений для семимартингалов. В этой области, которая получила свое развитие во многом благодаря работам Р.Ш. Липцера, была получена целая серия замечательных и неожиданных результатов. Отметим, что здесь он работал совместно с коллегами из России, Израиля и Австралии [16–19].

2.3. Приложения теории мартингалов в задачах статистики и управления

2.3.1. Методы диффузионной аппроксимации

В цикле работ, в которых использовались методы диффузионной аппроксимации, Р.Ш. Липцер с коллегами показал, как теория мартингалов может эффективно использоваться в различных прикладных задачах. Общая теория сходимости семимартингалов к процессам диффузионного типа была заложена еще в первых работах, посвященных данной тематике [20], в дальнейшем эти результаты были с успехом применены к различным типам непрерывных [21] и скачкообразных процессов [22]. Методы диффузионной аппроксимации были применены и к задачам анализа вычислительных процессов и сетей связи вычислительных машин [23], к методам передачи данных по каналам связи и системам массового обслуживания [24], к анализу решения задач оптимального стохастического управления [26], к случайным процессам с отражением [25] и к задачам разорения [27]. Эти работы демонстрируют блестящие способности Р.Ш. Липцера в использовании тонких математических подходов при решении прикладных проблем.

2.3.2. Приближенные методы в вырожденных задачах управления и фильтрации

Со времени появления фильтра Калмана в непрерывном времени было известно, что условие невырожденности матрицы шумов в наблюдениях необходимо для написания уравнений фильтра в замкнутом виде. Однако в дискретном времени ситуация оказывается проще: все решается заменой обратной матрицы шумов на псевдообратную. Как впервые показал Р.Ш. Липцер, аналогичное свойство имеет место и в непрерывном времени, но лишь

при выполнении специального условия согласованности [28]. В то же время аналогия между задачей фильтрации и задачей решения системы линейных уравнений методом наименьших квадратов позволила построить как эффективные алгоритмы псевдообращения матриц [30], так и алгоритмы решения плохо обусловленных систем линейных уравнений [29]. Интересное применение этих методов оказалось возможным и в задачах передачи данных по каналам с беспомеховой обратной связью [31].

2.4. Работа в Тель-Авивском университете

2.4.1. Задачи теории массового обслуживания

В начале 1990-х гг. Роберт Липцер получил приглашение от Якова Когана из Хайфского Техниона для работы над проектом по вычислительным сетям массового обслуживания. Работа над проектом успешно завершилась публикациями [32, 33], которые основаны на использовании стохастического исчисления: теории мартингалов и стохастических дифференциальных уравнений. Среди важных технических элементов здесь следует отметить применение принципа отражения Скорохода и стохастических уравнений для описания длин очередей, для которых впоследствии, собственно, и использовались мартингаловые методы. Эти уравнения, являющиеся стохастическими аналогами уравнений Колмогорова–Чепмена, применялись в [32] впервые. Их важность заключается в том, что они могут использоваться (и в дальнейшем использовались) для случайных процессов в случайных средах – новом современном направлении, пронизывающем все области теории случайных процессов. В связи с этими результатами Р.Ш. Липцер в дальнейшем имел неоднократные приглашения в Bell Laboratory для работы со специалистами в области теории сетей обслуживания.

2.4.2. Оптимальное управление и фильтрация

Узнав, что Роберт Липцер находится в Израиле, им заинтересовались в Тель-Авивском университете. В результате переговоров и необходимых процедур Роберт получил позицию профессора университета на инженерном факультете в департаменте инженерных систем. В Тель-Авивском университете Роберт работал как со специалистами из инженерного факультета, где он непосредственно работал, так и со специалистами из математического департамента. Он также сотрудничал с учеными из Техниона. Среди его соавторов были З. Шус, В.З. Бобровский, О. Зейтуни и др. В свой израильский период Роберт продолжал работать преимущественно в двух основных тематиках: теория оптимального управления и фильтрации и вероятности больших отклонений стохастических процессов.

2.4.3. Задачи оценивания детерминированного гладкого сигнала

В ряде публикаций [35–39] Робертом и его коллегами изложены результаты о задаче оценки детерминированного гладкого сигнала в малом белом шуме. Это классическая задача непараметрической статистики, для которой известна точная асимптотика убывания оптимальной минимаксной ошибки.

Наилучшая скорость убывания достигается различными оценками, включая ядерные со специальным образом подобранными параметрами ядра. Основное новшество этих работ состояло в том, что оптимальная скорость оказалась достижима односторонними ядрами, которые могут реализовываться линейной динамической системой, действующей на входящий поток наблюдений последовательно по мере их поступления. Такое свойство имеет большое практическое преимущество, например в системах слежения с ограниченными вычислительными ресурсами за подвижными целями.

2.4.4. Устойчивость уравнений фильтрации

В другой серии публикаций [40–42] изучалась задача устойчивости по начальному условию для уравнений оптимальной нелинейной фильтрации. Оптимальный фильтр в общем случае представляет собой бесконечномерную нелинейную стохастическую динамическую систему на пространстве вероятностных мер. Ее устойчивость по различным параметрам, включая начальное распределение сигнала, интересна не только с чисто математической точки зрения, но и является важным фактором при построении практических систем, таких как многочастичные фильтры. В [40–42] был разработан подход, опирающийся на вероятностные свойства условных математических ожиданий, в то время как в предыдущих публикациях по данной тематике в основном использовался аппарат функционального анализа. Новый взгляд на эту задачу позволил лучше понять механизмы устойчивости уравнений фильтрации. В частности, оказалось, что вопреки устоявшимся представлениям и некоторым предыдущим ошибочным результатам, устойчивости самого сигнала может быть недостаточно для устойчивости фильтра. С другой стороны, было доказано, что информативность наблюдений, в некотором смысле, влечет за собой устойчивость без каких-либо дополнительных предположений.

2.4.5. Принцип больших уклонений

В этот же период Роберт Липцер продолжал изучение вероятностей больших уклонений в функциональных пространствах. Плодами его исследований, иногда совместных с рядом коллег, стало множество результатов, описание которых, к сожалению, не представляется возможным в рамках краткого биографического очерка. Упомянем лишь статью [43], в которой изучается поведение системы стохастических дифференциальных уравнений с быстрой и медленной компонентами. В [43] получен совместный Принцип больших уклонений (ПБУ) для траекторий и оккупационной меры медленной и быстрой компонент соответственно. Это один из первых результатов в изучении ПБУ в динамических системах с различными временными шкалами.

В Тель-Авивском университете под руководством Р.Ш. Липцера были написаны кандидатские и мастерские диссертации, включая работы его аспирантов В. Абрамова [34], П. Чиганского [19] и Л. Голдентайера [38, 39]. При этом его помощь во многих случаях не ограничивалась только научной стороной дела, но бывало, что и касалась затрудненного личного положения соискателей. Во всех таких ситуациях студенты все же успешно завершали свою научную работу с Р.Ш. Липцером и впоследствии с благодарностью его

вспоминали. Отметим, что, работая в Тель-Авивском университете, Роберт продолжал поддерживать тесные контакты с давними коллегами за рубежом, в том числе, конечно же, и в России.

2.4.6. Работа с зарубежными коллегами

Роберт Липцер не был “сухим” математиком, и к числу его постоянных увлечений стоит отнести и горные лыжи, и велопоходы, но, как правило, он проводил свободное от преподавания время в различных университетах по всему миру, где занимался совместными исследованиями с принимавшими его учеными или давал специальные курсы по тематике своих научных интересов. Здесь следует упомянуть Университет г. Падуа (Италия), где Р. Липцер работал с профессором Рунгалдиером, Wain State University в Детройте, США, где он работал с Р.З. Хасьминским. Однако одним из наиболее примечательных мест, куда Роберт Липцер приезжал почти каждый год, был университет им. Монаша (Monash University) в штате Виктория в Австралии. С этим университетом Роберт поддерживал весьма тесные контакты, работая совместно с профессором Ф. Клебанером. Отметим, что диссертационная работа одного из докторантов Роберта из Тель-Авивского университета, Л. Голдентауэра, выполнялась при тесном сотрудничестве со специалистами университета им. Монаша и завершилась публикацией [39]. При участии Роберта в математическом департаменте университета им. Монаша также выполнялись диссертационные работы. Одна из таких работ, выполненная докторантом А. Лим, опубликована в [44]. В университете им. Монаша для сотрудников университета Роберт провел цикл лекций по большим и умеренным отклонениям. Он также проводил семинары и консультировал сотрудников по многим направлениям работ в области теории случайных процессов. Семинары под руководством Р. Липцера и в России и за рубежом, пользовались неизменным вниманием. Их посещали как маститые, так и молодые ученые, для многих из которых это было началом знакомства с теорией стохастического управления, статистики и теории мартингалов. Возможно, именно это обстоятельство позволило многим из них получить впоследствии профессорские и административные позиции в российских и зарубежных исследовательских центрах. Думается, что влияние Роберта Липцера, его научная цельность и добросовестность были и остаются для всех примером настоящего ученого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Statistics and Control of Stochastic Processes. The Liptser Festschrift / Ed. Kabanov Yu.M., Rozovskii B.L., Shiryaev A.N. World Scientific. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1997.
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов // Тр. МИАН СССР. 1968. № 104. С. 135–180.
Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Nonlinear filtration of diffusion Markov processes // Proc. Steklov Inst. Math. 1968. No. 104. P. 163–218.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих процессам диффузионного типа, относительно винеровской // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 4. С. 847–889.

Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. On the absolute continuity of measures corresponding to processes of diffusion type relative to a Wiener measure // *Math. USSR-Izv.* 1072. V. 36. No. 4. P. 839–882.

4. *Липцер Р.Ш.* Условно-гауссовские случайные процессы // *Пробл. передачи информ.* 1974. Т. 10. № 2. С. 75–94.

Liptser R.Sh. Conditionally Gaussian Random Processes // *Problems Inform. Transmission.* 1974. V. 10. No. 2. P. 151–167.

5. *Кузнецов Н.А., Липцер Р.Ш., Серебровский А.П.* Оптимальное управление и обработка информации в непрерывном времени (линейная система, квадратичный функционал) // *АиТ.* 1980. № 10. С. 47–53.

Kuznetsov N.A., Liptser R.Sh., Serebrovskii A.P. Optimal control and information processing in continuous time (a linear system and quadratic functional) // *Autom. Remote Control.* 1980. V. 41. No. 10. P. 1369–1374.

6. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Statistics of Random Processes. New York: Springer, 1979.

7. *Липцер Р.Ш.* Гауссовские мартингалы и обобщение фильтра Калмана-Бьюси // *Теория вероятн. и ее примен.* 1975. Т. 20. № 2. С. 292–308.

Liptser R.Sh. Gaussian martingales and a generalization of the Kalman-Bucy filter // *Theory Probab. Appl.* 1976. V. 20. No. 2. P. 285–301.

8. *Липцер Р.Ш.* О представлении локальных мартингалов // *Теория вероятн. и ее примен.* 1976. Т. 21. № 4. С. 718–726.

Liptser R.Sh. On a representation of local martingales // *Theory Probab. Appl.* 1977. V. 21. No. 4. P. 698–705.

9. *Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений. I // *Матем. сб.* 1978. Т. 107(149). № 3(11). С. 364–415.

Kabanov Yu.M., Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability distributions. I // *Math. USSR-Sb.* 1979. V. 35. No. 5. P. 631–680.

10. *Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений. II // *Матем. сб.* 1979. Т. 108(150). № 1. С. 32–61.

Kabanov Yu.M., Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. Absolute continuity and singularity of locally absolutely continuous probability distributions. II // *Math. USSR-Sb.* 1980. V. 36. No. 1. P. 31–58.

11. *Кабанов Ю.М., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* О представлении целочисленных случайных мер и локальных мартингалов с помощью случайных мер с детерминированными компенсаторами // *Матем. сб.* 1980. Т. 111(153). № 2. С. 293–307.

Kabanov Yu.M., Liptser R.Sh., Shiryaev A.N. On the representation of integral-valued random measures and local martingales by means of random measures with deterministic compensators // *Math. USSR-Sb.* 1981. V. 39. No. 2. P. 267–280.

12. *Липцер Р.Ш., Пукельшейм Ф., Ширяев А.Н.* О необходимых и достаточных условиях контигуальности и полной асимптотической разделимости вероятностных мер // *УМН.* 1982. Т. 37. № 6(228). С. 97–124.

Liptser R.Sh., Pukel'sheim F., Shiryaev A.N. Necessary and sufficient conditions for contiguity and entire asymptotic separation of probability measures // *Russian Math. Surveys.* 1982. V. 37. No. 6. P. 107–136.

13. *Луццер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов // Теория вероятн. и ее примен. 1980. Т. 25. № 4. С. 683–703.
Liptser R.Sh., Shiryayev A.N. A functional central limit theorem for semimartingales // Theory Probab. Appl. 1981. V. 25. No. 4. P. 667–688.
14. *Луццер Р.Ш., Ширяев А.Н.* О необходимых и достаточных условиях в функциональной центральной предельной теореме для семимартингалов // Теория вероятн. и ее примен. 1981. Т. 26. № 1. С. 132–137.
Liptser R.Sh., Shiryayev A.N. Necessary and sufficient conditions for the functional central limit theorem for semimartingales // Theory Probab. Appl. 1981. V. 26. No. 1. P. 130–135.
15. *Луццер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.
Liptser R.Sh., Shiryayev A.N. Theory of Martingales. Amsterdam: Kluwer, 1989.
16. *Луццер Р.Ш.* Большие отклонения для эмпирических мер марковских процессов (дискретное время, некомпактный случай) // Теория вероятн. и ее примен. 1996. Т. 41. № 1. С. 65–88.
Liptser R.Sh. Large deviations for occupation measures of Markov processes: discrete time, noncompact case // Theory Probab. Appl. 1997. V. 41. No. 1. P. 35–54.
17. *Клебанер Ф.К., Луццер Р.Ш.* Большие отклонения для рекуррентных последовательностей с последствием // Пробл. передачи информ. 1996. Т. 32. № 4. С. 23–34.
Klebaner F.K., Liptser R.Sh. Large Deviations for Past-Dependent Recursions // Problems Inform. Transmission. 1996. V. 32. No. 4. P. 320–330.
18. *Гулинский О.В., Липтсер Р.Ш.* An example of large deviations for a stationary process // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 1. С. 211–225.
Gulinsky O.V., Liptser R.Sh. An example of large deviations for a stationary process // Theory Probab. Appl. 2000. V. 44. No. 1. P. 201–217.
19. *Луццер Р.Ш., Чиганский П.* Умеренные отклонения для процесса диффузионного типа в случайной среде // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54. № 1. С. 39–62.
Liptser R.Sh., Chigansky P. Moderate Deviations for a Diffusion-Type Process in a Random Environment // Theory Probab. Appl. 2010. V. 54. No. 1. P. 29–50.
20. *Луццер Р.Ш., Ширяев А.Н.* О слабой сходимости семимартингалов к стохастически непрерывным процессам с независимыми и условно независимыми приращениями // Матем. сб. 1981. Т. 116(158). № 3(11). С. 331–358.
Liptser R.Sh., Shiryayev A.N. On weak convergence of semimartingales to stochastically continuous processes with independent and conditionally independent increments // Math. USSR-Sb. 1983. V. 44. No. 3. P. 299–323.
21. *Луццер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Слабая сходимость последовательности семимартингалов к процессу диффузионного типа // Матем. сб. 1983. Т. 121(163). № 2(6). С. 176–200.
Liptser R.Sh., Shiryayev A.N. Weak convergence of a sequence of semimartingales to a process of diffusion type // Math. USSR-Sb. 1984. V. 49. No. 1. P. 171–195.
22. *Кабанов Ю.М., Луццер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Слабая и сильная сходимость распределений считающих процессов // Теория вероятн. и ее примен. 1983. Т. 28. № 2. С. 288–319.
Kabanov Yu.M., Liptser R.Sh., Shiryayev A.N. Weak and strong convergence of distributions of counting processes // Theory Probab. Appl. 1984. V. 28. No. 2. P. 303–336.

23. Коган Я.А., Липцер Р.Ш., Смородинский А.В. Гауссовская диффузионная аппроксимация марковских замкнутых моделей сетей связи ЭВМ // Пробл. передачи информ. 1986. Т. 22. № 1. С. 49–65.
Kogan A.Ya., Liptser R.Sh., Smorodinskii A.V. Gaussian Diffusion Approximation of Closed Markov Models of Computer Networks // Problems Inform. Transmission. 1986. V. 22. No. 1. P. 38–51.
24. Кричагина Е.В., Липцер Р.Ш., Пухальский А.А. Диффузионная аппроксимация для системы с входным потоком, зависящим от очереди, и произвольным обслуживанием // Теория вероятн. и ее примен. 1988. Т. 33. № 1. С. 124–135.
Krichagina E.V., Liptser R.Sh., Puhalskii A.A. Diffusion Approximation for Queue with Inter-Arrive Sequence Depending on Queue and with Arbitrary Service // Theory Probab. Appl. 1988. V. 33. No. 1. P. 114–124.
25. Анулова С.В., Липцер Р.Ш. Диффузионная аппроксимация для процессов с нормальным отражением // Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. № 3. С. 417–430.
Anulova S.V., Liptser R.Sh. Diffusion approximation for processes with normal reflection // Theory Probab. Appl. 1990. V. 35. No. 3. P. 411–423.
26. Липцер Р., Рунггалдиер В., Таксар М. Диффузионная аппроксимация и оптимальное стохастическое управление // Теория вероятн. и ее примен. 1999. Т. 44. № 4. С. 705–737.
Liptser R., Runggaldier W.J., Taksar M.I. Diffusion approximation and optimal stochastic control // Theory Probab. Appl. 2000. V. 44. No. 4. P. 669–698.
27. Клебанер Ф.К., Липцер Р.Ш. Диффузионная модель разорения. Асимптотический анализ // Теория вероятн. и ее примен. 2010. Т. 55. № 2. С. 350–357.
Klebaner F.K., Liptser R.Sh. Asymptotic analysis of ruin in CEV model // Theory Probab. Appl. 2011. V. 55. No. 2. P. 291–297.
28. Липцер Р.Ш. Уравнения почти оптимального фильтра Калмана при особенной матрице ковариаций шума в наблюдениях // АиТ. 1974. Т. 1. С. 35–41.
Liptser R.Sh. Equations of near-optimal Kalman filter with a singular matrix of noise covariations in observations // Autom. Remote Control. 1974. V. 35. No. 1. P. 29–35.
29. Жуковский Е.Л., Липцер Р.Ш. О рекуррентном способе вычисления нормальных решений линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 4. С. 843–857.
Zhukovskii E.L., Liptser R.Sh. A recurrence method for computing the normal solutions of linear algebraic equations // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1972. V. 12. No. 4. P. 1–18.
30. Жуковский Е.Л., Липцер Р.Ш. О вычислении псевдообратных матриц // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 2. С. 489–492.
Zhukovskii E.L., Liptser R.Sh. The computation of pseudoinverse matrices // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1975. V. 15. No. 2. P. 198–202.
31. Липцер Р.Ш. Оптимальное кодирование и декодирование при передаче гауссовского марковского сигнала по каналу с бесшумной обратной связью // Пробл. передачи информ. 1974. Т. 10. № 4. С. 3–15.
Liptser R.Sh. Optimal Encoding and Decoding for Transmission of a Gaussian Markov Signal in a Noiseless-Feedback Channel // Problems Inform. Transmission. 1974. V. 10. No. 4. P. 279–288.
32. Коган Я., Липцер Р.Ш. Limit non-stationary behavior of large closed queueing networks with bottlenecks // Queueing Systems Theory Appl. 1993. V. 14. P. 33–55.

33. *Kogan Y., Liptser R.Sh., Shenfild M.* State dependent Benes buffer model with fast loading and output rates // *Ann. Appl. Probab.* 1995. No. 5. P. 97–120.
34. *Abramov V., Liptser R.* On existence of limiting distribution for time-nonhomogeneous countable Markov process // *Queueing Syst.* 2004. V. 46. No. 3–4. P. 353–361.
35. *Chow P.-L., Khasminskii R., Liptser R.* Tracking of signal and its derivatives in Gaussian white noise // *Stochastic Process. Appl.* 1997. V. 69. No. 2. P. 259–273.
36. *Chow P.-L., Khasminskii R., Liptser R.* On estimation of time dependent spatial signal in Gaussian white noise // *Stochastic Process. Appl.* 2001. V. 96. No. 1. P. 161–175.
37. *Луцкер Р.Ш., Хасъминский Р.З.* Слежение за гладкой функцией регрессии // *Теория вероятн. и ее примен.* 2002. Т. 47. № 3. С. 567–575.
Liptser R.Sh., Khas'minskii R.Z. Online estimation of a smooth regression function // *Theory Probab. Appl.* 2003. V. 47. No. 3. P. 541–550.
38. *Goldentayer L., Liptser R.* On-line tracking of a smooth regression function // *Stat. Inference Stoch. Process.* 2006. V. 9. No. 1. P. 17–30.
39. *Голдентаер Л., Клебанер Ф.К., Луцкер Р.Ш.* Слежение за функцией волатильности // *Пробл. передачи информ.* 2005. Т. 41. № 3. С. 32–50.
Goldentayer L., Klebaner F.K., Liptser R.Sh. Tracking the Volatility Function // *Problems Inform. Transmission.* 2005. V. 41. No. 3. P. 212–229.
40. *Baxendale P., Chigansky P., Liptser R.* Asymptotic stability of the Wonham filter: ergodic and nonergodic signals // *SIAM J. Control Optim.* 2004. V. 43. No. 2. P. 643–669.
41. *Chigansky P., Liptser R.* Stability of nonlinear filters in nonmixing case // *Ann. Appl. Probab.* 2004. V. 14. No. 4. P. 2038–2056.
42. *Chigansky P., Liptser R.* On a role of predictor in the filtering stability // *Electron. Comm. Probab.* 2006. No. 11. P. 129–140.
43. *Liptser R.* Large deviations for two scaled diffusions // *Probab. Theory Related Fields.* 1996. V. 106. No. 1. P. 71–104.
44. *Klebaner F., Lim A., Liptser R.* FCLT and MDP for stochastic Lotka-Volterra model // *Acta Applicandae Mathematicae.* 2007. V. 97. No. 1–3. P. 53–68.
45. *Клебанер Ф.К., Луцкер Р.Ш.* Когда стохастическая экспонента является мартингалом. Развитие метода Бенеша // *Теория вероятн. и ее примен.* 2013. Т. 58. № 1. С. 53–80.
Klebaner F.K., Liptser R.Sh. When a stochastic exponential is a true martingale. Extension of the Beneš method // *Theory Probab. Appl.* 2014. V. 58. No. 1. P. 38–62.
46. *Liptser R.* Beneš condition for discontinuous exponential martingale // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* 2011. Т. 396. С. 144–154.
Liptser R. Beneš condition for discontinuous exponential martingale // *J. Math. Sci.* 2013. V. 188. No. 6. P. 717–723.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 17.07.2019

Принята к публикации 26.09.2019