© 2020 г. **А.А. БУТОВ, д-р физ.-мат. наук (butov.a.a@gmail.com)**
(Ульяновский государственный университет)

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПРОДУКТИВНЫХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ ПО ПРИНЦИПУ «ТОЧНО В СРОК»

Рассматриваются распределенные системы процессов "точно в срок". Даны описания таких процессов в терминах точечных (считающих) процессов. Сформулированы и решены задачи оценивания времени завершения и времени выполнения операций для распределенной системы однородных продуктивных процессов "точно в срок". Математическая модель и доказательства приведены в мартингальных терминах.

Ключевые слова: продуктивная система, время выполнения операций, мартингальные методы, случайное блуждание, "точно в срок", оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231020030022

1. Введение

Настоящая работа является в некотором смысле логическим продолжением [1]. Здесь (в мартингальных терминах [2]) рассматриваются стохастические системы, реализующие достаточно известный принцип "точно в срок". Примеры таких систем включают в себя производственные системы "точно в срок", педагогические стратегии обучения, методы лечения, а также методы компиляции в компьютерном программировании (см. литературу в [1]). Получивший распространение термин "точно в срок" в настоящее время является устоявшимся и восходит к описанию производственной системы Toyota в [3]. Также необходимо отметить, что (в отличие от финансовой математики, рассматривающей преимущественно распределительные, по сути игровые, с точки зрения теории вероятностей задачи) исследованиям стохастических продуктивных систем в последнее время посвящается увеличивающееся количество работ (см., например, [4, 5] и ссылки в них).

Рассмотрим описание продуктивных систем "точно в срок" в терминах точечных считающих процессов. Предполагается, что в таких системах должно быть выполнено некоторое целое число операций $K \geqslant 1$ к фиксированному моменту времени $T > 0$ (при начале отсчета времени с нулевого момента). Это означает, что в каждый момент $t \in [0, T]$ количество оставшихся для выполнения операций равно X_t, т.е. числу K за вычетом значения B_t процесса, считающего числа выполнений, и плюс A_t — возвращенные на переработку или доработку операции (см. в [6] пример подобного описания технологических процессов, но не "точно в срок"). В простом случае без возвращений и при однородном процессе выполнения описание продуктивного процесса X представляет собой так называемый пуассоновский мост [7, 8] и в обратном времени соответствует пуассоновскому процессу при условии, что его значение в момент времени T равно точно K (см., например, [9, 10]).

В работе приводятся определения процессов “точно в срок” в терминах как распределений, так и интенсивностей скачков точечных процессов. Показано, что интенсивности бесконечно возрастают к программному (запланированному) моменту выполнения продуктивного процесса. Рассматриваются системы, в которых выполнение операций завершается до некоторого момента, вообще говоря a priori не известного. Такие системы (называемые здесь распределенными системами “точно в срок”) формализованы в терминах семейств случайных блужданий. Для распределенных продуктивных систем приводятся выражения интенсивностей скачков. Из этих выражений следует, что распределенная система процессов “точно в срок” сама, вообще говоря, может и не обладать свойством “точно в срок”. Однако если она этим свойством обладает, то при ее наблюдении (как и при наблюдении одиночного процесса “точно в срок”), завершение операций выполнения наступает строго до запрограммированного момента выполнения. В связи с этим возникает задача оценивания момента выполнения по наблюдениям значений продуктивного процесса X_t. Задачи такого типа достаточно востребованы. Например, в геронтологии не утихают дискуссии о запрограммированной или потенциально бесконечной видовой продолжительности жизни (т.е. отсутствует понимание возможности бесконечного носителя распределенной системы при финитных носителях “распределяемых” процессов), см., например, [11, 12]. Также, актуальной остается задача определения видовой продолжительности жизни однородной когорты, к которой в распределенной системе и принадлежит наблюдаемый индивидуум с известным временем “завершения жизненного цикла”. Аналогичные задачи известны при моделировании процессов жизненного цикла в моделях систем лесоводства, сельскохозяйственных и ряда технических (для которых изначально не устанавливается верхний предел эксплуатации или развития). По-прежнему интерес представляет задача последовательного оценивания момента завершения процесса “точно в срок” при наблюдаемом продуктивном процессе. Предлагаемая работа посвящена задачам последовательного оценивания времени завершения продуктивного процесса и параметров случайного блуждания с поглощением, характеризующего время выполнения операций (что в определенном смысле является продолжением задач оценивания параметров случайной среды по наблюдаемым блужданиям [13]). Описания задач и их решения выполнены в мартингальных терминах. Доказательства всех не являющихся очевидными результатов приведены в Приложении.

2. Определение процессов “точно в срок”

Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ снабжено неубывающим непрерывным справа потоком σ-алгебр $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, пополненным по мере $\mathbf{P}$ (т.е. выполняются условия Деллашери [2, 14]). Рассмотрим на стохастическом базисе $\mathbf{B} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ процесс случайного блуждания $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ с начальным значением $X_0 = K \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, с регулярными траекториями из пространства Скорохода и значениями $X_t \in \{0, 1, 2, \ldots, K\}$. Для скачков предполагается, что $\Delta X_t = X_t - X_{t-} \in \{-1, 0, 1\}$, т.е. переходы случайного блуждания осуществляются только в ближайшие состояния. Очевидно, процесс X может единственным образом быть представлен (см., например, [15–18]) в следующем виде:

$$X = X_0 + A - B = K + A - B,$$

где точечные процессы $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$ и $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ являются считающими количества положительных и отрицательных скачков X соответственно: при всех $t \geqslant 0$ $\mathbf{P}$-п.н.

$$A_t = \sum_{0<s\leqslant t} \mathbb{I}\{\Delta X_s = 1\}, \quad B_t = \sum_{0<s\leqslant t} \mathbb{I}\{\Delta X_s = -1\}$$

при нулевых начальных значениях $A_0 = B_0 = 0$ (здесь и далее $\mathbb{I}\{\cdot\}$ — индикаторная функция, т.е. $\mathbb{I}\{\text{true}\} = 1$, $\mathbb{I}\{\text{false}\} = 0$). Введем следующие определения.

Определение 1. Процесс $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ назовем продуктивным, $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ процессом выполнения (операций) и $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$ — процессом возвращений.

Продуктивный процесс заключается в выполнении K запланированных операций, и X_t в каждый момент времени $t \geqslant 0$ соответствует числу оставшихся невыполненными операций. При этом количество собственно выполнений B_t может оказываться больше K, если число возвращений A_t (например на доработку, как это показано в прикладной работе [6]) оказывается положительным.

Определение 2. Марковский момент τ, определенный на стохастическом базисе $\mathbf{B}$ и являющийся моментом достижения нулевого значения продуктивным процессом X, называется моментом завершения:

$$\tau = \inf\{t > 0\colon X_t = 0\}, \quad \text{где} \quad \inf\{\varnothing\} = +\infty. \tag{1}$$

В настоящей работе рассматриваются продуктивные процессы только “с одним циклом выполнения”, т.е. нулевое состояние является поглощающим для X: $X_t = 0$ при всех $t \geqslant \tau$.

Определение 3. Продуктивный процесс конечен, если $\mathbf{P}\{\tau < \infty\} = 1$, т.е. τ — момент остановки на стохастическом базисе $\mathbf{B}$.

Определение 4. Конечный продуктивный процесс называется “точно в срок” (или процессом “точно в срок u”), если существует число $u \in (0, \infty)$ такое, что

$$\mathbf{P}\{\tau \leqslant u\} = 1, \tag{2}$$

$$\mathbf{P}\{\tau > t\} > 0 \quad \text{для любого} \quad t \in [0, u). \tag{3}$$

Определение 5. Если $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ — конечный продуктивный процесс “точно в срок u”, то величину u назовем временем выполнения продуктивного процесса.

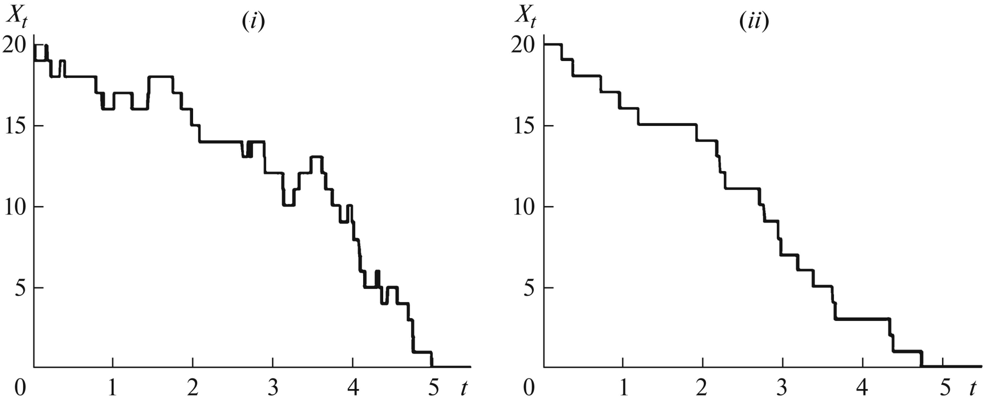

Рис. 1. Траектории продуктивного процесса “точно в срок u” $X^u = (X^u_t)_{t\geqslant 0}$ с $u = 5$ и $K = 20$; i — процесс с возвращениями, ii — без возвращений.

Пример 1. На рис. $1, i$ приведен график траектории продуктивного процесса $X = X^u = (X^u_t)_{t\geqslant 0}$ “точно в срок u” со временем выполнения $u = 5$ и начальным значением $K = 20$. Процесс возвращений A порожден пуассоновским процессом π с компенсатором $\widetilde{\pi}_t = 2{,}0 \cdot t$: $A_t = \int_0^t \mathbb{I}\{1 \leqslant X_{s-} \leqslant K-1\}\, d\pi_s$. Точечный процесс выполнения B имеет компенсатор, обеспечивающий конечность продуктивного процесса “точно в срок u”: $\widetilde{B}_t = \int_0^t (K - X_s) \frac{1}{u-s} \mathbb{I}\{s<u\} ds$. На рис. $1, ii$ представлен график траектории продуктивного процесса без возвращений (т.е. $A_t = 0$ при всех $t \geqslant 0$). Траектории процессов получены в результате имитационного компьютерного моделирования.

Для момента остановки τ, отвечающего конечному продуктивному процессу, определена функция распределения $F_\tau(t) = \mathbf{P}\{\tau \leqslant t\}$, и поэтому условия (2) и (3) могут быть представлены как

$$F_\tau(u) = 1, \tag{4}$$

$$F_\tau(t) < 1 \quad \text{для любого} \quad t \in [0, u). \tag{5}$$

Не ограничивая общности, для упрощения изложения в настоящей работе предполагаем, что все рассматриваемые далее функции распределения абсолютно непрерывны, имеют носитель в $[0, +\infty)$ и, следовательно, имеют соответствующие плотности вероятностей (например, $F_\tau(x) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $F_\tau(x) = \int_0^x \rho_\tau(t)\, dt$ при $x > 0$).

Исследования процессов “точно в срок” оказываются удобными на основе традиционных описаний характеристик интенсивностей процессов завершения продуктивных процессов, поскольку именно в этих терминах рассматриваются модели завершаемых событий (например, смертности, разрушения) в биологии или демографии, а также в современных описаниях рисков для сложных технических систем. При этом для момента τ на базисе $\mathbf{B}$ определяется процесс “одного скачка” $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$:

$$N(t) = \mathbb{I}\{\tau \leqslant t\} \tag{6}$$

с $N(0) = 0$ и $\lim_{t\to\infty} N(t) = 1$ $\mathbf{P}$-п.н. По теореме Деллашери разложение Дуба-Мейера на базисе $\mathbf{B}^N = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}^N = (\mathscr{F}_t^N)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ с $\mathscr{F}_t^N = \sigma\{N_s; s \leqslant t\}$ (т.е. в минимальном представлении) имеет вид

$$N(t) = \widetilde{N}(t) + m^N(t).$$

Здесь $m^N = (m^N(t))_{t\geqslant 0}$ — мартингал на стохастическом базисе $\mathbf{B}^N$, а $\widetilde{N} = (\widetilde{N}(t))_{t\geqslant 0}$ — компенсатор (неубывающий предсказуемый процесс) с

$$\widetilde{N}(t) = \int\limits_0^t h(s)\mathbb{I}\{s < \tau\}\, ds,$$

где интенсивность $h(t)$ скачков процессов N (известная в моделях разрушения как “hazard rate”, а в демографических и биологических описаниях называемая “смертность”) определяется следующими выражениями:

$$h(t) = \frac{\rho_\tau(t)}{1 - F_\tau(t)} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^t h(s)\, ds = -\ln(1 - F_\tau(t)). \tag{7}$$

Из (4)–(5) и (7) вытекает очевидное утверждение для “точно в срок” в терминах интенсивностей скачков

Предложение 1. Процесс X является “точно в срок u”, если выполняются следующие два условия:

$$\int\limits_0^u h(s)\, ds = \infty, \quad \int\limits_0^t h(s)\, ds < \infty \quad \textit{для любого} \quad t \in [0, u).$$

Это предложение оказывается полезным не только в качестве критерия свойства “точно в срок”, но и при анализе распределенных продуктивных процессов.

3. Распределенные системы продуктивных процессов “точно в срок”

Рассмотрим систему множественных продуктивных процессов “точно в срок u” со случайным временем выполнения и некоторым заданным распределением значений u. Формализовать такую систему можно следующим образом. На стохастическом базисе $\mathbf{B}$ зададим множество независимых случайных процессов $\mathscr{X} = \{X^u; u > 0\}$. Пусть при каждом $u > 0$ процесс $X^u = (X_t^u)_{t\geqslant 0}$ является конечным продуктивным процессом “точно в срок u” с моментом завершения, определяемым аналогично (1),

$$\varsigma(u) = \inf\{t > 0\colon X_t^u = 0\} \tag{8}$$

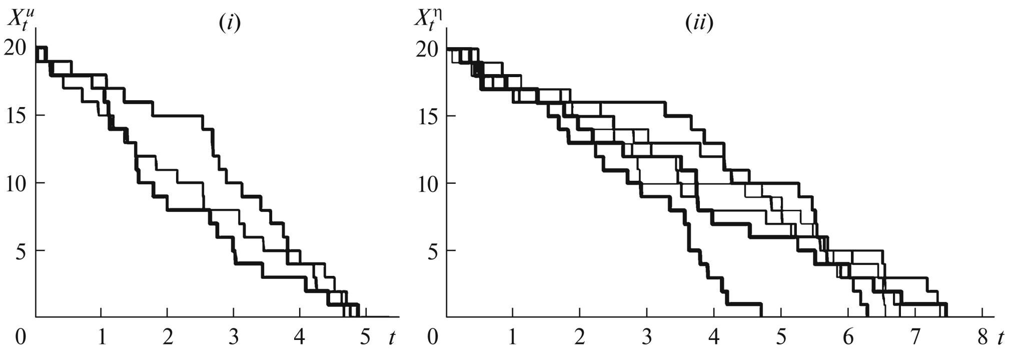

Рис. 2. Продуктивные процессы без возвращений с $K = 20$; i — 3 траектории процесса “точно в срок u” $X^u = (X_t^u)_{t\geqslant 0}$ с $u = 5$; ii — 6 траекторий распределенного процесса $X^\eta = (X_t^\eta)_{t\geqslant 0}$ с η, равномерно распределенной на [5, 8].

с соответствующей функцией распределения $F_{\varsigma(u)}(t;u)$ и плотностью $\rho_{\varsigma(u)}(t;u)$. Для описания распределения параметра u зададим строго положительную $\mathscr{F}_0$-измеримую случайную величину $\eta = \eta(\omega), \omega \in \Omega$, с функцией распределения $F_\eta(t)$ и плотностью распределения $\rho_\eta(t)$ (при этом $\mathbf{P}\{\eta < \infty\} = 1$, $\rho_\eta(t) = 0$ при $t < 0$ и $F_\eta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$). Предполагается, что η и семейство $\mathscr{X}$ независимы. Значения случайной величины η рассматриваются в качестве моментов выполнения u для соответствующих элементов семейства $\mathscr{X}$. Тогда распределенный продуктивный процесс $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ определяется как $X = X^\eta = (X_t^\eta)_{t\geqslant 0}$, $X^{\eta(\omega)} \in \mathscr{X}$, $\omega \in \Omega$.

Очевидно, продуктивный процесс X также является конечным, но необязательно “точно в срок”. Момент его завершения определяется (1) и (8) и равен $\tau = \varsigma(\eta)$. Для момента τ и интенсивности $h(t)$, характеризующейся в соответствии с (7) его распределением, справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 2. При $t \geqslant 0$

$$h(t) = \frac{1}{1 - F_\tau(t)} \int\limits_t^\infty \rho_{\varsigma(u)}(t;u)\rho_\eta(u)\,du, \tag{9}$$

где

$$F_\tau(t) = F_\eta(t) + \int\limits_t^\infty F_{\varsigma(u)}(t;u)\rho_\eta(u)\,du. \tag{10}$$

Простым следствием предложения 2 является следующее утверждение, позволяющее “разделить” классы продуктивных систем на группу с процессами “точно в срок” и группу процессов, траектории которых с положительной вероятностью имеет сколь угодно большой момент завершения.

У т в е р ж д е н и е 1. Конечный продуктивный процесс $X = X^\eta = (X_t^\eta)_{t\geqslant 0}$, $X^{\eta(\omega)} \in \mathscr{X}$, $\omega \in \Omega$, *для которого момент выполнения — случайная величина* $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, *с функцией распределения* $F_\eta(t)$, *является “точно в* *срок" тогда и только тогда, когда плотность распределения $\rho_\eta(t)$ имеет компактный носитель (т.е. существует такое конечное число $T > 0$, что $F_\eta(T) = 1$).*

Пример 2. Рассмотрим иллюстративный пример, позволяющий сопоставить продуктивные системы "точно в срок u" и распределенные системы. На рис. 2 приведены графики продуктивного процесса без возвращений с начальным значением $K = 20$. Рисунок $2, j$ представляет три траектории продуктивного процесса $X^u = (X_t^u)_{t \geqslant 0}$ "точно в срок u" с моментом выполнения $u = 5$ (компенсатор процесса выполнения описан в примере 1). На рис. $2, jj$ показаны шесть траекторий процесса $X^\eta = (X_t^\eta)_{t \geqslant 0}$, но с моментом выполнения, представляющим собой равномерно распределенную на $[5, 8]$ случайную величину $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Для наглядности траектории (полученные в имитационной компьютерной модели) изображены линиями различной толщины.

4. Задачи оценивания для простых распределенных систем "точно в срок"

4.1. Описания однородных процессов без возвращений

Рассматриваются системы простых (или однородных) процессов "точно в срок" без возвращения (т.е. процесс возвращений равен нулю: $A_t = 0$ при всех $t \geqslant 0$ и $X = X_0 - B = K - B$). Процесс выполнений $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ представляет собой пуассоновский мост [7, 8]. Таким образом, продуктивный процесс $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ может рассматриваться как пуассоновский процесс в обратном времени (см., например, [9, 10]) при условии его терминального значения, равного $K \in \mathbb{N}$ (в чем, собственно, и заключается "однородность" выполнения операций и соответствующего продуктивного процесса). Как показано в [1] на основе работ [7–10], такой однородный процесс X "точно в срок T" имеет минимальное семимартингальное представление $X = K + \widetilde{X} + m^X$ (где $\widetilde{X}$ — компенсатор, а m^X — мартингал) с

$$X_t = K - \int_0^t X_s \cdot \frac{1}{T-s} \mathbb{I}\{s < T\}\, ds + m_t^X, \tag{11}$$

где параметр T — время выполнения процесса X (т.е. X — "точно в срок T"). Описания состояний такого процесса достаточно просты. Запись балансовых уравнений для $\mathbb{I}\{X_t = i\}$, $0 \leqslant i \leqslant K$, оказывается аналогичной рассмотренным в [15–18]. Из их анализа следует лемма, позволяющая анализировать распределение процесса X.

Лемма 1. Для однородного продуктивного процесса "точно в срок T" с минимальным представлением (11) *при каждом $0 \leqslant i \leqslant K$ выполняется*

$$\mathbf{P}\{X_t = i\} = C_K^i \left(\frac{T-t}{T}\right)^i \left(\frac{t}{T}\right)^{K-i}, \quad \text{где} \quad C_K^i = \frac{K!}{i!(K-i)!}. \tag{12}$$

4.2. Оценивание времени выполнения

Довольно естественной для рассматриваемых процессов является следующая задача оценивания.

Задача 1. Пусть конечный продуктивный процесс X — однородный продуктивный "точно в срок T" процесс без возвращений с семимартингальным представлением (11). По наблюдениям $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X)_{t\geqslant 0}$ с $\mathscr{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leqslant t\}$ необходимо построить оценку $\mathbf{E}(\tau|\mathscr{F}_t^X)$.

Развитием этой задачи служит

Задача 2. Найти оценку $\mathbf{E}(\tau|\mathscr{F}_t^X)$ для распределенного процесса $X = X^\eta = (X_t^\eta)_{t\geqslant 0}$, $X^{\eta(\omega)} \in \mathscr{X}$, $\omega \in \Omega$, где каждый из независимых процессов $X^u = (X_t^u)_{t\geqslant 0} \in \mathscr{X}$ — однородный продуктивный "точно в срок u" процесс без возвращений с семимартингальным представлением (11) (естественно, с заменой T на u). Распределение момента выполнения $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, независимого с $\mathscr{X}$, предполагается с функцией распределения $F_\eta(x)$ и плотностью $\rho_\eta(x)$.

Заметим, что момент завершения τ (см. (1)) продуктивного процесса "точно в срок T" строго меньше, чем время выполнения: $\mathbf{P}\{\tau < T\} = 1$ (это следует из (2) и того, что $\mathbf{P}\{\tau = T\} = 0$ для непрерывной функции распределения $F_\tau(x)$). Поэтому "наблюдения" $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X)_{t\geqslant 0}$ с $\mathscr{F}_t^X = \sigma\{X_s; s \leqslant t\}$ не позволяют установить величину времени выполнения T. В связи с этим возникает следующая

Задача 3. Пусть конечный продуктивный процесс X является распределенным: $X = X^\eta = (X_t^\eta)_{t\geqslant 0}$, $X^{\eta(\omega)} \in \mathscr{X}$, $\omega \in \Omega$, где каждый из независимых процессов $X^u = (X_t^u)_{t\geqslant 0} \in \mathscr{X}$ — однородный "точно в срок u", без возвращений, с представлением (11) (с заменой T на u). Распределение момента $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, независимого с $\mathscr{X}$, имеет функцию распределения $F_\eta(x)$ и плотность $\rho_\eta(x)$. Необходимо найти функцию распределения $\widehat{F_\eta}(x;t) = \mathbf{P}\{\eta \leqslant x|X_t\}$ момента η при условии наблюдения X_t или, что эквивалентно, $\widehat{\rho_\eta}(x;t) = d\widehat{F_\eta}(x;t)/dx$. Также необходимо определить $\mathbf{E}(\eta|X_t)$.

Перед решением этих задач приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2. Пусть X — процесс "точно в срок T" с семимартингальным представлением (11). *Момент τ, определенный в* (1), *имеет функцию распределения и плотность, равные* 0 *при $t < 0$, а также*

$$F_\tau(t) = (t/T)^K \quad \textit{при} \quad t \in [0,T], \qquad F_\tau(t) = 1 \quad \textit{при} \quad t > T, \tag{13}$$

$$\rho_\tau(t) = Kt^{K-1}T^{-K} \quad \textit{при} \quad t \in (0,T), \qquad \rho_\tau(t) = 0 \quad \textit{при} \quad t > T. \tag{14}$$

Следствие 1.

$$\mathbf{E}\tau = \frac{K}{K+1}T. \tag{15}$$

Решением задачи 1 служит

Теорема 1. Для продуктивного процесса "точно в срок T" последовательная оценка $\widehat{\tau}_t(T) = \mathbf{E}(\tau|\mathscr{F}_t^X)$ равна

$$\widehat{\tau}_t(T) = \tau\mathbb{I}\{\tau \leqslant t\} + \left(t\frac{1}{X_t+1} + T\frac{X_t}{X_t+1}\right)\mathbb{I}\{\tau > t\}\mathbb{I}\{T > t\}. \tag{16}$$

Решение задачи 2 предварим рассмотрением задачи 3. Представим его в виде следующей леммы, имеющей и самостоятельный интерес.

Лемма 3. Плотность распределения $\widehat{\rho_\eta}(x;t)$ при условии наблюдения X_t, построенная для случайного момента выполнения η с плотностью $\rho_\eta(x)$, имеет вид

$$\begin{aligned}\widehat{\rho_\eta}(x;t) = \sum_{i=1}^{K} \frac{(x-t)^i x^{-K} \rho_\eta(x) \mathbb{I}\{t<x\}}{\int_t^\infty (s-t)^i s^{-K} \rho_\eta(s)\,ds} \mathbb{I}\{X_t = i\} + \\ + \frac{\left(\mathbb{I}\{t \geqslant x\} + t^K x^{-K}\right) \rho_\eta(x)}{F_\eta(t) + \int_t^\infty t^K s^{-K} \rho_\eta(s)\,ds} \mathbb{I}\{X_t = 0\}.\end{aligned} \tag{17}$$

На основе этой леммы формулируется простое

Утверждение 2. Для оценки η справедливо: $\mathbf{E}(\eta|X_t) = \int_0^\infty s\widehat{\rho_\eta}(s;t)\,ds$, где $\widehat{\rho_\eta}(x;t)$ определяется в лемме 3.

Поскольку процесс X марковский, то $\mathbf{E}(\tau|\mathscr{F}_t^X) = \mathbf{E}(\tau|X_t)$. Следовательно, результат (17) приводит также и к решению задачи 2.

Теорема 2. Оценка времени завершения τ распределенного однородного продуктивного процесса при наблюдении X и известной плотности распределенного момента выполнения $\rho_\eta(x)$ равна

$$\mathbf{E}(\tau|X_t) = \tau\mathbb{I}\{\tau \leqslant t\} + \int_t^\infty (t + X_t s)\rho_\eta(s;t)\,ds \frac{\mathbb{I}\{\tau > t\}}{X_t + 1}, \tag{18}$$

где $\widehat{\rho_\eta}(x;t)$ определена в (17).

5. Заключение

Полученные в работе результаты заключаются не только в описании математической модели и формулировке ряда оценок. Интерес представляют приведенные в Приложении доказательства, выполненные мартингальными методами. Они могут быть легко обобщены, например, при известных описаниях вероятностей состояний процессов $\mathbf{P}\{X_t = i\}$ (здесь указанных для простого однородного случая в лемме 1).

Заметим, что наряду с рассмотренными задачами представляются интересными математические описания и анализ мультивариантных процессов “точно в срок”. Отметим, что не исследованы предельные распределения нормированных процессов. Задачам оптимального управления системами “точно в срок” и “почти точно в срок” посвящена пока только одна работа [1] и только для однородного процесса. Также в настоящее время не исследована система процессов “точно в срок” с разладками.

Поскольку рассматриваемые объекты и предложенные задачи актуальны во многих приложениях, а их математическая формализация находится в начальной стадии выполнения даже для простых схем, то анализ мартингальными методами процессов “точно в срок” (и систем таких процессов) представляется перспективным.

Доказательство свойства 2. Рассмотрим разбиение $\mathscr{D} = \{D_1, D_2\}$, где $D_1 = \{\tau > t\}$ и $D_2 = \{\tau \leqslant t\}$. Тогда для любых $t \geqslant 0$ и $\Delta > 0$ вероятность события $A = \{\tau \in (t, t+\Delta]\}$ при условии σ-алгебры $\mathscr{F}_t^N = \sigma\{N_s; s \leqslant t\}$, определенной для N в (6), совпадает с вероятностью при условии этого разбиения

$$\mathbf{P}\left\{A|\mathscr{F}_t^N\right\} = \mathbf{P}\{A|\mathscr{D}\}\mathbb{I}\{D_1\}. \tag{П.1}$$

Однако для правой части (П.1) справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{A|\mathscr{D}\}\mathbb{I}\{D_1\} = \frac{\mathbf{P}\{A \cap D_1\}}{\mathbf{P}\{D_1\}}\mathbb{I}\{D_1\}. \tag{П.2}$$

При этом $\mathbf{P}\{D_1\} = 1 - F_\tau(t)$, а $\mathbf{P}\{A \cap D_1\} = \mathbf{E}\{\mathbf{P}(A \cap D_1|\eta)\}$. Поскольку $\mathbf{P}(A \cap D_1|\eta) = \mathbf{P}(A|\eta)\mathbb{I}\{D_1\}$, а $\mathbf{P}(A|\eta)\mathbb{I}\{D_1\} = \{F_{\varsigma(\eta)}(t+\Delta;\eta) - F_{\varsigma(\eta)}(t;\eta)\}\mathbb{I}\{D_1\} = \Delta\rho_{\varsigma(u)}(t;\eta)\mathbb{I}\{D_1\} + o(\Delta)$, то $\mathbf{P}(A \cap D_1) = \Delta\int_0^\infty \rho_{\varsigma(u)}(t;u)\rho_\eta(u)\,du + o(\Delta)$. С учетом того, что для каждого процесса $X^u \in \mathscr{X}$ “точно в срок u” выполняется равенство $\rho_{\varsigma(u)}(t;u) = 0$ при всех $u \leqslant t$, получаем соотношение

$$\mathbf{P}(A \cap D_1) = \Delta\int_t^\infty \rho_{\varsigma(u)}(t;u)\rho_\eta(u)\,du + o(\Delta). \tag{П.3}$$

Заметим, что $\mathbf{P}\{A|\mathscr{F}_t^N\} = \Delta h(t)\mathbb{I}\{D_1\} + o(\Delta)$. Отсюда, а также из (П.1)–(П.3) следует (9). Равенство (10) следует из того, что $F_\tau(t) = \mathbf{E}\{\mathbf{P}(\varsigma(\eta) \leqslant t|\eta)\} = \mathbf{E}F_{\varsigma(\eta)}(t)$ и что “точно в срок u” $F_{\varsigma(u)}(t;u) = 1$ при всех $t \leqslant u$

$$F_{\varsigma(\eta)}(t) = \int_0^\infty F_{\varsigma(u)}(t;u)\rho_\eta(u)\,du = \int_0^t 1\cdot\rho_\eta(u)\,du + \int_0^\infty F_{\varsigma(u)}(t;u)\rho_\eta(u)\,du,$$

так как первое слагаемое в правой части равняется $F_\eta(t)$. Предложение 2 доказано.

Доказательство леммы 1. Балансовые уравнений для $\mathbb{I}\{X_t = i\}$, $0 \leqslant i \leqslant K$, имеют вид

$$\mathbb{I}\{X_t = i\} = \begin{cases} 1 - \displaystyle\int_0^t \mathbb{I}\{X_{s-} = K\}\,dB_s, & \text{если} \quad i = K,\\ \displaystyle\int_0^t (\mathbb{I}\{X_{s-} = i+1\} - \mathbb{I}\{X_{s-} = i\})\,dB_s, & \text{если} \quad 1 \leqslant i < K,\\ \displaystyle\int_0^t \mathbb{I}\{X_{s-} = 1\}\,dB_s, & \text{если} \quad i = 0. \end{cases} \tag{П.4}$$

Поскольку для компенсатора процесса выполнения B из (11) справедливо $d\widetilde{B_s} = \{X_s/(T-s)\}ds$, то из (П.4) получаем

$$
\text{(П.5)}\quad \mathbb{I}\{\widetilde{X_t = i}\} = \begin{cases} 1 - \int\limits_0^t \mathbb{I}\{X_{s-} = K\} \dfrac{K}{T-s}\, ds, & \text{если } i = K, \\ \int\limits_0^t \left(\mathbb{I}\{X_{s-} = i+1\} \dfrac{i+1}{T-s} - \mathbb{I}\{X_{s-} = i\} \dfrac{i}{T-s}\right) ds, & \text{если } 1 \leqslant i < K, \\ \int\limits_0^t \mathbb{I}\{X_{s-} = 1\} \dfrac{1}{T-s}\, ds, & \text{если } i = 0. \end{cases}
$$

Обозначим искомые вероятности $p_t(i) = \mathbf{P}\{X_t = i\} = \mathbf{E}\mathbb{I}\{X_t = i\}$. Тогда из (П.5) получаем линейную систему уравнений

$$
\text{(П.6)}\qquad p_t(i) = \begin{cases} 1 - \int\limits_0^t p_s(K) \dfrac{K}{T-s}\, ds, & \text{если } i = K, \\ \int\limits_0^t \left(p_s(i+1) \dfrac{i+1}{T-s} p_s(i) = i \ \dfrac{i}{T-s}\right) ds, & \text{если } 1 \leqslant i < K, \\ \int\limits_0^t p_s(1) \dfrac{1}{T-s}\, ds, & \text{если } i = 0. \end{cases}
$$

То, что (12) является решением (П.6), проверяется по индукции. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Момент τ для процесса $(X_t)_{t \geqslant 0}$ совпадает с моментом первого скачка $\phi = \inf\{v > 0\colon Y_v = 0\}$ в обратном времени $v = T - t$ процесса $(Y_v)_{0 \leqslant v \leqslant T}$ с $Y_v = X_t$ (конструкции соответствующих замен фильтраций и характеристик процесса приведены в [9, 10], а также в [7, 8]). Такой процесс является пуассоновским мостом со следующим представдением при $0 \leqslant v \leqslant T$:

$$
Y_v = \int\limits_0^v (K - Y_r) \frac{1}{T-r} \mathbb{I}\{r < T\}\, dr + M_v^Y,
$$

где M^Y — соответствующий мартингал. По теореме Деллашери для функции распределения момента первого скачка ϕ выполняется соотношение $dF_\phi(v)/(1 - F_\phi(v)) = K dv/(T - v)$. Следовательно, $F_\phi(v) = 1 - (T - v)^K/T^K$. Из равенства $F_\tau(x) = F_\phi(T - x)$ получаем (13). Его дифференцирование дает (14). Лемма 2 доказана.

Доказательство следствия 1. Поскольку $\mathbf{E}\tau = \int_0^\infty t\rho_\tau(t)\, dt$, то из леммы 2 следует (15). Следствие 1 доказано.

Доказательство теоремы 1. Заменой начального значения времени на t, величины K на X_t и $\mathscr{F}_0^X$ на $\mathscr{F}_t^X$ при $T > t$ получаем из (15), что $\mathbf{E}\left\{\tau\mathbb{I}\{\tau > t\}|\mathscr{F}_t^X\right\} = \left\{\frac{X_t}{X_t+1}(T-t)+t\right\}\mathbb{I}\{\tau > t\}$. Отсюда вытекает (16). Теорема доказана.

Доказательство леммы 3. Обозначим для $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i \leqslant K$ и $j = 0, 1, 2, \ldots$ вспомогательные множества $B_i = \{X_t = i\}$ и $D_j = D_j(n) = \left\{\eta = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right)\right\}$. Поскольку абсолютно непрерывная (по x) функция $F_\eta(x;t)$ при каждом t монотонна и ограниченна, то она равномерно непрерывна. Поэтому для плотности распределения $\widehat{\rho_\eta}(x;t)$ выполняется следующее соотношение:

$$\widehat{\rho_\eta}(x;t) = \lim_{j=[x\cdot n], n\to\infty} \sum_{i=0}^{K} \frac{\mathbf{P}\{D_j|B_i\}}{1/n}\mathbb{I}\{X_t = i\}. \tag{П.7}$$

Условную вероятность в (П.7) представим по формуле Байеса в виде

$$\lim_{j=[x\cdot n], n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{D_j|B_i\}}{1/n} = \lim_{j=[x\cdot n], n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\{B_i|D_j\}\mathbf{P}\{D_j\}n}{\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{P}\{B_i|D_r\}\mathbf{P}\{D_r\}} = \tag{П.8}$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{P}\{B_i|D_r\}\mathbf{P}\{D_r\}\right)^{-1} \lim_{j=[x\cdot n], n\to\infty}\mathbf{P}\{B_i|D_j\} \lim_{j=[x\cdot n], n\to\infty}\mathbf{P}\{D_j\}n.$$

Найдем каждый из сомножителей в правой части (П.8). Для последнего, очевидно, выполняется следующее равенство:

$$\lim_{j=[x\cdot n], n\to\infty}\mathbf{P}\{D_j\}n = \rho_\eta(x). \tag{П.9}$$

Из того, что $\{X_t = 0\}$ при $\eta \leqslant t$, а также из (12) в лемме 1 получаем:

$$\lim_{j=[x\cdot n], n\to\infty}\mathbf{P}\{B_i|D_j\} = \mathbb{I}\{i=0\}\mathbb{I}\{t \geqslant x\} + C_K^i\left(\frac{x-t}{x}\right)^i\left(\frac{t}{x}\right)^{K-i}\mathbb{I}\{t < x\}. \tag{П.10}$$

Аналогично (П.9) и (П.10) для интегральной суммы имеем равенство

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{P}\{B_i|D_r\}\mathbf{P}\{D_r\} = \mathbb{I}\{i=0\}\int\limits_0^t \rho_\eta(s)\,ds + \tag{П.11}$$
$$+\int\limits_t^\infty C_K^i\left(\frac{s-t}{s}\right)^i\left(\frac{t}{s}\right)^{K-i}\rho_\eta(s)\,ds.$$

Подставив выражения (П.9)–(П.11) в (П.8) и затем в (П.7), получаем выражение (17). Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $\mathbf{E}(\tau|X_t) = \mathbb{I}\{\tau \leqslant t\}\tau = +\mathbb{I}\{\tau > t\}\int_t^\infty \widehat{\tau}_t(s)\widehat{\rho_\eta}(s;t)\,ds$, где $\widehat{\tau}_t(s)$ определяется в теореме 1, а плотность $\widehat{\rho_\eta}(s;t)$ — в лемме 3, очевидно получаем выражение (18). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Butov A.A., Kovalenko A.A.* Stochastic models of simple controlled systems just-in-time // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 3. С. 518–531.
2. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.
3. *Sugimori Y., Kusunoki K., Cho F., Uchikawa S.* Toyota production system and kanban system materialization of just-in-time and respect-for-human system // Int. J. Product. Res. 1977. V. 15. No. 6. P. 553–564.
4. *Pan X., Li S.* Optimal control of a stochastic production-inventory system under deteriorating items and environmental constraints // Int. J. Product. Res. 2015. V. 53. No. 2. P. 607–628.
5. *Fazlirad A., Freiheit T.* Application of Model Predictive Control to Control Transient Behavior in Stochastic Manufacturing System Models // J. Manufactur. Sci. Engineer. 2016. V. 138. No. 8. 081007. P. 1–15.
6. *Полянсков Ю.В., Бутов А.А., Железнов О.В.* Имитационная дискретно-событийная стохастическая модель процесса разработки и согласования конструкторско-технологической документации на авиастроительном предприятии // Изв. Самар. науч. центра Росс. акад. наук. 2014. Т. 16. № 1–5. С. 1568–1572.
7. *Privault N., Zambrini J-C.* Markovian bridges and reversible diffusion processes with jumps // Ann. de l'I.H.P. Probab. et statist. 2004. V. 40. No. 5. P. 599–633.
8. *Conforti G., Leonard C., Murr R., Roelly S.* Bridges of Markov counting processes. Reciprocal classes and duality formulas // Electron. Communicat. Probab. 2015. V. 20. No. 18. P. 1–12.
9. *Jacod J., Protter P.* Time Reversal on Levy Processes // Ann. Probab. 1988. V. 16. No. 2. P. 620–641.
10. *Elliott R. J., Tsoi A. H.* Time reversal of non-Markov point processes // Ann. l'I.H.P. Probabilités et statistiques. 1990. V. 26. No. 2. P. 357–373.
11. *Blagosklonny M.V.* Aging is not programmed: genetic pseudo-program is a shadow of developmental growth // Cell Cycle. 2013. V. 12. No. 24. P. 3736–3742.
12. *Kowald A., Kirkwood T.B.L.* Can aging be programmed? A critical literature review // Aging Cell. 2016. V. 15. No. 6. P. 986–998.
13. *Бутов А. А.* Некоторые задачи статистики случайных сред при наблюдаемых процессах размножения и гибели // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова: Статистика и управление случайными процессами. 1993. Т. 202. С. 25–32.

    Butov A.A. Some random environments statistical problems for observable birth-and-death processes // Proc. Steklov Instit. Math.-AMS. Statist. Control Theory Stochast. Proc. 1994. V. 202. P. 19–26.
14. *Dellacherie C.* Capacités et processus stochastiques. Berlin: Springer, 1972. / Пер. Деллашери К. Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1975.
15. *Бутов А.А.* Некоторые оценки для одномерного процесса размножения и гибели в случайной среде // Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36. № 3. С. 561–565.

    Butov A.A. Some estimates for a one-dimensional birth and death process in a random environment // Theory Probab. Appl. 1991. V. 36. No. 3. P. 578–583.
16. *Бутов А.А.* Мартингальные методы изучения случайных блужданий в одномерной случайной среде // Теория вероятностей и ее применения. 1994. Т. 39. № 4. С. 681–698.

    Butov A.A. Martingale methods for random walks in a one-dimensional random environment // Theory Probab. Appl. 1994. V. 39. No. 4. P. 558–572.

17. *Butov A.A.* Random walks in random environments of a general type // Stochast. Stochast. Reports. 1994. V. 48. No. 3-4. P. 145–160.
18. *Butov A.A.* On the problem of optimal instant observations of the linear birth and death processes // Statist. Probability Lett. V. 101. P. 49–53.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 12.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019