Автоматика и телемеханика, № 3, 2020

© 2020 г. А.Ю. ВЕРЕТЕННИКОВ, д-р физ.-мат. наук
(A.Veretennikov@leeds.ac.uk)
(Университет Лидса, Великобритания;
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики;
Институт проблем передачи информации, Москва)

О СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ СИЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫХ СДУ[1]

С помощью преобразования Гирсанова установлены существование, единственность по распределению и свойство локального перемешивания слабых решений сильно вырожденных стохастических дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, слабое решение, слабая единственность, локальное перемешивание, преобразование Гирсанова.

DOI: 10.31857/S0005231020030034

1. Введение

В последние две декады XXI в. возрос интерес к обширному классу вырожденных и сильно вырожденных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) типа Ланжевена – Смолуховского, см., например, [1, 2], как конечномерных, так и бесконечномерных (однако последние в данной работе не будут рассматриваться); среди работ, связанных с приложениями, см., в частности, [3–5]. Причин для этого было, видимо, несколько. Одна из них, наиболее существенная, состоит в том, что все механические, а также электромеханические системы, находящиеся под воздействием случайных сил, являются по необходимости вырожденными, как минимум, с одной степенью вырождения (см. ниже). Сильно вырожденные системы с большей степенью вырождения естественным образом возникают в ансамбле взаимосвязанных частиц или приборов, где лишь на один или на малое их количество действуют случайные силы, которые могут (возможно, приближенно) быть представлены белым шумом (производной винеровского процесса, возможно с диффузионным коэффициентом), а остальным случайные воздействия передаются через связи между частицами, моделируемые "обычными" уравнениями динамических систем, т.е. обыкновенными дифференциальными уравнениями без шума. Поскольку такие системы могут иметь негладкие коэффициенты, — к примеру, так дело обстоит практически всегда в задачах оптимального управления, — представляется весьма желательным иметь достаточно общие результаты о существовании и единственности решений таких уравнений.

[1] Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100"; часть работы, относящаяся к теореме 3, поддержана грантом Российского Научного Фонда (проект № 17-11-01098).
This study has been funded by the Russian Academic Excellence Project "5-100"; the part related to the theorem 3 was funded by the Russain Science Foundation (project no. 17-11-01098).

Помимо классического случая с достаточно регулярными коэффициентами (непрерывными, или удовлетворяющими условию Липшица), в котором вырожденность не является проблемой, слабые решения частично вырожденных СДУ были ранее исследованы в [6], а затем сильные решения — в [7], и совсем недавно сильные решения были изучены в [8–10]; см. также ссылки в упомянутых работах.

Тут необходимо отметить эпохальную работу [11], а также статью [12]. Хотя в обоих трудах исследовался невырожденный случай, из дальнейшего будет ясно, что развитые в них методы частично могут быть применены и в вырожденных ситуациях, и техника данной работы с ними тесно связана. Можно сказать, что в [12] выполнена часть программы, намеченной Гирсановым. А именно, условие ограниченности коэффициента сноса, используемое в [11], было заменено в [12] менее ограничительным условием его не более чем линейного роста по фазовой переменной (отметим, что в [12] были решены и другие задачи), и было показано, что такого условия достаточно для применимости преобразования Гирсанова. Подчеркнем еще раз, что в [12] (как и в [11]) коэффициент диффузии предполагаться невырожденным. Подход Гирсанова продемонстрировал свою силу во многих работах его последователей. В частности, он применялся и к некоторым вырожденным СДУ, однако, как правило, при условии ограниченного сноса (либо без этого ограничения, но и при отсутствии полной строгости рассмотрения). Цель настоящей работы — дальнейшее развитие этого подхода в применении к некоторому классу сильно вырожденных диффузионных процессов. Двумерный случай с единичной диффузией в невырожденной компоненте изучался в [13], и некоторые обобщения были сформулированы в [14, 15], хотя без подробного обоснования результатов, касающихся вопросов локального перемешивания.

Настоящая работа также связана идейно со статьей [16], в которой исследовалась более общая мартингальная постановка. При этом данная работа отличается от процитированных выше либо постановкой, либо иной применяемой техникой, либо тем и другим. В частности, кроме как в теореме 3, не предполагается, что коэффициент системы “без b” имеет линейную форму, и не накладывается условие Хёрмандера во всем пространстве. Для теоремы 2 одним из основных примеров — хотя и не единственно возможным — является условие Липшица на коэффициент сноса f по фазовой переменной x, являющееся более ограничительным по сравнению с условиями в [1, 8, 10], но в то же время не требуется никакая добавочная непрерывность по Гельдеру производных $\partial f_i/\partial x_{i+1}$, которая использовалась в данных работах (где нумерация координат обратна к нашей, так что в их обозначениях дополнительная гладкость формулировалась в виде $\partial f_i/\partial x_{i-1} \in H_\alpha$). Также, здесь не доказываются и не используются никакие оценки на переходные плотности процесса X, кроме как в теореме 3, и только лишь для системы “без b”; применяемый здесь подход можно считать более элементарным. В то же время, стоит сказать, что в большинстве упомянутых работ решены и другие задачи, которые в настоящей работе не рассматриваются. С другой стороны, постановка задачи в настоящей работе включает несимметричные, неквадратные и не положительно определенные матрицы диффузии σ, что является добавочным обобщением по сравнению с упомянутыми работами. Наконец, в большей части цитированных работ коэффициенты b и σ (в обозначениях данной статьи) ограничены, в то время, как целью настоящей работы является рассмотреть случай возможного линейного роста сноса b. Будет показано, как для исследования различных свойств сильно вырожденных СДУ, таких как единственность по распределению и локальное перемешивание, может быть напрямую применено преобразование Гирсанова в условиях не более чем линейного роста коэффициента сноса по фазовым переменным (см. ниже условие (2)) без использования дополнительных урезаний. Последнее свойство (локального перемешивания), установленное в теореме 3, служит основой для проверки эргодичности рекуррентных марковских процессов, в частности, при применении метода каплинга.

Итак, пусть n, ℓ, ℓ_1 — произвольные натуральные числа (целые и строго положительные); несколько позже будет предположено, что $\ell_1 \geqslant \ell$ (это необходимо для невырожденности коэффициента диффузии последней компоненты X^n). Рассмотрим систему СДУ в $\mathbb{R}^{n\ell}$

$$
\begin{aligned}
dX_t^1 &= f_1(t, X_t^1, \ldots, X_t^n)\, dt, \\
dX_t^2 &= f_2(t, X_t^1, \ldots, X_t^n)\, dt, \\
&\ \ \ldots \\
dX_t^n &= \sigma(t, X_t^1, \ldots, X_t^n) b(t, X_t^1, \ldots, X_t^n)\, dt + \sigma(t, X_t^1, \ldots, X_t^n) dW_t, \\
X_0^n &= x^n \in \mathbb{R}^\ell, \qquad i = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где W — ℓ_1-мерный стандартный винеровский процесс, коэффициент диффузии σ — измеримая по Борелю матричная функция размера $\ell \times \ell_1$, предполагаемая ограниченной и равномерно невырожденной (т.е. равномерно невырожденной является матричная функция $\sigma\sigma^*$), а b — ℓ_1-мерная борелевская функция, удовлетворяющая равномерному относительно t условию линейного роста с некоторой постоянной $C > 0$:

$$
|b(t, x)| \leqslant C(1 + |x|), \quad t \geqslant 0, \ x \in \mathbb{R}^{nl}. \tag{2}
$$

Относительно вектор-функции $f = (f_1, \ldots, f_{n-1})$ предполагается условие для всякого $i = 1, \ldots, n-1$:

$$
|f_i(t, x)| \leqslant C(1 + |x^i| + \ldots + |x^n|), \tag{3}
$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$. (В условии (A3) будет предположено еще больше относительно f.) Типичный случай, когда имеет место условие (3), приведен ниже в (5), хотя для выполнения этого условия зависимость f от всех переменных может иметь и существенно более сложный характер.

Отметим, что случай $\ell_1 > \ell$ может получиться естественным образом если, например, исходное СДУ с квадратной матрицей диффузии “сглажено” с помощью дополнительного независимого винеровского процесса, возможно, с малым, но не равным нулю множителем.

Упрощенный вариант теоремы 2 (с $\sigma = I$) был анонсирован в [17].

2. Основные результаты

В дальнейшем μ_t^x обозначает маргинальное распределение (любого, возможно неединственного) решения (X_t) уравнения (1) с начальным состоянием x.

2.1. Предположения

(A1) Функция b измерима по Борелю; матрица σ ограничена, измерима по Борелю, и $\sigma\sigma^*$ равномерно невырождена; функции $f(t,x) = (f_1, \ldots \ldots, f_{n-1})(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ непрерывны по $(x^1, \ldots, x^{n-1})$ равномерно относительно (t, x^n); функции f и b имеют не более чем линейный рост по x равномерно относительно t, т.е. существует постоянная $C > 0$ такая, что при всех x справедливы неравенства (3) и

$$\sup_{t \geqslant 0} |b(t,x)| \leqslant C(1 + |x|). \tag{4}$$

(A2) Матричная функция σ измерима по Борелю и ограничена; функции f и σ глобально липшицевы по x равномерно относительно t; матрица $\sigma\sigma^*$ равномерно невырождена, и выполнены неравенства (3) и (4).

(A3) Имеют место равенства $\ell_1 = \ell$,

$$\sigma = I_{\ell \times \ell},$$

и

$$f_i(t,x) = x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{5}$$

и выполнено неравенство (4) (в данном случае это ограничение лишь на b).

Отметим, что (A3) $\Longrightarrow$ (A2) $\Longrightarrow$ (A1).

2.2. Результаты

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнено предположение* (A1). *Тогда уравнение* (1) *имеет слабое решение на всей полупрямой* $t \geqslant 0$.

З а м е ч а н и е 1. Этот результат должен был бы быть давно известен. Однако, автору не удалось найти подходящую ссылку, хотя данное утверждение может считаться вариацией на тему работы [6] в сочетании с теоремой Гирсанова о существовании слабого решения. Доказательства всех теорем даны в Приложении.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнено предположение* (A2) *и пусть для уравнения без* b (*т.е. при* $b \equiv 0$) *пара* (X, W) *единственна по распределению в пространстве траекторий. Тогда уравнение* (1) *имеет слабо единственное решение на* $[0, +\infty)$, *и это решение является строго марковским процессом. Также при всяком* $T > 0$

$$\mathbb{E}\, \rho_T = 1, \tag{6}$$

где

$$\rho_T := \exp\left(-\int\limits_0^T b(t, X_t)\, dW_t - \frac{1}{2}\int\limits_0^T |b(t, X_t)|^2\, dt\right), \tag{7}$$

где (X, W) — *решение полной системы с* b.

Замечание 2. Для слабой единственности пары (X, W), являющейся решением уравнения без b, достаточно любого условия, гарантирующего *сильную* (*потраекторную*) единственность: например, она имеет место, если f и σ равномерно липшицевы по x. Еще одно достаточное условие состоит в слабой единственности лишь компоненты X вместе с равенством $\ell_1 = \ell$, чего хватает для того, чтобы W однозначно определялся по X из уравнения

$$W_t = \int\limits_0^t \sigma(s, X_s^1, \ldots, X_s^n)^{-1} dX_s^n - \int\limits_0^t b(s, X_s^1, \ldots, X_s^n)\, ds.$$

При условии равенства $\ell_1 = \ell$ последнее уравнение вытекает из (1) ввиду невырожденности $\sigma\sigma^*$ и, стало быть, обратимости σ.

Теорема 3. Пусть выполнено предположение (A3) *в дополнение ко всем условием теоремы 2. Тогда распределение решения уравнения* (1) *удовлетворяет локальному условию Маркова — Добрушина: существует такое* $T > 0$, *что для любого достаточно большого* $R > 0$

$$\kappa(R, T) := \inf_{x_0, x_1 \in B_R} \int\limits_{B_R} \left(\frac{\mu_T^{x_0}(dy)}{\mu_T^{x_1}(dy)} \wedge 1\right) \mu_T^{x_1}(dy) > 0. \tag{8}$$

Замечание 3. Смысл теоремы 3 — в ее применении при исследовании эргодических свойств марковских решений СДУ. Такие свойства требуют дополнительных рекуррентных условий, которые, однако, не являются целью настоящей работы. Следует отметить, что здесь основанием локального перемешивания служит преобразование Гирсанова, а не какие-либо варианты неравенства Харнака, которые для СДУ применяются чаще всего. Представляется весьма правдоподобным, что довольно ограничительные предположения теоремы относительно коэффициентов диффузии и сноса в теореме 3 могут быть заменены на более слабые условия типа используемых в [1]. Этот вопрос отложен до последующих исследований.

2.3. О связи с результатом Бенеша

Как для удобства читателя, так и ради уточнения мотивации данной заметки полезно напомнить результат о существовании слабого решения из [12] для следующего (невырожденного) СДУ в $\mathbb{R}^d$ с d-мерным винеровским процессом (для решения будет использовано новое обозначение Z_t, чтобы отличить от постановки задачи в (1)),

$$dZ_t = b(t, Z_t)\, dt + dW_t, \qquad Z_0 = z. \tag{9}$$

Здесь снос b является d-мерной вектор-функцией, измеримой по Борелю и удовлетворяющей линейному ограничению на рост (2) (без f). Предложение 1 ниже является комбинацией леммы 0 и теоремы 1 из [12], пополненной несколькими фактами из обсуждения в [12], а также леммы 7 из [11] (использованной и в [12]). Более свежее изложение данной классической темы см., например, в [18, следствие 3.5.16 и предложение 5.3.6]. Как обычно (к примеру, аналогично тому как это сделано ниже в лемме 1), чтобы решить уравнение (9), рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ с (новым) d-мерным винеровским процессом $\tilde{W}_t$, $t \geqslant 0$.

Предложение 1 (Бенеш [12]). *При условии* (2) *для решения уравнения* (9) *при любом* $T > 0$ *выполнено равенство*

$$\tilde{\mathbb{E}}\zeta_T = 1, \quad \zeta_T := \exp\left(-\int\limits_0^T b(s, \tilde{W}_s)\, d\tilde{W}_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^T |b(s, \tilde{W}_s)|^2\, ds \right),$$

процесс $W_t := \tilde{W}_t - \int_0^t b(s, \tilde{W}_s)\, ds$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *является* d*-мерным винеровским относительно новой меры* $d\mathbb{P} \equiv d\tilde{\mathbb{P}}^\zeta := \zeta_T\, d\tilde{\mathbb{P}}$, *и уравнение* (9) *имеет слабое решение, единственное в смысле распределения при любом* $T > 0$ *и* $0 \leqslant t \leqslant T$.

До работы [12] (впрочем, как и после нее) преобразование меры Гирсанова широко использовалось с урезанием (неограниченных) коэффициентов, производившимся, чтобы обеспечить мартингальное свойство гирсановской экспоненты. Способ, предложенный Бенешем, позволил избежать этой аппроксимации для определенных классов СДУ (с единичной матрицей диффузии и при условии не более чем линейного роста сноса). Очевидно, этот результат не применим непосредственно к системе (1).

Предположение (2) в доказательстве теоремы использовалось существенно. Интересно отметить, что последнее замечание самого Гирсанова в его работе [11], на самом деле, относилось к более общим процессам с непостоянной диффузией, которое (замечание) в случае постоянной диффузии сводилось в точности к (2). Автор не доказал это утверждение, пообещав сделать это позднее, что, очевидно, никогда уже не было сделано. Возможно, помимо трагической гибели Гирсанова несколькими годами позже, данный факт можно частично объяснить как раз тем, что даже без этого замечания его метод допускал всевозможные применения с подходящими урезаниями (или остановками), как и было предложено в последних комментариях последнего раздела в [11]. По поводу существования *слабого* решения следует отметить, что существование и потраекторная единственность *сильного* решения для уравнения (9), на самом деле, также имеет место и известна со времен работы [19]. Более того, существование слабого решения уравнения (9) (но не (1)) следует и из общего результата о существовании слабых решений в [20]. Это еще один вопрос к непосредственной применимости результата Бенеша к уравнению (1): существование *сильного* решения *без дополнительных предположений* для него, по всей видимости, до сих пор неизвестно (и, скорее всего, неверно), в отличие от случая уравнения (9).

3. Заключение

1. Слабые решения сильно вырожденных СДУ существуют при весьма слабых предположениях, которые могут быть комбинацией условий непрерывности и невырожденности. Первые позволяют использовать технику плотности (компактности) мер и единого вероятностного пространства Скорохода; как альтернатива здесь применим и мартингальный подход. Вторые требуют использования неравенств Крылова. Линейный рост, во всяком случае, коэффициента сноса по фазовым переменным не является существенным ограничением.

При $b \equiv 0$ и для функций f и σ, непрерывных по $(x^1, \ldots, x^{n-1})$ равномерно относительно x^n и t, сходимость решений со сглаженными коэффициентами на новом вероятностном пространстве к решению системы (1) “без b” можно установить, используя априорные оценки этих сглаженных решений и ϵ-сеть в пространстве $C[0, T; \mathbb{R}^{n\ell}]$.

Далее, существование решения полного уравнения (1) вытекает из применения преобразования меры Гирсанова, если принять во внимание лемму 1 (разумеется, доказанную независимо).

В этой части работы никаких специальных требований к структуре коэффициентов не накладывается (помимо сильной вырожденности). Вся теорема 1 является вариацией результатов из [6] (в доказательстве которых, в свою очередь, были использованы и оценки Крылова) в сочетании с методом Гирсанова.

2. Слабая единственность требует несколько больше, чем только существование. В настоящей работе она выводится из мартингального свойства стохастической экспоненты при замене меры Гирсанова, убирающей нерегулярную часть сноса. Данное мартингальное свойство строго доказано. Существуют и другие способы для установления слабой единственности путем анализа аналитических свойств полугрупп, как в некоторых из упомянутых выше работ. И для такой постановки линейный рост коэффициента сноса не является ограничением.

3. Локальное условие Маркова – Добрушина может быть проверено с помощью оценок снизу для переходных плотностей решений уравнения “без b” в сочетании с преобразованием меры Гирсанова. Предположения, требуемые для этой цели в работе, без сомнения, могут быть значительно ослаблены. При этом, насколько известно автору, при сделанных предположениях нижних оценок для плотностей решений полного уравнения (1) “с b” в литературе нет. В работах [1, 8–10, 21] такого типа нижние оценки установлены лишь при определенных дополнительных ограничениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Для симметричной положительно определенной матрицы диффузии σ с $\ell_1 = \ell$ и при $b \equiv 0$ данный результат является частным случаем [6, теорема 1] или его небольшой модификацией. Ради полноты изложения опишем кратко схему доказательства. Прежде всего, аппроксимируем все коэффициенты некоторыми их сглаженными версиями $f^\epsilon, b^\epsilon, \sigma^\epsilon$ (с сохранением невырожденности σ^ϵ). Далее используем априорные оценки моментов решений, технику Скорохода единого вероятностного пространства и оценки Крылова для симметричной положительно определенной σ, как в [20]. Тогда можно перейти к пределу по некоторой подпоследовательности ($k \to \infty$) в интегральной форме уравнения: для выражения $\int f(\ldots)ds$ сходимость (к некоторому пределу) следует из предположений о непрерывности и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости. Для стохастического интеграла с σ сходимость переменной X^{n,ϵ_k}_t обеспечивается техникой, основанной на неравенствах Крылова, и другой леммой Скорохода касательно сходимости под знаком стохастического интеграла. Наконец, сходимость компонент $(X^{1,\epsilon_k}, \ldots, x^{n-1,\epsilon_k})$ следует из предположения о непрерывности по этим компонентам.

Для полного уравнения со сносом b существование теперь следует из теоремы Гирсанова благодаря лемме 1 (доказанной ниже в условиях теоремы 1, разумеется, независимо). В этой лемме линейный рост коэффициента сноса не является ограничением.

Для несимметричной, не положительно определенной и, возможно, не квадратной матрицы σ прием из [22] (см, также [23]) позволяет свести дело к предыдущему случаю: почему это замечание вообще необходимо, так это потому, что сглаживание несимметричной и неквадратной матричной функции в принципе может легко привести к вырождению матрицы; поэтому тут помогает именно не сглаживание, а сведение к случаю квадратной и симметричной положительно определенной матрицы диффузии, для которой сглаживание "безопасно" в смысле невозможности потери невырожденности. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Шаг 1. Начнем с пары $(X, \tilde W)$ на *некотором* вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$, где $\tilde W$ — ℓ_1-мерный винеровский процесс, так что процесс $(X, \tilde W)$ является решением системы (1) при $b \equiv 0$. Для уравнения в общем случае используем преобразование Гирсанова. Обозначим:

$$\tilde\rho_T := \exp\left(+\int_0^T b(t, X_t)\, d\tilde W_t - \frac{1}{2}\int_0^T |b(t, X_t)|^2\, dt\right)$$

и при $0 \leqslant T_1 < T_2$

$$\tilde\rho_{T_1,T_2} := \exp\left(+\int_{T_1}^{T_2} b(t, X_t)\, d\tilde W_t - \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2} |b(t, X_t)|^2\, dt\right).$$

Требуется показать, что ρ_T является вероятностной плотностью, т.е. $\tilde{\mathbb{E}}\tilde\rho_T = 1$, где $\tilde{\mathbb{E}}$ — математическое ожидание относительно вероятности $\tilde{\mathbb{P}}$.

Лемма 1. При условиях (2) *и* (3) (*т.е. в условиях теоремы 1*) *найдется такое достаточно малое* $T_0 > 0$, *что для всякого* $R > 0$ *и любого* $T \leqslant T_0$

$$\sup_{x \in B_R} \tilde{\mathbb{E}}_x \tilde\rho_T^2 < \infty. \tag{П.1}$$

Более того, для всякого $x \in B_R$ и любого $T > 0$ (а не только для достаточно малого)

$$\tilde{\mathbb{E}}_x \tilde{\rho}_T = 1. \tag{П.2}$$

Подчеркнем, что значение левой части в (П.1), конечно, может зависеть от R; однако, как скоро увидим, значение T, для которого левая часть конечна, может быть выбрано не зависящим от $R > 0$.

Доказательство леммы 1. Используя неравенство Коши — Буняковского — Шварца (КБШ) и супермартингальное свойство стохастических экспонент, оцениваем

$$\left(\tilde{\mathbb{E}}_x \tilde{\rho}_T^2\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\tilde{\mathbb{E}} \exp\left(4\int_0^T b(t, X_t) d\tilde{W}_t - 8\int_0^T |b(t, X_t)|^2\, dt\right)\right) \tilde{\mathbb{E}} \exp\left(+6\int_0^T |b(t, X_t)|^2\, dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\mathbb{E}} \exp\left(+6\int_0^T |b(t, X_t)|^2\, dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\mathbb{E}} \exp\left(+6C\int_0^T \left(1 + |X_t|^2\right)\, dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \tilde{\mathbb{E}} \exp\left(+6C\int_0^T \left(1 + |X_t^n|^2 + \ldots + |X_t^1|^2\right)\, dt\right). \tag{П.3}$$

В силу условия (A2) и леммы Гронуэла все компоненты от $|X_t^{n-1}|$ до $|X_t^1|$ могут быть по индукции оценены сверху через повторные интегралы от $|X_t^n|$:

$$|X_t^{n-1}| \leqslant C + C\int_0^t |X_s^n|\, ds,$$

$$|X_t^{n-2}| \leqslant C + C\int_0^t |X_s^n|\, ds + \int_0^t \int_0^s |X_u^n|\, duds,$$

$$|X_t^1| \leqslant C + C\int_0^t |X_s^n|\, ds + \ldots + \int_0^t \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_{n-1}} |X_{s_n}^n|\, ds_n \ldots ds_1.$$

В силу элементарных неравенств аналогичные оценки имеют место и для квадратов, только с константами, зависящими от t (что не отражено в обозначениях):

$$|X_t^{n-1}|^2 \leqslant C + C\int\limits_0^t |X_s^n|^2\,ds,$$

$$|X_t^{n-2}|^2 \leqslant C + C\int\limits_0^t |X_s^n|^2\,ds + \int\limits_0^t\int\limits_0^s |X_u^n|^2\,duds,$$

$$|X_t^{1}|^2 \leqslant C + C\int\limits_0^t |X_s^n|^2\,ds + \ldots + \int\limits_0^t\int\limits_0^{s_1}\ldots\int\limits_0^{s_{n-1}} |X_{s_n}^n|^2\,ds_n\ldots ds_1.$$

(Например, $|X_t^{n-1}|^2 \leqslant C + C\left(\int_0^t |X_s^n|\,ds\right)^2 \leqslant C + Ct\int_0^t |X_s^n|^2\,ds$ и т.п.) Что касается компоненты $|X_s^n|$, с помощью случайной замены времени ее можно преобразовать в одномерный винеровский процесс со сносом на положительной полуоси. Этот снос ограничен, когда процесс отделен от нуля (и не ограничен в любой окрестности нуля), откуда следует, что он мажорируется другим одномерным винеровским процессом с ограниченным сносом и мгновенным отражением, например, для определенности, в единице. Данная случайная замена времени имеет ограниченную снизу и сверху производную в силу ограниченности и невырожденности $\sigma\sigma^*$. Таким образом, приходим к оценкам

$$|X_t^{n-1}|^2 \leqslant C_t + C\int\limits_0^{Ct} |\bar W_s|^2\,ds,$$

$$|X_t^{n-2}|^2 \leqslant C_t + C\int\limits_0^{Ct} |\bar W_s|^2\,ds + \int\limits_0^{Ct}\int\limits_0^s |\bar W_{s_2}|^2\,ds_2ds,$$

$$|X_t^{1}|^2 \leqslant C_t + C\int\limits_0^{Ct} |\bar W_s|^2\,ds + \ldots + \int\limits_0^{Ct}\int\limits_0^{s_1}\ldots\int\limits_0^{s_{n-1}} |\bar W_{s_n}|^2\,ds_n\ldots ds_1$$

с одномерным винеровским процессом $\bar W$ и не более чем линейным ростом постоянной C_t по t (т.е. $C_t \leqslant C(1+t)$).

Поскольку в силу “принципа отражения Андрэ” для винеровского процесса при всяком $v > 0$ справедливо неравенство

$$\tilde{\mathbb{P}}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\bar W_t| > v\right) \leqslant 4\tilde{\mathbb{P}}(\bar W_1 > v) \leqslant \frac{4}{v}\exp(-v^2/2),$$

то отсюда следует, что какая бы ни была в (П.3) константа $6C$, математическое ожидание в (П.3) окажется конечным, если $T > 0$ достаточно мало.

Более того, это значение $T > 0$ не будет зависеть от R (хотя значение математического ожидания в (П.3), конечно, от R зависит).

Далее, неравенство (П.1) обеспечивает равномерную интегрируемость $\tilde{\rho}_T$ относительно меры $\tilde{\mathbb{P}}$ для всякого $x \in B_R$, откуда вытекает (П.2) для всех достаточно малых значений T. Однако уже само последнее равенство распространяется на любое T простой индукцией, основанной на марковском свойстве (напомним, что *малое* T в (П.1) не зависит от начального состояния), см. [12] или [18, следствие 3.5.14]:

$$\tilde{\mathbb{E}}\tilde{\rho}_{nT_0} = \tilde{\mathbb{E}}\tilde{\rho}_{(n-1)T_0}\tilde{\mathbb{E}}\left(\tilde{\rho}_{(n-1)T_0:nT_0} \mid \mathcal{F}_{(n-1)T_0}\right) =$$

$$= \tilde{\mathbb{E}}\tilde{\rho}_{(n-1)T_0} \times 1 = \ldots = \tilde{\mathbb{E}}\tilde{\rho}_{T_0} = 1.$$

Лемма 1 доказана.

Шаг 2. В дальнейшем понадобится еще одно близкое утверждение. Допустим, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с ℓ_1-мерным винеровским процессом W существует решение X_t системы (1), и обозначим

$$\rho_T := \exp\left(-\int_0^T b(t, X_t)\, dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T |b(t, X_t)|^2\, dt\right).$$

Лемма 2. В условиях (2) *и* (3) *для всякого* $R > 0$ *найдется столь малое* $T > 0$, *что*

$$\sup_{x \in B_R} \mathbb{E}_x \rho_T^2 < \infty, \tag{П.4}$$

и для любого $x \in B_R$

$$\mathbb{E}_x \rho_T = 1. \tag{П.5}$$

Доказательство леммы 2. Неравенство (П.4) гарантирует равномерную интегрируемость ρ_T относительно меры $\mathbb{P}$ при любом $x \in B_R$, что немедленно влечет (П.5). Таким образом, вероятностная мера $\mathbb{P}^\rho$ корректно определена. Неравенство (П.4) можно переписать как

$$\sup_{x \in B_R} \mathbb{E}_x \rho_T^2 = \sup_{x \in B_R} \mathbb{E}_x^\rho \rho_T = \sup_{x \in B_R} \tilde{\mathbb{E}}_x (\tilde{\rho}_T)^{-1} < \infty.$$

В этой форме (как и в форме $\mathbb{E}_x \rho_T^2 < \infty$) последнее неравенство следует из выкладки, совершенно аналогичной доказательству леммы 1. Этой выкладкой, проверка которой оставляется читателю, лемма 2 доказана.

Шаг 3. Слабая единственность. Пусть X — слабое решение уравнения (1) на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с винеровским процессом нужной размерности W. Тогда, применяя "обратное" преобразование Гирсанова с ρ_T, убеждаемся, что тот же процесс X является решением уравнения "без b" с новым винеровским процессом по новой вероятностной мере $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}^\rho$. Следовательно, согласно предположениям теоремы, распределение пары $(X, \tilde{W})$ на $[0, T]$ относительно меры $\mathbb{P}^\rho$ однозначно определено. Закон распределения X относительно $\mathbb{P}$ можно получить из закона распределения пары $(X, \tilde{W})$ относительно $\tilde{\mathbb{P}}$ посредством преобразования Гирсанова. В самом деле, для любой ограниченной борелевской функции $g \in C[0, T; \mathbb{R}^{n\ell}]$ имеем

$$\mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}^\rho \rho^{-1} g(X) = \mathbb{E}^\rho \rho^{-1} g(X) =$$

$$= \mathbb{E}^\rho g(X) \exp\left(+ \int\limits_0^T b(t, X_t)\, dW_t + \frac{1}{2} \int\limits_0^T |b(t, X_t)|^2\, dt \right) =$$

$$= \mathbb{E}^\rho g(X) \exp\left(+ \int\limits_0^T b(t, X_t)\, d\tilde{W}_t - \frac{1}{2} \int\limits_0^T |b(t, X_t)|^2\, dt \right). \tag{П.6}$$

Поскольку по мере $\mathbb{P}^\rho$ распределение пары $(X, \tilde{W})$ по условию однозначно определено, из (3) следует, что выражение $\mathbb{E}g(X)$ также однозначно. Это показывает слабую единственность решения уравнения (1), что и требовалось. Отметим, что подобный способ применялся Гихманом и Скороходом [24] в невырожденной ситуации.

Шаг 4. Строго марковское свойство теперь следует из [25]. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Прежде всего, отметим, что

$$\frac{\mu_T^x(dy)}{dy} > 0 \quad \text{п.в. (почти всюду).} \tag{П.7}$$

В самом деле, обозначим

$$\mu_T^{x,\rho}(dy) := \mathbb{E}_x^\rho 1(X_T \in dy),$$

где ρ_T определено в (7). В силу обобщенной формулы Байеса имеем

$$\frac{\mu_T^x(dy)}{dy} = \frac{\mu_T^{x,\rho}(dy)}{dy} \mathbb{E}_x(\rho_T^{-1} \mid X_T)|_{X_T = y}.$$

Здесь оба множителя $\mu_T^\rho(x; dy)/dy$ и $\mathbb{E}(\rho_T^{-1} \mid X_T)|_{X_T = y}$ положительны: второй почти наверное, поскольку $0 < \rho^{-1} < \infty$, а первый всюду в силу того, что это — невырожденная гауссовская плотность, для которой возможно и явное представление. Таким образом, искомое неравенство (8) может быть переписано в виде

$$\inf_{x_0, x_1 \in B_R} \int\limits_{B_R} \left(\frac{\mu_T^{x_0}(dy)}{dy} \wedge \frac{\mu_T^{x_1}(dy)}{dy} \right) dy > 0. \tag{П.8}$$

Пусть $L > 0$, и рассмотрим плотность

$$\frac{\mu_T^{x_0,L}(dy)}{dy} := \frac{\mathbb{E}_{x_0} 1(X_T \in dy)\, 1(\rho_T > L)}{dy}.$$

Очевидно, мера $\mu_T^{x_0,L}(dy)$ абсолютно непрерывна относительно лебеговой, поскольку ее мажорирует мера $\mu_T^{x_0}(dy)$. Кроме того, ρ_T является вероятностной плотностью, поэтому оправданы обозначения

$$\frac{\mu_T^{x_0}(dy)}{dy} \equiv \frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} \rho^{-1} 1(X_T \in dy)}{dy} =: p_{x_0}(y;T),$$

$$\frac{\mu^{\rho}_{T;x_0}(dy)}{dy} \equiv \frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} 1(X_T \in dy)}{dy} =: p^{\rho}_{x_0}(y;T),$$

$$\frac{\mu^{L}_{T;x_0}(dy)}{dy} = \frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} 1(X_T \in dy)\, 1(\rho_T > L)}{dy} =: p^{L}_{x_0}(y;T).$$

Поскольку $\rho_T^{-1} \geqslant L^{-1}$ на множестве $(\rho_T \leqslant L)$, то получаем оценки

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_{T;x_0}(dy)}{dy} &= \frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} \rho_T^{-1} 1(X_T \in dy)\, 1(\rho_T \leqslant L)}{dy} + \frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} \rho_T^{-1} 1(X_T \in dy)\, 1(\rho_T > L)}{dy} \geqslant \\
&\geqslant \frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} \rho_T^{-1} 1(X_T \in dy)\, 1(\rho_T \leqslant L)}{dy} = \frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} \rho_T^{-1} 1(X_T \in dy)\, (1 - 1(\rho_T > L))}{dy} \geqslant \\
&\geqslant L^{-1}\, \frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} 1(X_T \in dy)\, (1 - 1(\rho_T > L))}{dy} \geqslant \\
&\geqslant L^{-1} \left(\frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} 1(X_T \in dy)}{dy} - \frac{\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} 1(X_T \in dy)\, 1(\rho_T > L)}{dy} \right).
\end{aligned}$$

Как уже отмечалось, здесь $\rho > 0$ — вероятностная плотность на Ω. Поэтому выражение $\mathbb{E}^{\rho}_{x_0} 1(X_T \in dy)/dy$ (без множителя L^{-1}), на самом деле, является всюду положительной плотностью $n\ell$-мерного гауссовского случайного вектора с невырожденной ковариационной матрицей относительно вероятностной меры $\mathbb{P}^{\rho}$; эту ковариационную матрицу C_T можно выписать явно, что, однако, несущественно для данного доказательства. Важно лишь то, что она положительно определена, что можно, например, увидеть, проверив слабое условие Хёрмандера на генератор решения уравнения (1) без b. Таким образом, получаем

$$p^{\rho}_{x_0}(y;T) = c(T) \exp\left(-\frac{1}{2}(y - \bar{x})(C_T^{-1})(y - \bar{x})^* \right)$$

с некоторым $\bar{x}$, не зависящим от L, где $c(T)$ — соответствующая нормировочная константа. Поэтому

$$p_{x_0}(y;T) \geqslant L^{-1} \left(p^{\rho}_{x_0}(y;T) - p^{L}_{x_0}(y;T) \right). \tag{П.9}$$

Выражение $p^{\rho}_{x_0}(y;T)$ в неравенстве (П.9) равномерно ограничено снизу на любом компакте по переменным (x_0, y). Итак, оцениваем:

$$\inf_{x_0\in B_R}\int\limits_{B_R}\left(\frac{\mu_{T;x_0}(dy)}{\mu_{T;x_1}(dy)}\wedge 1\right)\mu_{T;x_1}(dy) =$$

$$= \inf_{x_0,x_1\in B_R}\int\limits_{B_R}\left(\frac{\mu_{T;x_0}(dy)}{dy}\wedge\frac{\mu_{T;x_1}(dy)}{dy}\right)dy\equiv$$

$$\equiv \inf_{x_0,x_1\in B_R}\int\limits_{B_R}\left(p_{x_0}(y;T)\wedge p_{x_1}(y;T)\right)\,dy \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{x_0,x_1\in B_R}\int\limits_{B_R}L^{-1}\left(p^{\rho}_{x_0}(y;T)\wedge p^{\rho}_{x_1}(y;T) - p^{L}_{x_0}(y;T) - p^{L}_{x_1}(y;T)\right)\,dy \geqslant$$

$$\geqslant L^{-1}\left(\inf_{x,x'\in B_R} p^{\rho}_{x}(x';T)\,|B_R| - 2\sup_{x\in B_R}\mathbb{P}^{\rho}_{x}(\rho_T > L)\right). \tag{П.10}$$

Было использовано (П.9) и элементарное неравенство

$$(a-b)\wedge(c-d)\geqslant(a\wedge c)-b-d.$$

Далее,

$$\inf_{x,x'\in B_R} p^{\rho}_{x}(x';T)\,|B_R| > 0,$$

и величина этой нижней грани, в свою очередь, не зависит от L (хотя зависит от T). Второй член в (П.10) допускает оценку в силу неравенства Чебышева — Маркова

$$\sup_{x_0\in B_R}\mathbb{P}^{\rho}_{x_0}(\rho_T\geqslant L)\leqslant L^{-1}\sup_{x_0\in B_R}\mathbb{E}^{\rho}_{x_0}\rho_T.$$

В силу леммы 2 для любого достаточно малого T величина $\sup_{x_0\in B_R}\mathbb{E}^{\rho}_{x_0}\rho_T$ конечна. При любом таком T можно сделать выражение в (П.10) строго положительным, выбирая L достаточно большим. Это влечет оценку (П.8), по крайней мере, для достаточно малых $T>0$, что и завершает доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Menozzi S.* Parametrix techniques and martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations // Electron. Communicat. Probab. 2011. V. 16. P. 234–250.
2. *Priola E.* On Weak Uniqueness for Some Degenerate SDEs by Global L_p Estimates // Potential Anal. 2015. V. 42. No. 1. P. 247–281.

3. *Campillo F.* Optimal ergodic control for a class of nonlinear stochastic systems // Proc. 28 IEEE Conf. Decision Control (CDC), Tampa. 1989. P. 1190–1195.
4. *Campillo F., Le Gland F., Pardoux E.* Approxmation of a stochastic ergodic control problem / Descusse, J., Fliess, M., Isidori, A., and Leborgne, D., eds. New trends in Nonlinear Control Theory., CNRS, Nants 1988, Lecture notes in Control and Information Sciences 122. Springer, 1989. P. 379–395.
5. *Campillo F., Pardoux E.* Numerical methods in ergodic optimal stochastic control and application / Karatzas, I. and Ocone, D., eds. Applied Stochastic Analysis. Proceedings of a US-French Workshop, Rutgers University, New Brunswick, NJ, April 29-May 2, 1991. V. 177 of Lecture notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer, 1992. P. 59–73.
6. *Nisio M.* On the existence of solutions of stochastic differential equations // Osaka J. Math. 1973. V. 10. No. 1. P. 185–208.
7. *Веретенников А.Ю.* О стохастических уравнениях с вырождающейся по части переменных диффузией // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47. № 1. С. 189–196.
8. *Chaudru de Raynal P.-E.* Strong existence and uniqueness for stochastic differential equation with Hölder drift and degenerate noise // Ann. l'Instit. Henri Poincaré. 2017. V. 53. No. 1. P. 259–286.
9. *Chaudru de Raynal P.-E., Menozzi S.* Regularization effects of a noise propagating through a chain of differential equations: an almost sharp result.

   https://arxiv.org/abs/1710.03620
10. *Delarue F., Menozzi S.* Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations // J. Function. Anal. 2010. V. 259. No. 6. P. 1577–1630.
11. *Гирсанов И.В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры // Теория вероятн. и ее примен. 1960. Т. 5. Вып. 3. С. 314–330.
12. *Beneš V.E.* Existence of optimal stochastic control laws // SIAM J. Control. 1971. V. 9. No. 3. P. 446–472.
13. *Abourashchi N., Veretennikov A.Yu.* On stochastic averaging and mixing // Theory Stochast. Proc. 2010. V. 16(32). No. 1. P. 111–130.
14. *Anulova S.V., Veretennikov A.Yu.* On ergodic properties of degenerate hybrid stochastic control systems // Proc. 49 IEEE Conf. Decision Control (CDC), Atlanta. 2010. P. 2292–2297.
15. *Anulova S.V., Veretennikov A.Yu., and Shcherbakov P.S.* Exponential Convergence of Multi-Dimensional Stochastic Mechanical Systems with Switching // Proc. 52 IEEE Conf. Decision Control (CDC), Florence, Italy. 2013. P. 1217–1222.
16. *Клебанер Ф.К., Липцер Р.Ш.* Когда стохастическая экспонента является мартингалом. Развитие метода Бенеша // Теория вероятн. и ее примен. 2013. Т. 58. Вып. 1. С. 53–80.
17. *Veretennikov A.Yu.* On weak solution of an SDE // 10 Vilnius conf. Probab. Theory and Mathematical Statistics 28th June–2nd July 2010. Abstracts of Communicat. Vilnius: TEV. 2010. P. 287.
18. *Karatzas I., Shreve S.E.* Brownian motion and stochastic calculus. N.Y.: Springer, 1991.
19. *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических интегральных уравнений // Матем. сб. 1980. Т. 111(153). № 3. С. 434–452.
20. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.

21. *Honoré I., Menozzi S., Chaudru de Raynal P.-E.* Strong regularization by Brownian noise propagating through a weak Hörmander structure.

https://arxiv.org/abs/1810.12225

22. *Веретенников А.Ю., Крылов Н.В.* О явных формулах для решений стохастических уравнений // Матем. сб. 1976. Т. 100(142). № 2(6). С. 266–284.

23. *Mishura Yu.S., Veretennikov A.Yu.* Existence and uniqueness theorems for solutions of McKean–Vlasov stochastic equations / arXiv:1603.02212

24. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т. 3. М.: Наука, 1975.

25. *Крылов Н.В.* О выделении марковского процесса из марковской системы процессов и построении квазидиффузионных процессов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37. № 3. С. 691–708.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 14.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019