М.Л. КЛЕПЦЫНА, канд. физ.-мат. наук
(Marina.Kleptsyna@univ-lemans.fr),
Д.А. МАРУШКЕВИЧ, канд. физ.-мат. наук
(Dmytro.Marushkevych.etu@univ-lemans.fr)
(Университет Ле-Мана, Франция),
П.Ю. ЧИГАНСКИЙ, канд. техн. наук (Pavel.Chigansky@mail.huji.ac.il)
(Еврейский университет в Иерусалиме, Израиль)

АСИМПТОТИКА ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ДРОБНОГО СИГНАЛА В МАЛОМ БЕЛОМ ШУМЕ[1]

Рассматривается задача оценки дробного процесса Орнштейна–Уленбека, наблюдаемого в линейном канале с белым шумом малой интенсивности. Получена точная асимптотика ошибки оценок фильтрации и интерполяции. Анализ точности основан на приближениях собственных значений и собственных функций ковариационного оператора сигнала.

Ключевые слова: оптимальная линейная фильтрация, дробный процесс Орнштейна–Уленбека, асимптотический анализ.

DOI: 10.31857/S0005231020030046

1. Введение

Рассмотрим систему стохастических линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
X_t &= \beta \int_0^t X_s ds + B_t^H, \\
Y_t &= \mu \int_0^t X_s ds + \sqrt{\varepsilon} B_t,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $B = (B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ и $B^H = (B_t^H, t \in \mathbb{R}_+)$ — независимые стандартное и дробное броуновские движения, β и μ — постоянные коэффициенты, а ε – положительный малый параметр.

Напомним, что дробное броуновское движение с показателем Хёрста $H \in \in (0,1)$ определяется как гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$
\mathbb{E} B_t^H B_s^H = \frac{1}{2}\Big(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\Big).
$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Израильского Научного Фонда (ISF) (грант № 1383/18).

При $H = 1/2$ процесс B^H совпадает со стандартным броуновским движением. При всех же других значениях показателя H дробное броуновское движение не является ни семимартингалом, ни марковским процессом, а при $H > 1/2$ его приращения обладают долгосрочной зависимостью:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_1^H (B_{n+1}^H - B_n^H) = \infty.$$

Благодаря своим разнообразным свойствам (самоподобие, длинная память), дробное броуновское движение играет важную роль в теории и приложениях случайных процессов, см., например, [1, 2]. В частности, отметим, что дробный процесс Орнштейна–Уленбека, определяемый первым уравнением (1.1), также обладает свойством долгосрочной зависимости, см. [3].

Задача оптимальной оценки сигнала X по наблюдаемой траектории процесса Y заключается в вычислении условного математического ожидания $\widehat{X}_{t,T} = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_T^Y)$ во время $t \in [0, T]$, где $\mathcal{F}_T^Y = \sigma\{Y_t, t \leqslant T\}$. Такая оценка минимизирует среднеквадратичную ошибку по всем функционалам, измеримым относительно $\mathcal{F}_T^Y$. При $t < T$ оценка $\widehat{X}_{t,T}$ называется интерполяционной, а при $t = T$ — фильтрационной.

Так как процесс (X, Y) гауссовский, оптимальный фильтр является линейным функционалом от наблюдений, а точнее, стохастическим интегралом, см. [4],

$$\widehat{X}_{t,T} = \frac{1}{\mu} \int_0^t h_T(s,t) dY_s.$$

Весовая функция $h_T(s,t)$ задается единственным решением интегрального уравнения

$$\varepsilon h_T(s,t) + \int_0^T \mu^2 K(r,s) h_T(r,t) dr = \mu^2 K(s,t), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

где ковариационное ядро $K(s,t) = \mathbb{E} X_s X_t$ в случае сигнала из (1.1) имеет вид

$$K(s,t) = \int_0^t e^{\beta(t-v)} \frac{d}{dv} \int_0^s H|v-u|^{2H-1} \operatorname{sign}(v-u) e^{\beta(s-u)} du dv. \tag{1.3}$$

При этом наименьшая среднеквадратичная ошибка $P_{t,T}(\varepsilon) = \mathbb{E}(X_t - \widehat{X}_{t,T})^2$ вычисляется по формуле

$$P_{t,T}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu^2} h_T(t,t).$$

Явное решение уравнения (1.2) известно только в случае $H = 1/2$, т.е. когда сигнал является классическим процессом Орнштейна–Уленбека. Этот факт лежит в основе теории оптимального оценивания Калмана–Бьюси [5]. Наилучшая оценка в этом случае может быть вычислена рекурсивно решением дифференциального стохастического уравнения. При этом наименьшая ошибка оценивания удовлетворяет дифференциальному уравнению Риккати, см., например, [6, теорему 12.10], простой анализ которого дает следующую точную асимптотику оценки:

$$P_{t,T}(\varepsilon) \asymp \sqrt{\varepsilon/\mu^2} \begin{cases} 1/2, & t \in (0,T) \\ 1, & t = T \end{cases} \qquad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Здесь и далее $f(\varepsilon) \asymp g(\varepsilon)$ означает, что $f(\varepsilon)/g(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Эта формула показывает, что ошибки фильтрации и интерполяции асимптотически отличаются только на постоянный фактор и убывают как квадратный корень от интенсивности шума.

2. Основные результаты

В этой работе будет получена более общая асимптотика ошибки, остающейся верной при всех значениях показателя Хёрста.

Теорема 1. Наименьшая среднеквадратичная ошибка оценки сигнала в системе (1.1) *допускает следующую асимптотику:*

$$P_{t,T}(\varepsilon) \asymp \tag{2.1}$$

$$\asymp (\varepsilon/\mu^2)^{\frac{2H}{1+2H}} \frac{\Big(\sin(\pi H)\Gamma(2H+1)\Big)^{\frac{1}{1+2H}}}{\sin\frac{\pi}{2H+1}} \begin{cases} \dfrac{1}{2H+1}, & t \in (0,T) \\ 1, & t = T \end{cases} \qquad \textit{при } \varepsilon \to 0.$$

Замечание 1. Порядок $\varepsilon^{2H/(1+2H)}$ скорости ошибки в (2.1) совпадает с оптимальным порядком убывания минимаксного риска в задачах оценки детерминированного сигнала с показателем Гёльдера $H \in (0,1)$ в белом шуме, см. [7, 8].

Вывод асимптотики (2.1) использует приближение решений спектральной задачи

$$K\varphi = \lambda\varphi$$

для ковариационного оператора

$$(K\varphi)(t) = \int_0^T K(s,t)\varphi_s ds$$

дробного процесса Орнштейна–Уленбека с ядром (1.3). Хорошо известно, что такая задача имеет счетное количество нетривиальных решений (λ_n, φ_n),

$n \in \mathbb{N}$. Собственные значения λ_n вещественны, положительны и их упорядоченная последовательность сходится к нулю. Собственные функции φ_n составляют полный ортонормальный базис в пространстве $L^2([0,T])$. Добавляя β в обозначение ядра (1.3), заметим, что оно обладает свойством инвариантности

$$K_\beta(sT, tT) = T^{2H} K_{\beta T}(s,t), \quad s,t \in [0,1], \quad T > 0, \tag{2.2}$$

благодаря которому без ограничения общности можно рассматривать спектральную задачу на единичном отрезке $[0,1]$.

В случае классического процесса Орнштейна–Уленбека, т.е. при $H = 1/2$, спектральная задача сводится к линейному дифференциальному уравнению с явным решением, которое позволяет найти простые выражения

$$\lambda_n = \frac{1}{\nu_n^2 + \beta^2} \quad \text{и} \quad \varphi_n(t) \propto \sqrt{2}\sin(\nu_n t), \tag{2.3}$$

где $\nu_n = \pi n - \pi/2 + O(n^{-1})$ — возрастающая последовательность корней уравнения

$$\nu/\beta = \tan \nu.$$

Для всех других значений показателя $H \in (0,1)$ асимптотически точные приближения собственных значений и функций могут быть получены с использованием метода Укаи [9], недавно примененного в [10] к спектральному анализу дробного броуновского движения.

Следующий результат интересен сам по себе и может быть применен в различных других приложениях.

Теорема 2.

1. *Собственные значения ковариационного оператора с ядром* (1.3) *на единичном отрезке* $[0,1]$ *допускают представление*

$$\lambda_n = \sin(\pi H)\Gamma(2H+1)\frac{\nu_n^{1-2H}}{\nu_n^2 + \beta^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.4}$$

где последовательность ν_n *имеет ту же асимптотику, что и в случае дробного броуновского движения,* [10, теорема 2.1]:

$$\nu_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{(H-\frac{1}{2})^2}{H+\frac{1}{2}}\frac{\pi}{2} + O(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

2. *Нормированные собственные функции допускают такое же асимптотическое приближение, как и в случае дробного броуновского движения,* [10, теорема 2.1]:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin\big(\nu_n x + \eta_H\big) - \\ - \int_0^\infty \Big(e^{-x\nu_n u} f_0(u) + (-1)^n e^{-(1-x)\nu_n u} f_1(u)\Big) du + O(n^{-1}), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где функции $f_j(\cdot)$ задаются явными формулами (см. лемму 9) и

$$\eta_H = \frac{1}{4}\frac{(H-\frac{1}{2})(H-\frac{3}{2})}{H+\frac{1}{2}}.$$

3. *Имеет место следующее асимптотическое равенство:*

$$\varphi_n(1) = -(-1)^n\sqrt{2H+1}\big(1+O(n^{-1})\big), \quad n\to\infty.$$

3. Доказательство теоремы 1

Используя свойство (2.2), перепишем уравнение (1.2) в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon h(u,v) + \int\limits_0^1 \mu^2T^{2H+1}K_{\beta T}(r,u)h(r,v)dr =\\ = \mu^2T^{2H}K_{\beta T}(u,v), \quad 0\leqslant u\leqslant v\leqslant 1,\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $h(u,v) := h_T(uT,vT)$. Очевидно, что

$$P_{uT,T}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu^2}h(u,u), \quad u\in[0,1].$$

Разлагая решение (3.1) в ряд по собственным функциям ядра $K_{\beta T}$, получаем

$$h(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu^2T^{2H}}{\varepsilon\lambda_n^{-1}+\mu^2T^{2H+1}}\varphi_n(u)\varphi_n(v), \quad 0\leqslant u\leqslant v\leqslant 1,$$

где λ_n — его собственные значения. Этот ряд сходится безусловно при любых $\varepsilon>0$, и его значение неограниченно возрастает при $\varepsilon\to 0$. Первый порядок асимптотики этого ряда по ε не изменится, если собственные значения и собственные функции заменить на их приближения из теоремы 2. Обозначим $C := \sin(\pi H)\Gamma(2H+1)$, тогда

$$\begin{aligned}P_{T,T}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu^2}h(1,1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon\lambda_n^{-1}+\mu^2T^{2H+1}}\varphi_n^2(1) \asymp\\ \asymp \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon T^{2H}}{\frac{\varepsilon}{C}\frac{(\pi n)^2+(\beta T)^2}{(\pi n)^{1-2H}}+\mu^2T^{2H+1}}(2H+1) \asymp\\ \asymp (2H+1)\int\limits_1^{\infty}\frac{\varepsilon T^{2H}}{\frac{\varepsilon}{C}\big((\pi x)^{2H+1}+(\beta T)^2(\pi x)^{2H-1}\big)+\mu^2T^{2H+1}}dx \asymp\end{aligned}$$

$$\asymp \frac{\varepsilon}{\mu^2 T}\left(\frac{\varepsilon}{C}\frac{1}{T^{2H+1}\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2H+1}} \frac{2H+1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{y^{2H+1}+1}dy =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\mu^2 T}\left(\frac{\varepsilon}{C}\frac{1}{T^{2H+1}\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2H+1}} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2H+1}} = (\varepsilon/\mu^2)^{\frac{2H}{2H+1}}\frac{C^{\frac{1}{2H+1}}}{\sin\frac{\pi}{2H+1}},$$

что и дает асимптотическое выражение ошибки фильтрации в (2.1) при $t = T$.

Для вычисления $P_{uT,T}(\varepsilon)$ при $u \in (0,1)$ воспользуемся приближением собственных функций (2.5), которое внутри интервала принимает вид

$$\varphi_n(u) = \sqrt{2}\sin\big(\nu_n u + \eta_H\big) + O(n^{-1}) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Имеем

$$P_{uT,T}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mu^2}h(u,u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon\lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}}\varphi_n^2(u) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon\lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}} - \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon\lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}}\cos\big(2\nu_n u + 2\eta_H\big) := \tag{3.2}$$

$$:= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon).$$

Здесь $I_1(\varepsilon)$ отличается от предыдущего случая только на множитель $2H+1$, и для того, чтобы получить асимптотику ошибки интерполяции (2.1) в случае $t \in (0,T)$, остается показать, что $I_2(\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ быстрее, чем $\varepsilon^{2H/(2H+1)}$. Введем последовательность $(S_n)_{n\geqslant 0}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \cos\big(2\nu_k u + 2\eta_H\big), \quad n \geqslant 1, S_0 = 0.$$

Для любого $u \in (0,1)$ последовательность (S_n) ограничена и

$$I_2(\varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon T^{2H}}{\varepsilon\lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}}\big(S_n - S_{n-1}\big) =$$

$$= \varepsilon^2 T^{2H}\sum_{n=1}^\infty S_n \frac{\lambda_{n+1}^{-1} - \lambda_n^{-1}}{\big(\varepsilon\lambda_{n+1}^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}\big)\big(\varepsilon\lambda_n^{-1} + \mu^2 T^{2H+1}\big)}.$$

По формуле (2.4) для всех достаточно больших n имеем

$$|\lambda_{n+1}^{-1} - \lambda_n^{-1}| \leqslant C_1 n^{2H} \quad \text{и} \quad \lambda_n^{-1} \geqslant C_2 n^{2H+1}$$

с некоторыми постоянными C_1 и C_2. Тогда, поскольку (S_n) ограничена, существует постоянная C_3, такая что

$$|I_2(\varepsilon)| \leqslant C_3\varepsilon^2 \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{2H}}{\big(\varepsilon n^{2H+1}+1\big)^2} \asymp C_3\varepsilon^2 \int\limits_1^\infty \frac{x^{2H}}{\big(\varepsilon x^{2H+1}+1\big)^2}dx \asymp$$

$$\asymp C_3\varepsilon \int\limits_0^\infty \frac{y^{2H}}{\left(y^{2H+1}+1\right)^2} dy = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, второй член в (3.2) асимптотически пренебрежим, что завершает доказательство теоремы.

4. Доказательство теоремы 2

Основная идея доказательства заключается в сведении спектральной задачи к решению некоторой вспомогательной системы интегральных и алгебраических уравнений, которая оказывается более удобной для асимптотического анализа. Подробное описание метода можно найти в [10, секция 4], а используемые понятия и результаты из комплексного анализа — в монографии [11].

4.1. Случай $H > \frac{1}{2}$

В этом случае выражение (1.3) можно упростить, поменяв порядок интегрирования и производной:

$$K(s,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^s e^{\beta(t-v)} e^{\beta(s-u)} c_\alpha |u-v|^{-\alpha} du dv,$$

где введен новый параметр $\alpha := 2-2H \in (0,1)$ и постоянная $c_\alpha = (1-\frac{\alpha}{2})(1-\alpha)$. В этих обозначениях спектральная задача имеет вид

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x \int\limits_0^y e^{\beta(x-u)} e^{\beta(y-v)} c_\alpha |u-v|^{-\alpha} dv du \right) \varphi(y) dy = \lambda \varphi(x), \quad x \in [0,1]. \tag{4.1}$$

4.1.1. Преобразование Лапласа. Рассмотрим преобразование Лапласа от решения уравнения (4.1)

$$\widehat{\varphi}(z) = \int\limits_0^1 e^{-zx} \varphi(x) dx, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.2}$$

которое является аналитической функцией. В следующей лемме, используя особую структуру ядра, получим выражение для $\widehat{\varphi}(z)$, которое играет ключевую роль в реализации метода.

Лемма 1. *Пусть (λ, φ) решают спектральную задачу (4.1), тогда преобразование Лапласа (4.2) допускает представление*

$$\widehat{\varphi}(z) = \widehat{\varphi}(-\beta) - \frac{z+\beta}{\Lambda(z)} \Big(\Phi_0(z) + e^{-z} \Phi_1(-z) \Big), \tag{4.3}$$

где

$$\Lambda(z) = \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}(z^2-\beta^2) + \int_0^\infty \frac{2t^\alpha}{t^2-z^2}dt, \tag{4.4}$$

а функции $\Phi_0(z)$ *и* $\Phi_1(z)$, *определенные ниже в* (4.17), *кусочно-голоморфны на разрезанной плоскости* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$.

Доказательство леммы 1. Продифференцируем обе части уравнения (4.1). Получим

$$\int_0^1 \left(\int_0^y e^{-\beta v} c_\alpha |x-v|^{-\alpha} dv\right) e^{\beta y}\varphi(y)dy + \beta\lambda\varphi(x) = \lambda\varphi'(x), \quad x\in[0,1]. \tag{4.5}$$

Далее, введем функцию

$$\psi(x) := e^{-\beta x}\int_x^1 e^{\beta r}\varphi(r)dr \tag{4.6}$$

и, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 \left(\int_0^y e^{-\beta v} c_\alpha |x-v|^{-\alpha} dv\right) e^{\beta y}\varphi(y)dy = \int_0^1 c_\alpha |x-y|^{-\alpha}\psi(y)dy.$$

Теперь уравнение (4.5) эквивалентно обобщенной спектральной задаче

$$\begin{gathered}\int_0^1 c_\alpha|x-y|^{-\alpha}\psi(y)dy = \lambda\Big(\beta^2\psi(x)-\psi''(x)\Big), \quad x\in[0,1],\\ \psi(1)=0, \quad \psi'(0)+\beta\psi(0)=0,\end{gathered} \tag{4.7}$$

где краевые условия следуют из определения (4.6), так как

$$\psi'(x)+\beta\psi(x) = -\varphi(x). \tag{4.8}$$

Подстановка тождества

$$|x-y|^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t|x-y|}dt, \quad \alpha\in(0,1),$$

в (4.7) дает

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}u(x,t)dt = \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}\Big(\beta^2\psi(x)-\psi''(x)\Big), \tag{4.9}$$

где была определена функция

$$u(x,t) := \int\limits_0^1 \psi(y) e^{-t|x-y|} dy. \tag{4.10}$$

С другой стороны, дважды интегрируя по частям и используя краевые условия задачи (4.7), имеем

$$\widehat{\psi}''(z) = \int\limits_0^1 \psi''(x) e^{-zx} dx = \psi'(1)e^{-z} + (\beta - z)\psi(0) + z^2 \widehat{\psi}(z). \tag{4.11}$$

Применяя преобразование Лапласа к (4.9) и подставляя (4.11), получим

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \widehat{u}(z,t) dt = \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha} \Big((\beta^2 - z^2)\widehat{\psi}(z) - \psi'(1)e^{-z} - (\beta - z)\psi(0) \Big). \tag{4.12}$$

Другое выражение для $\widehat{u}(z,t)$ можно вывести, используя определение (4.10). Продифференцировав два раза, получаем уравнение

$$u''(x,t) = t^2 u(x,t) - 2t\psi(x) \tag{4.13}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} u'(0,t) &= tu(0,t), \\ u'(1,t) &= -tu(1,t). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Теперь дважды интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{u}''(z,t) &= \int\limits_0^1 u''(x,t) e^{-zx} dx = u'(1,t)e^{-z} - u'(0,t) + z\widehat{u}'(z,t) = \\ &= (z-t)e^{-z}u(1,t) - (z+t)u(0,t) + z^2 \widehat{u}(z,t), \end{aligned} \tag{4.15}$$

где использовано (4.14). Преобразование Лапласа от (4.13) и подстановка выражения (4.15) дают

$$\widehat{u}(z,t) = \frac{1}{z-t} u(0,t) - \frac{1}{z+t} u(1,t) e^{-z} - \frac{2t}{z^2 - t^2} \widehat{\psi}(z). \tag{4.16}$$

Подставляя (4.16) в (4.12) и упрощая, получаем

$$\widehat{\psi}(z) = \frac{1}{\Lambda(z)} \Big(\Phi_0(z) + e^{-z} \Phi_1(-z) \Big),$$

где функция $\Lambda(z)$ определена в (4.4) и

$$\Phi_0(z) := -\frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}(\beta - z)\psi(0) + \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t-z} u(0,t)dt, \tag{4.17}$$
$$\Phi_1(z) := -\frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}\psi'(1) + \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t-z} u(1,t)dt.$$

Так как $\widehat{\psi}'(z) = -\psi(0) + z\widehat{\psi}(z)$ и $\widehat{\psi}'(z) + \beta\widehat{\psi}(z) = -\widehat{\varphi}(z)$ (см.(4.8)), получаем

$$\widehat{\varphi}(z) = \psi(0) - (z+\beta)\widehat{\psi}(z),$$

что и дает (4.3).

Следующая лемма описывает структуру функции $\Lambda(z)$ и доказывает ряд ее свойств, которые будут использоваться далее.

Лемма 2.

a. *Функция* $\Lambda(z)$ *допускает явное выражение*

$$\Lambda(z) = \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}(z^2-\beta^2) + z^{\alpha-1}\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}\begin{cases} e^{\frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & \arg(z) \in (0,\pi) \\ e^{-\frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & \arg(z) \in (-\pi,0) \end{cases} \tag{4.18}$$

и имеет нули в точках $\pm z_0 = \pm i\nu$, *где* $\nu > 0$ — *вещественный корень уравнения*

$$\lambda = \frac{c_\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}\frac{\nu^{\alpha-1}}{\beta^2+\nu^2}. \tag{4.19}$$

b. *Пределы* $\Lambda^\pm(t) = \lim_{z\to t^\pm}\Lambda(z)$, *когда* z *стремится к* $t \in \mathbb{R}$ *в верхней и нижней полуплоскостях, задаются выражениями*

$$\Lambda^\pm(t) = \frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}(t^2-\beta^2) + |t|^{\alpha-1}\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}\begin{cases} e^{\pm\frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & t > 0 \\ e^{\mp\frac{1-\alpha}{2}\pi i}, & t < 0 \end{cases}$$

и удовлетворяют равенствам

$$\Lambda^+(t) = \overline{\Lambda^-(t)}, \tag{4.20}$$

$$\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} = \frac{\Lambda^-(-t)}{\Lambda^+(-t)}, \tag{4.21}$$

$$\left|\Lambda^+(t)\right| = \left|\Lambda^+(-t)\right|. \tag{4.22}$$

c. *Аргумент* $\theta(t) := \arg\{\Lambda^+(t)\} \in (-\pi, \pi]$ — *нечетная функция,* $\theta(-t) = -\theta(t)$, *задаваемая формулой*

$$\theta(t) = \arctan \frac{\sin \frac{1-\alpha}{2}\pi}{\frac{(t/\nu)^2-(\beta/\nu)^2}{1+(\beta/\nu)^2}(t/\nu)^{1-\alpha} + \cos \frac{1-\alpha}{2}\pi}, \qquad t > 0, \tag{4.23}$$

непрерывная на $(0, \infty)$, *имеющая пределы*

$$\theta(0+) := \frac{1-\alpha}{2}\pi > 0 \quad \text{и} \quad \theta(\infty) := \lim_{t\to\infty} \theta(t) = 0.$$

При всех достаточно больших ν *функция* $\theta(u;\nu) := \theta(u\nu)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\Big|\theta(u;\nu) - \theta_0(u)\Big| \leqslant g(u)(\beta/\nu)^2, \tag{4.24}$$

где $g(u)$ *не зависит от* ν, *непрерывна на* $[0, \infty)$, *растет, как* $g(u) \sim u^{1-\alpha}$ *при* $u \to 0$ *и* $g(u) \sim u^{\alpha-3}$ *при* $u \to \infty$, *а*

$$\theta_0(u) := \lim_{\nu\to\infty} \theta(u\nu) = \arctan \frac{\sin \frac{1-\alpha}{2}\pi}{u^{3-\alpha} + \cos \frac{1-\alpha}{2}\pi}. \tag{4.25}$$

При любом $\beta \in \mathbb{R}$

$$b_\alpha(\beta,\nu) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \theta(u;\nu)du \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \theta_0(u)du = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3-\alpha}\frac{1-\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{3-\alpha}} =: b_\alpha \tag{4.26}$$

и

$$\big|b_\alpha(\beta,\nu) - b_\alpha\big| \leqslant C(\beta/\nu)^2 \tag{4.27}$$

с некоторой постоянной C.

Доказательство леммы 2.

a. Интегрируя по подходящему контуру, легко получить тождество

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{t^2 - z^2}dt = z^{\alpha-1}\frac{1}{2}\frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}\begin{cases} e^{\dfrac{1-\alpha}{2}\pi i}, & \arg(z) \in (0,\pi) \\ e^{-\dfrac{1-\alpha}{2}\pi i}, & \arg(z) \in (-\pi, 0), \end{cases}$$

которое и дает выражение (4.18). Для того чтобы найти все нули $\Lambda(z)$ в верхней полуплоскости, положим $z = \nu e^{i\omega}$, где $\nu > 0$ и $\omega \in (0,\pi)$. Тогда уравнение $\Lambda(z) = 0$ принимает вид

$$\kappa(\nu^2 e^{2i\omega} - \beta^2) + \nu^{\alpha-1}e^{i(\omega-\frac{\pi}{2})(\alpha-1)} = 0,$$

где введена постоянная

$$\kappa := \frac{\lambda \Gamma(\alpha)}{c_\alpha} \frac{\cos \frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}.$$

Мнимая часть этого уравнения дает

$$\kappa \nu^2 \sin 2\omega + \nu^{\alpha-1} \sin(\omega - \tfrac{\pi}{2})(\alpha - 1) = 0.$$

При всех $\omega \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\omega \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ оба синуса здесь имеют один и тот же знак и поэтому равенство возможно только при $\omega = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, в верхней полуплоскости $\Lambda(z)$ обнуляется только в точке $i\nu$, где ν удовлетворяет уравнению (4.19). По определению (4.4) функция $\Lambda(z)$ имеет только комплексно сопряженные нули и поэтому единственный ноль в нижней полуплоскости — это $-i\nu$.

b. Все утверждения проверяются непосредственно с использованием явного выражения (4.18).

c. Заметим, что функция $f(u) := (u^2 - (\beta/\nu)^2)u^{1-\alpha}$, $u \in \mathbb{R}_+$ обнуляется в $u = 0$ и $u = \beta/\nu$ и имеет единственный минимум $\min_{u \geqslant 0} f(u) = -(\beta/\nu)^{3-\alpha} \times \times \frac{2}{3-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{3-\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}$. Поэтому при фиксированном β и всех достаточно больших ν знаменатель (4.23) отделен от нуля равномерно по u. Это свойство позволяет легко проверить все дальнейшие утверждения (значение β_α получено в [10]).

4.1.2. Устранение особенностей. Согласно п. (a) леммы 2 выражение в (4.3) претерпевает разрыв на вещественной оси и имеет два чисто мнимых полюса. Так как преобразование Лапласа является целой функцией, обе эти особенности должны быть устранимыми, т.е. функции $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ должны удовлетворять условиям

$$\Phi_0(\pm z_0) + e^{\mp z_0} \Phi_1(\mp z_0) = 0 \tag{4.28}$$

и

$$\lim_{z \to t^+} \frac{1}{\Lambda(z)} \big(e^{-z} \Phi_1(-z) + \Phi_0(z)\big) = \lim_{z \to t^-} \frac{1}{\Lambda(z)} \big(e^{-z} \Phi_1(-z) + \Phi_0(z)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Последнее условие может быть переписано как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda^+(t)} \Big(\Phi_0^+(t) + e^{-t} \Phi_1(-t)\Big) &= \frac{1}{\Lambda^-(t)} \Big(\Phi_0^-(t) + e^{-t} \Phi_1(-t)\Big), \quad t > 0, \\ \frac{1}{\Lambda^+(t)} \Big(\Phi_0(t) + e^{-t} \Phi_1^-(-t)\Big) &= \frac{1}{\Lambda^-(t)} \Big(\Phi_0(t) + e^{-t} \Phi_1^+(-t)\Big), \quad t < 0 \end{aligned}$$

или (см.(4.21))

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0^+(t) - \frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} \Phi_0^-(t) &= e^{-t} \Phi_1(-t) \left(\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} - 1\right), \\ \Phi_1^+(t) - \frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} \Phi_1^-(t) &= e^{-t} \Phi_0(-t) \left(\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} - 1\right), \end{aligned}\right\} \quad t > 0. \tag{4.29}$$

Поскольку $\Lambda^-(t) = \overline{\Lambda^+(t)}$ и $\theta(t) = \arg\{\Lambda^+(t)\}$, имеем

$$\frac{\Lambda^+(t)}{\Lambda^-(t)} - 1 = e^{2i\theta(t)} - 1 = 2ie^{i\theta(t)} \sin\theta(t).$$

Значит, (4.29) можно переписать как

$$\begin{aligned} &\Phi_0^+(t) - e^{2i\theta(t)}\Phi_0^-(t) = 2ie^{-t}e^{i\theta(t)} \sin\theta(t)\Phi_1(-t), \\ &\Phi_1^+(t) - e^{2i\theta(t)}\Phi_1^-(t) = 2ie^{-t}e^{i\theta(t)} \sin\theta(t)\Phi_0(-t), \end{aligned} \qquad t > 0. \tag{4.30}$$

Из определения (4.10) следует, что $tu(0,t)$ и $tu(1,t)$ ограничены, и поэтому функции, определенные в (4.17), удовлетворяют следующим априорным оценкам:

$$\Phi_1(z) \sim z^{\alpha-1} \quad \text{и} \quad \Phi_0(z) \sim z^{\alpha-1} \quad \text{при } z \to 0, \tag{4.31}$$

а также

$$\Phi_0(z) = 2c_2(\beta - z) + O(z^{-1}) \quad \text{и} \quad \Phi_1(z) = 2c_1 + O(z^{-1}) \quad \text{при } z \to \infty, \tag{4.32}$$

где были введены постоянные

$$c_1 = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}\psi'(1) \quad \text{и} \quad c_2 = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\lambda}{c_\alpha}\psi(0). \tag{4.33}$$

4.1.3. Сведение к эквивалентной задаче. Преобразование Лапласа любого решения спектральной задачи (4.1) задается формулой (4.3), где кусочно-голоморфные функции $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ удовлетворяют оценкам (4.32) и (4.31), краевым условиям (4.30) и алгебраическим ограничениям (4.28). Установим взаимно однозначное соответствие между всеми такими функциями и решениями некоторой системы интегральных уравнений на вещественной полупрямой. Для этой цели воспользуемся техникой решения краевой задачи Гильберта.

Рассмотрим сначала однородную задачу Гильберта, состоящую в нахождении функции $X(z)$, кусочно-голоморфной на разрезанной плоскости $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющей краевым условиям

$$X^+(t) - e^{2i\theta(t)}X^-(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.34}$$

Все такие функции могут быть найдены с помощью формулы Сохоцкого–Племеля:

$$X(z) = z^k X_c(z) = z^k \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\theta(t)}{t-z}dt\right), \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+, \tag{4.35}$$

где k — любое целое число, которое будет выбрано позже. Каноническая часть $X_c(z)$ этого выражения удовлетворяет оценкам

$$X_c(z) = 1 - z^{-1}\nu b_\alpha(\beta,\nu) + O(z^{-2}) \quad \text{при } z \to \infty, \tag{4.36}$$

где $b_\alpha(\beta,\nu)$ определено в (4.26), и

$$X_c(z) \sim z^{\frac{\alpha-1}{2}} \quad \text{при } z \to 0. \tag{4.37}$$

Введем функции

$$\begin{aligned} S(z) &:= \frac{\Phi_0(z)+\Phi_1(z)}{2X(z)},\\ D(z) &:= \frac{\Phi_0(z)-\Phi_1(z)}{2X(z)}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

которые, благодаря (4.30) и (4.34), удовлетворяют *независимым* краевым условиям

$$\begin{aligned} S^+(t) - S^-(t) &= \ \ 2ih(t)e^{-t}S(-t),\\ D^+(t) - D^-(t) &= -2ih(t)e^{-t}D(-t), \end{aligned} \qquad t>0, \tag{4.39}$$

где

$$h(t) := e^{i\theta(t)}\sin\theta(t)\frac{X(-t)}{X^+(t)}.$$

Вычисления, подобные уравнению (5.37) в [10], показывают, что эта функция допускает представление

$$h(t) = \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \theta'(s)\log\left|\frac{t+s}{t-s}\right| ds\right)\sin\theta(t) \tag{4.40}$$

и поэтому вещественна, удовлетворяет условию Гёльдера на $\mathbb{R}_+$ и имеет предел

$$h(0) := \sin\theta(0+) = \sin\frac{1-\alpha}{2}\pi.$$

Применяя формулу Сохоцкого–Племеля к (4.39), получаем следующее представление для функций из (4.38):

$$\begin{aligned} S(z) &= \ \ \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{h(t)e^{-t}}{t-z}S(-t)dt + P_S(z),\\ D(z) &= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{h(t)e^{-t}}{t-z}D(-t)dt + P_D(z), \end{aligned} \tag{4.41}$$

где полиномы $P_S(z)$ и $P_D(z)$ выбираются в соответствии с априорной оценкой роста $S(z)$ и $D(z)$ при $z \to \infty$. Заметим, что интегралы в правой части (4.41) хорошо определены, только если $S(-t)$ и $D(-t)$ интегрируемы в нуле. Ввиду оценок (4.31) и (4.37), это ограничивает выбор целого числа k в выражении (4.35) неравенством $k < (\alpha+1)/2$. Далее, понадобится, чтобы $S(-t)$ и $D(-t)$ были так же квадратично интегрируемы, что сужает ограничение до $k < \alpha/2$. Удобным выбором, который удовлетворяет всем этим условиям, будет $k = 0$, что соответствует определению $X(z) := X_c(z)$.

Так как для любых вещественных чисел a, b и c верно

$$\frac{az + b + O(z^{-1})}{1 - cz^{-1} + O(z^{-2})} = a(z+c) + b + O(z^{-1}) \quad \text{при } z \to \infty,$$

априорные оценки (4.32) и (4.36) дают

$$\begin{aligned} S(z) &= c_2\big(- z + \beta - \nu b_\alpha(\beta,\nu)\big) + c_1 + O(z^{-1}), \\ D(z) &= c_2\big(- z + \beta - \nu b_\alpha(\beta,\nu)\big) - c_1 + O(z^{-1}). \end{aligned}$$

Эта асимптотика определяет выбор полиномов в (4.41):

$$\begin{aligned} P_S(z) &:= c_2(-z + \beta - \nu b_\alpha(\beta,\nu)) + c_1, \\ P_D(z) &:= c_2(-z + \beta - \nu b_\alpha(\beta,\nu)) - c_1, \end{aligned}$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются (4.33). Теперь, подставляя $z := -t$ в (4.41), где $t \in \mathbb{R}_+$, получаем интегральные уравнения для сужений $S(-t)$ и $D(-t)$:

$$\begin{aligned} S(-t) &= \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{h(s)e^{-s}}{s+t} S(-s)ds + c_2\big(t + \beta - \nu b_\alpha(\beta,\nu)\big) + c_1, \\ D(-t) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{h(s)e^{-s}}{s+t} D(-s)ds + c_2\big(t + \beta - \nu b_\alpha(\beta,\nu)\big) - c_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательные интегральные уравнения

$$p^{\pm}{}_j(t) = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{h_\beta(s;\nu)e^{-\nu s}}{s+t} p^{\pm}{}_j(s)ds + t^j, \quad j \in \{0,1\}, \tag{4.42}$$

где $h_\beta(u;\nu) := h(u\nu)$, $u > 0$. Ниже покажем, что для всех достаточно больших ν эти уравнения имеют единственные решения в классе функций, таких что $p^{\pm}{}_j(t) - t^j$ принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R}_+)$. Продолжим определение решений $p^{\pm}{}_j(z)$ на разрезанную плоскость, заменив t в правой части уравнения (4.42) на $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Так как по построению $S(-t)$ и $D(-t)$ квадратично интегрируемы в нуле, по линейности имеем

$$S(z\nu) = c_2\nu {p^+}_1(-z) + \Big(c_2\big(\beta - \nu b_\alpha(\beta,\nu)\big) + c_1\Big){p^+}_0(-z),$$
$$D(z\nu) = c_2\nu {p^-}_1(-z) + \Big(c_2\big(\beta - \nu b_\alpha(\beta,\nu)\big) - c_1\Big){p^-}_0(-z).$$

Поэтому, положив

$$a_\pm(z) := {p^+}_0(z) \pm {p^-}_0(z),$$
$$b_\pm(z) := {p^+}_1(z) \pm {p^-}_1(z)$$

и используя определение (4.38), получим

$$\begin{aligned}\Phi_0(z\nu) &= c_2\nu X(z\nu)(b_+(-z) + \big(\beta/\nu - b_\alpha(\beta,\nu)\big)a_+(-z)) + c_1 X(z\nu)a_-(-z),\\ \Phi_1(z\nu) &= c_2\nu X(z\nu)(b_-(-z) + (\beta/\nu - b_\alpha(\beta,\nu))a_-(-z)) + c_1 X(z\nu)a_+(-z).\end{aligned} \tag{4.43}$$

Теперь, определив $X_\beta(z;\nu) := X(z\nu)$, подставим эти выражения в условие (4.28) и получим

$$c_2\nu\xi + c_1\eta = 0, \tag{4.44}$$

где

$$\begin{aligned}\xi &:= e^{i\nu/2}X_\beta(i;\nu)\Big(b_+(-i) + \big(\beta/\nu - b_\alpha(\beta,\nu)\big)a_+(-i)\Big) +\\ &\qquad + e^{-i\nu/2}X_\beta(-i;\nu)\Big(b_-(i) + \big(\beta/\nu - b_\alpha(\beta,\nu)\big)a_-(i)\Big),\\ \eta &:= e^{i\nu/2}X_\beta(i;\nu)a_-(-i) + e^{-i\nu/2}X_\beta(-i;\nu)a_+(i).\end{aligned} \tag{4.45}$$

Так как постоянные c_1 и c_2 вещественны, нетривиальные решения линейной алгебраической системы (4.44) существуют тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\operatorname{Im}\{\xi\overline{\eta}\} = 0, \tag{4.46}$$

при этом $c_1 = -c_2\nu\xi/\eta$. Подставляя это равенство в (4.43), получим

$$\begin{aligned}\Phi_0(z)/c_2\nu &= X(z)\left(b_+\left(-\frac{z}{\nu}\right) + \left(\frac{\beta}{\nu} - b_\alpha(\beta,\nu)\right)a_+\left(-\frac{z}{\nu}\right)\right) - \frac{\xi}{\eta}X(z)a_-\left(-\frac{z}{\nu}\right),\\ \Phi_1(z)/c_2\nu &= X(z)\left(b_-\left(-\frac{z}{\nu}\right) + \left(\frac{\beta}{\nu} - b_\alpha(\beta,\nu)\right)a_-\left(-\frac{z}{\nu}\right)\right) - \frac{\xi}{\eta}X(z)a_+\left(-\frac{z}{\nu}\right).\end{aligned} \tag{4.47}$$

Итак, получена задача, эквивалентная уравнению (4.1).

Лемма 3. Пусть $({p^\pm}_0, {p^\pm}_1, \nu)$ — решение системы, состоящей из интегральных уравнений (4.42) и алгебраических условий (4.46). Определим φ преобразованием Лапласа, задающимся выражением (4.3), где $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ определены формулами (4.47), а число $\lambda \in \mathbb{R}_+$ — формулой (4.19). Тогда пара (λ,φ) решает спектральную задачу (4.1). Верно и обратное: по любому решению (λ,φ) задачи (4.1) можно построить решение вышеупомянутой интегрально-алгебраической системы.

В следующей лемме получена точная асимптотика $X_\beta(i;\nu)$ при $\nu\to\infty$, которая понадобится в дальнейшем для асимптотического анализа.

Лемма 4.

$$\arg\left\{X_\beta(i;\nu)\right\}=\frac{1-\alpha}{8}\pi+O(\nu^{-2})\quad \text{и}\quad \left|X_\beta(i;\nu)\right|=\sqrt{\frac{3-\alpha}{2}}+O(\nu^{-2})\quad \nu\to\infty.$$

Доказательство леммы 4. Постоянные в правой части — аргумент и абсолютное значение предела, см. (4.25),

$$X_0(i):=\lim_{\nu\to\infty}X_\beta(i;\nu)=\exp\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\theta_0(u)}{u-i}du\right),$$

вычисленные в [10, лемма 5.5]. Оценки остатков следуют из неравенств (4.24).

4.1.4. Свойства интегрально-алгебраической системы. Разрешимость системы, введенной в лемме 3, обеспечивается сжатием оператора

$$(Af)(t):=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{h_\beta(s;\nu)e^{-\nu s}}{s+t}f(s)ds,$$

где $h_\beta(u;\nu):=h(u\nu)$ (см. (4.40)):

$$h_\beta(u;\nu)=\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\theta'(v;\nu)\log\left|\frac{u+v}{u-v}\right|dv\right)\sin\theta(u;\nu). \tag{4.48}$$

Лемма 5. Оператор A является сжимающим на пространстве функций $L^2(\mathbb{R}_+)$ для всех достаточно больших ν, а именно, для каждого $\alpha_0\in(0,1]$ существует $\varepsilon>0$ и постоянная $\nu'>0$, такие что $\|A\|\leqslant 1-\varepsilon$ для всех $\nu\geqslant\nu'$ и $\alpha\in[\alpha_0,1]$.

Доказательство леммы 5. Непосредственное вычисление показывает, что для всех достаточно больших ν и всех $\alpha\in[\alpha_0,1]$ показатель экспоненты в (4.48) ограничен непрерывной функцией $f(u)$, не зависимой от α и ν, пределы которой при $u\to 0$ и $u\to\infty$ равны 1. В частности,

$$h_\beta(u,\nu)\leqslant f(u)\sin\theta(u;\nu)\leqslant\|f\|_\infty.$$

Далее, так как $\theta_0(0+)=\frac{1-\alpha}{2}\pi$, благодаря оценке (4.24), существует окрестность нуля, где при всех достаточно больших ν справедлива верхняя оценка

$$\sin\theta(u;\nu)\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{1-\alpha_0}{2}\pi=:1-3\varepsilon.$$

Так как $f(0)=1$, это так же гарантирует, что $h_\beta(u,\nu)<1-2\varepsilon$ в некоторой окрестности нуля. Тогда, поскольку $\sup_{\nu>0}\|h_\beta\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$, можно выбрать постоянную ν' такую что $h_\beta(u,\nu)e^{-\nu u}<1-\varepsilon$ при всех $u>0$ и всех $\nu\geqslant\nu'$. Далее доказательство проводится точно так же, как в [10, лемма 5.6].

Следующие оценки играют ключевую роль в асимптотическом анализе интегрально-алгебраической системы леммы 3.

Лемма 6. Для любого $\alpha_0 \in (0,1]$ существуют постоянные ν' и C, такие что при всех $\nu \geqslant \nu'$ и $\alpha \in [\alpha_0, 1]$

$$\begin{aligned}
\big|a_-(\pm i)\big| \leqslant C\nu^{-1}, \quad \big|a_+(\pm i) - 2\big| \leqslant C\nu^{-1},\\
\big|b_-(\pm i)\big| \leqslant C\nu^{-2}, \quad \big|b_+(\pm i) \mp 2i\big| \leqslant C\nu^{-2},
\end{aligned}$$

а также при любых $\tau > 0$

$$\begin{aligned}
\big|a_-(\tau)\big| \leqslant C\nu^{-1}\tau^{-1}, \quad \big|a_+(\tau) - 2\big| \leqslant C\nu^{-1}\tau^{-1},\\
\big|b_-(\tau)\big| \leqslant C\nu^{-2}\tau^{-1}, \quad \big|b_+(\tau) \mp 2\tau\big| \leqslant C\nu^{-2}\tau^{-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 6. Как показано в доказательстве предыдущей леммы, функция $h_\beta(u;\nu)$ может быть ограничена постоянной, зависящей только от α_0, при всех достаточно больших ν. Эта оценка позволяет провести доказательство точно так же, как в [10, лемма 5.7].

4.1.5. Обращение преобразования Лапласа. В следующей лемме собственные функции выражаются в терминах решений интегрально-алгебраической системы уравнений леммы 3.

Лемма 7. Пусть (Φ_0, Φ_1, ν) являются решениями интегрально-алгебраической системы леммы 3. Тогда функция φ, определяемая преобразованием Лапласа (4.3), задается равенством

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = -\nu^{3-\alpha}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}\, 2\operatorname{Re}\left\{e^{i\nu x}\Phi_0(i\nu)\frac{1 - i(\beta/\nu)}{\frac{2}{(\beta/\nu)^2+1} - \alpha + 1}\right\} + \nu^{3-\alpha}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}\frac{1}{\pi}\times\\
\times\int_0^\infty \frac{\sin\theta_\beta(u;\nu)}{\gamma_\beta(u;\nu)}\left(e^{-(1-x)u\nu}\left(u + \frac{\beta}{\nu}\right)\Phi_1(-u\nu) - e^{-u\nu x}\left(u - \frac{\beta}{\nu}\right)\Phi_0(-u\nu)\right)du,
\end{aligned} \tag{4.49}$$

где $\gamma_\beta(u;\nu)$ определена формулой (4.51) ниже. Также имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{\beta x}\varphi(x)dx = -\nu^{3-\alpha}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}2c_2\big(1 + (\beta/\nu)^2\big),\\
\varphi(1) = -\nu^{3-\alpha}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}2c_2\nu\frac{\xi}{\eta}\big(1 + (\beta/\nu)^2\big).
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Доказательство леммы 7. Поскольку $\widehat{\varphi}(z)$ — аналитическая функция, обращение преобразования Лапласа (4.3) может производиться интегрированием по мнимой оси:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{-iR}^{iR}\left(\frac{z+\beta}{\Lambda(z)}\Phi_0(z) + \frac{z+\beta}{\Lambda(z)}e^{-z}\Phi_1(-z) - \psi(0)\right)e^{zx}dz =\\
= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{-iR}^{iR}\big(f_0(z) + f_1(z)\big)dz,
\end{aligned}$$

где были введены функции

$$f_0(z) = e^{zx}\left((z+\beta)\frac{\Phi_0(z)}{\Lambda(z)} - \psi(0)\right) \quad \text{и} \quad f_1(z) = e^{(x-1)z}(z+\beta)\frac{\Phi_1(-z)}{\Lambda(z)}.$$

Интегрируя по подходящему контуру, как в доказательстве леммы 5.8 в [10], получаем

$$\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \big(f_1(z) + f_0(z)\big)dz = 2\pi i\Big(\mathrm{Res}(f_0, z_0) + \mathrm{Res}(f_0, -z_0)\Big) +$$
$$+ \int\limits_0^\infty \big(f_1^+(t) - f_1^-(t)\big)dt + \int\limits_0^\infty \big(f_0^-(-t) - f_0^+(-t)\big)dt.$$

Используя симметрии (4.20) и (4.22), а также определение $\theta(t)$, имеем

$$f_1^+(t) - f_1^-(t) = -e^{(x-1)t}(t+\beta)\Phi_1(-t)\frac{2i\sin\theta(t)}{\gamma(t)},$$
$$f_0^-(-t) - f_0^+(-t) = -e^{-tx}(-t+\beta)\Phi_0(-t)\frac{2i\sin\theta(t)}{\gamma(t)},$$

где $\gamma(t) = |\Lambda^+(t)|$, а значит и

$$\varphi(x) = -\mathrm{Res}\big(f_0, z_0\big) - \mathrm{Res}\big(f_0, -z_0\big) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\theta(t)}{\gamma(t)}\left(e^{-(1-x)t}(t+\beta)\Phi_1(-t) - e^{-tx}(t-\beta)\Phi_0(-t)\right)dt.$$

Вычеты здесь легко считаются

$$\mathrm{Res}\big(f_0, z_0\big) = e^{i\nu x}(i\nu+\beta)\frac{\Phi_0(i\nu)}{\Lambda'(i\nu)} = e^{i\nu x}\Phi_0(i\nu)\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}\nu^{3-\alpha}\frac{1 - i(\beta/\nu)}{\frac{2}{(\beta/\nu)^2+1} - \alpha + 1},$$
$$\mathrm{Res}\big(f_0, -z_0\big) = e^{-i\nu x}(-i\nu+\beta)\frac{\Phi_0(-i\nu)}{\Lambda'(-i\nu)} =$$
$$= e^{-i\nu x}\Phi_0(-i\nu)\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}\nu^{3-\alpha}\frac{1 + i(\beta/\nu)}{\frac{2}{(\beta/\nu)^2+1} - \alpha + 1}$$

и, таким образом,

$$\mathrm{Res}\big(f_0, z_0\big) + \mathrm{Res}\big(f_0, -z_0\big) = 2\nu^{3-\alpha}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}\mathrm{Re}\left\{e^{i\nu x}\Phi_0(i\nu)\frac{1 - i(\beta/\nu)}{\frac{2}{(\beta/\nu)^2+1} - \alpha + 1}\right\}.$$

Подставляя это выражение, получаем (4.49), где

$$\gamma_\beta(u;\nu) = \nu^{1-\alpha}\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\pi}\big|\Lambda^+(u\nu)\big| = \left|\frac{u^2 - (\beta/\nu)^2}{(\beta/\nu)^2 + 1} + u^{\alpha-1}e^{\frac{1-\alpha}{2}\pi i}\right|. \tag{4.51}$$

Формулы (4.50) следуют из (4.33), (4.19) и (4.44).

4.1.6. Асимптотический анализ. По лемме 3 спектральная задача (4.1) сводится к решению инегрально-алгебраической системы уравнений. В следующей лемме получена точная асимптотика его алгебраической части.

Л е м м а 8. *Интегрально-алгебраическая система леммы 3 имеет счетное множество решений, которые могут быть пронумерованы таким образом, что*

$$\nu_n = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1-\alpha}{4}\pi + \arcsin\frac{b_\alpha}{\sqrt{1+b_\alpha^2}} + n^{-1}r_n(\alpha), \quad n\to\infty, \tag{4.52}$$

где остаток $r_n(\alpha)$ ограничен равномерно по $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha\in[\alpha_0,1]$ при всех $\alpha_0\in(0,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о   л е м м ы 8. Доказательство проводится так же, как и в [10, лемма 5.9]. Подставляя оценки, полученные в леммах 6 и 4, а также неравенство (4.27) в определение (4.45), можем записать

$$\xi\overline{\eta} = 4\frac{3-\alpha}{2}\sqrt{1+b_\alpha^2}\exp\left\{i\Big(\nu+\frac{1-\alpha}{4}\pi-\pi+\arg\big\{i+b_\alpha\big\}\Big)\right\}\big(1+R(\nu)\big),$$

где функция $R(\nu)$ удовлетворяет неравенству $|R(\nu)|\leqslant C_1\nu^{-1}$ для некоторой постоянной C_1, зависящей только от α_0. Поэтому уравнение (4.46) принимает вид

$$\nu+\frac{1-\alpha}{4}\pi-\pi+\arg\big\{i+b_\alpha\big\}-\pi n+\arctan\frac{\mathrm{Im}\{R(\nu\}}{1+\mathrm{Re}\{R(\nu)\}}=0, \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{4.53}$$

Это фиксирует нумерацию всех решений интегрально-алгебраической системы леммы 3. Понятно, что ν положительно для всех n, превосходящих некоторое целое число. Однако на этом этапе существование решения для каждого такого n все еще не очевидно. Оно может быть установлено следующим образом.

Согласно лемме 5 интегральный оператор в правой части уравнений (4.42) является сжимающим на $L_2(\mathbb{R}_+)$ для всех достаточно больших ν. Непосредственное вычисление показывает, что $|R'(\nu)|\leqslant C_2\nu^{-1}$ с некоторой постоянной C_2. Поэтому для всех достаточно больших n система, состоящая из интегральных и алгебраических уравнений (4.42) и (4.53) соответственно, имеет единственное решение, которое может быть получено как неподвижная точка, путем итерирования интегрально-алгебраического оператора. Асимптотика (4.52) следует из (4.53), так как $\arg\{i+b_\alpha\}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{b_\alpha}{\sqrt{1+b_\alpha^2}}$.

Соответствующее асимптотическое приближение собственных функций может быть получено с помощью следующей леммы.

Л е м м а 9. *Собственные функции, пронумерованные как в лемме 8, допускают приближение*

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2}\cos\left(\nu_n x+\frac{1-\alpha}{8}\pi+\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{b_\alpha}{\sqrt{1+b_\alpha^2}}\right)+ \tag{4.54}$$

$$+\frac{\sqrt{3-\alpha}}{\pi}\int_0^\infty \rho_0(u)\left(-e^{-u\nu_n x}\frac{u-b_\alpha}{\sqrt{1+b_\alpha^2}}-(-1)^n e^{-(1-x)u\nu_n}\right)du+n^{-1}r_n(x),$$

где остаток $r_n(x)$ равномерно ограничен по $n\in\mathbb{N}$ и $x\in[0,1]$, а

$$\rho_0(u)=\frac{\sin\theta_0(u)}{\gamma_0(u)}X_0(-u).$$

Кроме того,

$$\varphi_n(1)\propto-(-1)^n\sqrt{3-\alpha}\big(1+O(n^{-1})\big)\ \text{и}\ \int_0^1 e^{\beta x}\varphi_n(x)dx\propto-\sqrt{\frac{3-\alpha}{1+b_\alpha^2}}\nu_n^{-1}\tag{4.55}$$

и

$$\int_0^1\varphi_n(x)dx\propto-\sqrt{\frac{3-\alpha}{1+b_\alpha^2}}\nu_n^{-1}.\tag{4.56}$$

Доказательство леммы 9.

Положим $\gamma_0(u):=\left|u+u^{\alpha-2}e^{\frac{1-\alpha}{2}\pi i}\right|$, тогда согласно (4.51)

$$\big|\gamma_\beta(u;\nu)-u\gamma_0(u)\big|\leqslant 2(\beta/\nu)^2(u^2+1).$$

Вместе с (4.24) выражение (4.49) дает

$$\varphi_n(x)\propto-\frac{2}{3-\alpha}\mathrm{Re}\Big\{e^{i\nu_n x}\Phi_0(i\nu_n)\Big\}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\theta_0(u)}{\gamma_0(u)}\Big(e^{-(1-x)u\nu_n}\Phi_1(-u\nu_n)-e^{-u\nu_n x}\Phi_0(-u\nu_n)\Big)du+n^{-1}r_n(x)$$

где остаток $r_n(x)$ равномерно ограничен по $n\in\mathbb{N}$ и $x\in[0,1]$. Приближение (4.54) получается подстановкой оценок из леммы 6 и леммы 4, а также неравенства (4.27) в выражение (4.47) и приведением к единичной $L^2([0,1])$ норме, так же, как и в (5.52) [10]. Формулы (4.50) дают асимптотики (4.55) с помощью той же нормировки.

Асимптотика (4.56) получается интегрированием (4.49): непосредственное вычисление показывает, что

$$\int_0^1\varphi_n(x)dx=C\nu_n^{-1}\big(1+O(\nu_n^{-1})\big),\quad n\to\infty,$$

где $C\nu_n^{-1}$ совпадает с интегралом выражения (4.54) без остатка. Так как это выражение не зависит от β, постоянный множитель C должен совпадать со значением, которое получается при $\beta=0$. Другими словами, последовательности интегралов $\int_0^1\varphi_n(x)dx$ для дробного процесса Орнштейна–Уленбека и дробного броуновского движения имеют одну и ту же асимптотику первого порядка. Поэтому постоянная в (4.56) совпадает с (5.53) в [10].

4.1.7. Переход к естественной нумерации. Нумерация, введенная в лемме 8, может не совпадать с *естественной*, при которой последовательность собственных значений убывает. Заметим, что подстановка выражения (4.52) в формулу (4.19) дает последовательность λ_n, убывающую в уже выбранной нумерации. Поэтому начиная с некоторого индекса обе нумерации отличаются только на конечный сдвиг. Для определения этого сдвига можно воспользоваться процедурой калибровки, использующей непрерывность спектра по параметру α и уже известную асимптотику (2.3) для стандартного процесса Орнштейна–Уленбека, соответствующего значению $\alpha = 1$. Калибровка проводится точно так же, как и в случае дробного броуновского движения, см. [10, гл. 5.1.7], которая показывает, что формулы (4.52) и (4.54)–(4.55) сдвигаются на единицу: заменив n на $n-1$, а α на $2-2H$, получим равенство (2.5) из теоремы 2.

4.2. Случай $H < \frac{1}{2}$

В этом случае ковариационная функция задается формулой (1.3) и спектральная задача имеет вид

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x e^{\beta(x-u)} \frac{d}{du} \int\limits_0^y e^{\beta(y-v)} C_\alpha |u-v|^{1-\alpha} \mathrm{sign}(u-v) dv du \right) \varphi(y) dy = \lambda \varphi(x),$$

где $C_\alpha := 1 - \frac{\alpha}{2}$. Дважды дифференцируя, получаем

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{d}{dx} \int\limits_0^y e^{\beta(y-v)} C_\alpha |x-v|^{1-\alpha} \mathrm{sign}(x-v) dv \right) \varphi(y) dy + \beta\lambda\varphi(x) = \lambda\varphi'(x),$$

что может быть переписано как

$$-\frac{d}{dx} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^y e^{-\beta v} C_\alpha |x-v|^{1-\alpha} \mathrm{sign}(x-v) dv \right) \frac{d}{dy} \int\limits_y^1 e^{\beta r} \varphi(r) dr dy + \beta\lambda\varphi(x) = \\ = \lambda\varphi'(x).$$

Интегрирование по частям дает

$$\frac{d}{dx} \int\limits_0^1 C_\alpha |x-y|^{1-\alpha} \mathrm{sign}(x-y) \psi(y) dy + \beta\lambda\varphi(x) = \lambda\varphi'(x),$$

где $\psi(x)$ определяется так же, как в (4.6). Используя тождество (4.8) приходим к обобщенной спектральной задаче (см. (4.7)):

$$\frac{d}{dx} \int\limits_0^1 C_\alpha |x-y|^{1-\alpha} \mathrm{sign}(x-y) \psi(y) dy = \lambda \Big(\beta^2 \psi(x) - \psi''(x) \Big), \quad x \in [0,1],$$

$$\psi(1) = 0, \quad \psi'(0) + \beta\psi(0) = 0.$$

Далее доказательство проводится так же, как и в предыдущем случае $H > \frac{1}{2}$.

5. Заключение

В этой работе получена точная асимптотика ошибки в задаче оценки дробного процесса Орнштейна–Уленбека, наблюдаемого в белом шуме малой интенсивности $\varepsilon \to 0$. Благодаря свойству инвариантности (2.2) результат остается верным на произвольном *конечном* интервале времени, и при этом главный член асимптотики не зависит от длины интервала T. Другой интересной задачей является нахождение предела ошибки, когда $T \to \infty$ при фиксированной интенсивности шума. Такой асимптотический анализ в рамках предложенного метода требует, чтобы спектральные оценки, полученные в теореме 2, были равномерны по T. Из доказательства теоремы подобное свойство равномерности не следует, и изучение асимптотики больших времен, возможно, потребует другого подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mishura Y.S.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. Volume 1929 of Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
2. *Pipiras V., Taqqu M.S.* Long-range dependence and self-similarity. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, [45]. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
3. *Cheridito P., Kawaguchi H., Maejima M.* Fractional Ornstein — Uhlenbeck processes // Electron. J. Probab. 2003. V. 8. No. 3. P. 14.
4. *Liptser R.S., Shiryaev A.N.* Statistics of random processes I. Volume 5 of Applications of Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
5. *Kalman R., Bucy R.* New results in linear filtering and prediction theory // J. Basic Engineer. 1961. V. 83. No. 1. P. 95–108.
6. *Liptser R.S., Shiryaev A.N.* Statistics of random processes II. Volume 6 of Applications of Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
7. *Ibragimov I.A., Has'minskii, R.Z.* Statistical Estimation. Asymptotic Theory. Volume 16 of Applications of Mathematics. Springer, 1981.
8. *Tsybakov A. B.* Introduction to nonparametric estimation. Springer Series in Statistics. N.Y.: Springer, 2009.
9. *Ukai S.* Asymptotic distribution of eigenvalues of the kernel in the Kirkwood-Riseman integral equation. // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 83–92.
10. *Chigansky P., Kleptsyna M.* Exact asymptotics in eigenproblems for fractional Brownian covariance operators // Stochast. Process. Appl. 2018. V. 128. No. 6. P. 2007–2059.
11. *Gakhov F.D.* Boundary value problems. N.Y.: Dover Publicat., Inc., 1990.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 15.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019