Автоматика и телемеханика, № 3, 2020

© 2020 г. **Н.А. КУЗНЕЦОВ, акад. РАН (kuznetsov@cplire.ru)**
(Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва;
Московский физико-технический институт),
К.В. СЕМЕНИХИН, д-р физ.-мат. наук (siemenkv@rambler.ru)
(Московский авиационный институт;
Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва)

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ МОДЕЛИ ЗАМКНУТОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассматривается замкнутая сеть, состоящая из двух систем массового обслуживания: основная система моделирует очередь на передачу пакетов по ненадежному каналу связи, а вспомогательная многоканальная система содержит потерянные пакеты для повторной отправки. Интенсивность обслуживания в основной системе является управляемой и подлежит оптимизации с целью минимизации времени успешной передачи с учетом цены использования ресурсов сети. Получены условия оптимальности искомого управления в двух вариантах: 1) в модели, основанной на жидкостной аппроксимации при наличии сильной загрузки; 2) в установившемся режиме при использовании стационарных стратегий.

Ключевые слова: замкнутая сеть массового обслуживания, жидкостная аппроксимация, марковский процесс, оптимальное управление.

DOI: 10.31857/S0005231020030058

1. Введение

Данная статья лежит в русле исследований [1–8], посвященных оптимизации управляемых инфокоммуникационных систем и сетей, и во многом основана на статье [9], опубликованной Р.Ш. Липцером с соавторами в связи с задачей о жидкостной и диффузионной аппроксимации замкнутой марковской сети массового обслуживания в загруженном состоянии.

Первые исследования замкнутых сетей массового обслуживания были проведены в [10]. Математические основания теории сетей с очередями изложены в [11]. Базовые результаты в области управления системами массового обслуживания (СМО) представлены в [12, 13]. Диффузионным и жидкостным аппроксимациям СМО и сетей посвящены [14, 15].

Методы оптимизации марковских процессов, описывающих работу СМО в стационарном режиме, изложены в [16]. Методология условной оптимизации дискретных марковских моделей разработана в [17]. В нестационарной постановке задача управления марковским процессом при наличии ограничений изучалась в [18].

В [19] доказана пороговая структура оптимальной децентрализованной стратегии при управлении интенсивностью обслуживания на каждом узле замкнутой сети по критерию минимума стоимости удержания заявки и ресурсов системы. В [20] тот же результат распространен на более общий случай аффинной функции потерь.

В данной статье исследуется марковская модель замкнутой сети [9], которая моделирует процесс передачи данных по ненадежному каналу связи. Рассматриваемая сеть состоит из двух СМО: основная система моделирует очередь на передачу пакетов, а вспомогательная многоканальная система принимает потерянные пакеты для повторной отправки. Так же, как в [6], скорость передачи является управляемой, но теперь в модели предусмотрен механизм повторной отправки потерянных пакетов. Модели СМО с повторными вызовами востребованы при моделировании работы контакт-центров, в которых допускаются повторения обращений клиентов из-за занятости операторов или из-за завершения времени ожидания [21]. В рассматриваемой модели для оптимизации работы системы выделены два показателя качества: время успешной отправки пакета и объем использованных ресурсов. Для выработки приближенной стратегии управления применена жидкостная аппроксимация, позволяющая изучать управляемую систему в среднем при наличии сильной загрузки.

2. Описание модели и постановка задачи

Рассмотрим сеть массового обслуживания, состоящую из двух систем: основной и вспомогательной. Основная система содержит очередь и описывает последовательную передачу однотипных пакетов по ненадежному каналу связи при наличии постоянного входного трафика. Вспомогательная система является многоканальной и используется для моделирования повторной отправки пакетов в случае их потери.

Будем считать, что в данной сети циркулирует постоянное число пакетов N, которое отражает стабильный уровень загрузки сети передачи данных.

Пусть $\ell(t)$ — вероятность потери пакета, причем $0 \leqslant \ell(t) < 1$, $\mu(t,x)$ — скорость передачи, выбираемая из диапазона

$$m_{\min} \leqslant \mu(t,x) \leqslant m_{\max}, \quad \text{где} \quad 0 < m_{\min} < m_{\max} < \infty, \tag{1}$$

а $\alpha(t)(N-x)$ — скорость отправки пакета из вспомогательной системы в основную для повторной попытки передачи, где x обозначает число пакетов в основной системе в момент времени t. Тем самым $\mu(t,x)$ и $\alpha(t)$ — суть интенсивности обслуживания на серверах основной и вспомогательной системы соответственно. Функция $\alpha(t) > 0$ определяет ресурсы, которые способна выделить сеть для обработки запросов на повторную отправку пакетов на фоне меняющейся во времени загрузки вычислительных мощностей. Переменный характер этой загрузки и нестационарность потока потерь могут быть использованы для описания процесса передачи данных с борта беспилотного летательного аппарата, который в автономном режиме должен обеспечивать устойчивое управление своим движением и пересылку полезной информации в условиях изменяющейся окружающей обстановки.

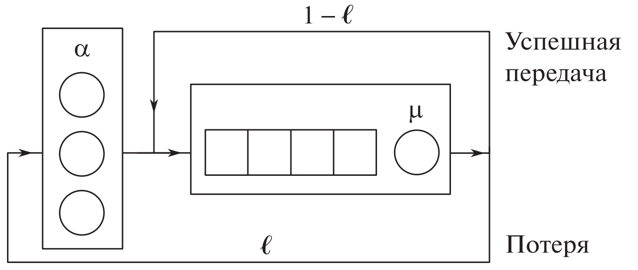

Рис. 1. Модель сети из двух систем: слева — вспомогательная, справа — основная.

На рис. 1 изображена схема рассматриваемой сети передачи данных. Петля соответствует успешной передаче, которая происходит с вероятностью $1 - \ell(t)$. Если пакет успешно отправлен, то он покидает основную систему и в этот же момент к ней присоединяется новый пакет, подлежащий дальнейшей отправке. Тем самым в случае успешной передачи число заявок в основной системе не меняется.

Потери при передаче происходят с интенсивностью $\ell(t)\mu(t,x)$, если $x > 0$. В этом случае число заявок в основной системе уменьшается, а во вспомогательной системе увеличивается на единицу. При этом внешний пакет блокируется, так как для входа в систему он должен дождаться первой успешной отправки.

При нулевом состоянии основной системы $x = 0$ входящий трафик также блокируется. Но происходит это с целью, чтобы у нового пакета была возможность попасть во вспомогательную систему в случае неудачной передачи без изменения общего числа пакетов, циркулирующих в сети.

Возвращение пакета из вспомогательной системы в основную происходит с интенсивностью $\alpha(t)$ и независимым от состояния сети образом. В этом случае число пакетов в основной системе становится на один больше, а во вспомогательной системе — на один меньше.

Важно отметить, что упоминание входящего трафика используется здесь только для интерпретации замкнутой сети как модели передачи пакетных данных: непосредственного влияния входной поток на состояние систем не оказывает. Поэтому число пакетов N необходимо трактовать не как размер пространства, доступного для размещения пакетов, а как фиксированный уровень загрузки.

На отрезке времени $[0, T]$ работу сети передачи данных будем описывать с помощью неоднородного марковского процесса рождения и гибели $X(t)$ со значениями в множестве $E = \{0, 1, \ldots, N\}$. Тогда число пакетов в основной и вспомогательной системах равно $X(t)$ и $N - X(t)$ соответственно. Процесс $X(t)$ имеет генератор $\Lambda(t) = \{\lambda_{x,y}(t)\}_{x,y \in E}$, однозначно определяемый интенсивностями двух переходов $x \to x \pm 1$: $\lambda_{x,x+1}(t) = \alpha(t)(N - x)$ — интенсивность поступления пакета из вспомогательной системы на повторную отправку, когда в основной системе $x < N$ заявок; $\lambda_{x,x-1}(t) = \ell(t)\mu(t,x)$ — интенсивность пересылки пакета во вспомогательную систему при неудачной попытке его передачи, когда основная система содержит $x > 0$ заявок.

Функции $\ell(t)$ и $\alpha(t)$ считаются далее непрерывными.

Качество работы рассматриваемой сети будем описывать с помощью двух характеристик

$$\mathfrak{S}_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathsf{M}S(t)\,dt \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}_T = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathsf{M}R(t)\,dt,$$

где $S(t)$ — время полной передачи пакета, поступающего в момент t, а $R(t)$ — мгновенная мощность использования сетью своих ресурсов, связанных с передачей информации и обработкой запросов на повторную отправку.

Таким образом, $\mathfrak{S}_T$ определяет среднее время успешной передачи, а $\mathfrak{R}_T$ представляет собой среднюю мощность потребления ресурсов. Оба показателя будут рассматриваться как функционалы $\mathfrak{S}_T[\mu]$, $\mathfrak{R}_T[\mu]$, зависящие от управляемой скорости передачи μ из определенного класса $\mathcal{M}$.

Далее будет рассматриваться задача оптимального управления скоростью передачи μ относительно расширенного функционала

$$\mathfrak{L}_T[\mu,\lambda] = \mathfrak{S}_T[\mu] + \lambda\mathfrak{R}_T[\mu] \to \min_{\mu}: \ \mu \in \mathcal{M} \tag{2}$$

при заданном значении множителя $\lambda \geqslant 0$.

Цель статьи — анализ указанной оптимизационной модели на двух уровнях описания объекта управления: изучение динамики “в среднем” с помощью жидкостной аппроксимации; рассмотрение сети в стационарном режиме для соответствующего однородного марковского процесса.

3. Функционалы качества

Пусть c — неотрицательный параметр, определяющий относительную цену загрузки одного сервера вспомогательной системы из расчета на стоимость загрузки основной системы. Тогда функционал $\mathfrak{R}_T[\mu]$ принимает вид

$$\mathfrak{R}_T[\mu] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \mathsf{M}\big\{\mu(t,X(t))\,\mathrm{I}\{X(t)>0\} + c\alpha(t)\,(N-X(t))\big\}\,dt. \tag{3}$$

Для задания функционала $\mathfrak{S}_T[\mu]$ рассмотрим величину $S(t)$, равную полному времени передачи внешнего пакета начиная с момента t. Эта величина имеет представление

$$S(t) = W + B_1 + A_2 + B_2 + \ldots + A_\nu + B_\nu, \tag{4}$$

где W — время ожидания входа в систему; A_k и B_k — времена пребывания пакета во вспомогательной и основной системе соответственно при k-й попытке ($k = 1, 2, \ldots$ и $A_1 = 0$); ν — номер попытки, при которой пакет будет успешно передан.

Будем рассматривать $S(t)$ как виртуальное время пребывания (включая ожидание входа в систему), поэтому все вероятностные характеристики будут вычисляться из расчета на фиксированный момент t.

Величину W можно представить как

$$W = W_0\,\mathrm{I}\{X(t)=0\} + (\tau_1+\ldots+\tau_\varkappa)\,\mathrm{I}\{X(t)>0\},$$

где W_0 — время ожидания разблокировки при полной загрузке вспомогательной системы; $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — времена обслуживания заявок, находящихся в основной системе на момент t; $\varkappa$ — номер первого успешно переданного пакета; $\mathrm{I}\{\ldots\}$ — индикатор случайного события.

При медленном изменении во времени интенсивностей $\alpha(t)$ и $\mu(t,x)$ условные законы распределения $\mathsf{Law}\{W_0 \mid X(t)=0\}$ и $\mathsf{Law}\{\tau_k \mid X(t)=x\}$ при $x>0$ можно считать экспоненциальными $E(\alpha(t)N)$ и $E(\mu(t,x))$ соответственно. Кроме того, $X(t), \varkappa, \tau_1, \tau_2, \ldots$ взаимно независимы, причем величина $\varkappa$ подчинена геометрическому распределению $G(1-\ell(t))$. Тогда по формуле полного математического ожидания получаем среднее время ожидания входа в систему

$$\overline{W} = \frac{\mathsf{P}\{X(t)=0\}}{\alpha(t)N} + \sum_{x=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{\mu(t,x)}\mathsf{P}\{\tau=k\}\mathsf{P}\{X(t)=x\} =$$
$$= \frac{\mathsf{P}\{X(t)=0\}}{\alpha(t)N} + \frac{1}{1-\ell(t)}\,\mathsf{M}\left\{\frac{\mathrm{I}\{X(t)>0\}}{\mu(t,X(t))}\right\}.$$

Время пребывания в основной системе в течение одной попытки имеет вид

$$B_k = \tau_1+\ldots+\tau_x \quad \text{при} \quad X(t)=x>0.$$

При этом $B_k=0$ в случае $x=0$, так как рассматриваемый пакет уже находится в основной системе. Действуя аналогично, получаем среднее время пребывания пакета в основной системе

$$\overline{B} = \mathsf{M}\left\{\frac{X(t)\,\mathrm{I}\{X(t)>0\}}{\mu(t,X(t))}\right\}.$$

Для среднего времени пребывания во вспомогательной системе имеем

$$\overline{A} = \frac{\mathsf{P}\{X(t)<N\}}{\alpha(t)}$$

в силу того, что $\mathsf{Law}\{A_k \mid X(t)=x\} = E(\alpha(t))$ при $x<N$ и $A_k=0$ при $x=N$.

Учтем $\nu \sim G(1-\ell(t))$ и независимость входящих в (4) случайных величин. Применив формулу полного математического ожидания, получим среднее время, необходимое для успешной передачи внешнего пакета, пришедшего в момент t,

$$\overline{S}(t) = \overline{W} + \overline{B} + (\overline{A}+\overline{B})\,\mathsf{M}\{\nu-1\} = \overline{W} + \frac{\overline{A}\,\ell(t)+\overline{B}}{1-\ell(t)}.$$

Теперь функционал $\mathfrak{S}_T[\mu]$ принимает окончательный вид:

$$(5)\quad \mathfrak{S}_T[\mu] = \frac{1}{T}\int_0^T \mathsf{M}\left\{\frac{\mathrm{I}\{X(t)=0\}}{\alpha(t)N} + \frac{\mathrm{I}\{X(t)<N\}\ell(t)}{(1-\ell(t))\alpha(t)} + \frac{(X(t)+1)\,\mathrm{I}\{X(t)>0\}}{(1-\ell(t))\mu(t,X(t))}\right\}dt.$$

4. Жидкостная аппроксимации

Опишем поведение сети в среднем при помощи метода жидкостной аппроксимации. Для этого представим процесс $X(t)$ в виде

$$X(t) = X(0) + A(t) - D(t), \tag{6}$$

где $A(t)$ — число пакетов, поступивших в основную систему из вспомогательной, а $D(t)$ — число пакетов, отправленных в обратном направлении (за время t). В силу независимости этой пары событий скачки процессов $A(t)$, $D(t)$ происходят в разные моменты времени, т.е.

$$\Delta A(t)\Delta D(t) = 0, \tag{7}$$

причем $A(0) = D(0) = 0$.

Считающие процессы $A(t), D(t)$ допускают мартингальное представление [22, гл. 18]

$$dA(t) = \alpha(t)(N - X(t))\,dt + dM^A(t) \quad \text{и} \quad dD(t) = \ell(t)\mu(t, X(t))\,dt + dM^D(t),$$

где квадратично-интегрируемые мартингалы $M^A(t), M^D(t)$ ортогональны в силу (7) и имеют следующие квадратичные характеристики:

$$<M^A>(t) = \int_0^t \alpha(s)(N - X(s))\,ds, \qquad <M^D>(t) = \int_0^t \ell(s)\mu(s, X(s))\,ds.$$

В силу (6) процесс $X(t)$ допускает представление

$$dX(t) = \{\alpha(t)(N - X(t)) - \ell(t)\mu(t, X(t))\}\,dt + dM(t), \tag{8}$$

где $M(t)$ — квадратично-интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой

$$<M>(t) = \int_0^t \{\alpha(s)(N - X(s)) + \ell(s)\mu(s, X(s))\}\,ds.$$

Следуя [9], определим жидкостную аппроксимацию дискретного процесса $X(t)$.

Жидкостная аппроксимация $x(t)$, будучи детерминированным процессом, описывает поведение основной системы в среднем при большом количестве N функционирующих в сети пакетов. Предположим, что $\mu(t, x)$ задана как функция непрерывных аргументов $t \geqslant 0$ и $x \in [0, N]$. Тогда $x(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = \alpha(t)(N - x) - \ell(t)\mu(t, x), \tag{9}$$

которое получается из (8) удалением мартингальной составляющей.

Согласно теореме 1 из [9] для корректности жидкостной аппроксимации (9) достаточно, чтобы функция $\mu(t,x)$ была липшицевой, а функция $x(t)$ удовлетворяла условию

$$\exists\,\varepsilon > 0\colon \quad \varepsilon \leqslant x(t) \leqslant N-\varepsilon \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{10}$$

Смысл этого условия очевиден: среднее число пакетов должно находиться в интервале $(0,N)$, исключая режимы бездействия основной или вспомогательной системы.

Лемма. Если найдется $\varepsilon > 0$, *такое что*

$$\varepsilon/m_{\min} \leqslant \ell(t)/\alpha(t) \leqslant (N-\varepsilon)/m_{\max}, \tag{11}$$

то условие (10) *выполнено при любом выборе липшицевой функции* $\mu(t,x)$, *удовлетворяющей ограничениям* (1).

Доказательства леммы и последующих утверждений приведены в Приложении.

Учитывая аппроксимацию $X(t)\approx x(t)$, получаем представление функционалов (3) и (5):

$$\mathfrak{S}_T[\mu] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left\{ \frac{\ell(t)}{(1-\ell(t))\alpha(t)} + \frac{x(t)+1}{(1-\ell(t))\mu(t,x(t))} \right\} dt,$$

$$\mathfrak{R}_T[\mu] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \bigl\{\mu(t,x(t)) + c\alpha(t)\,(N-x(t))\bigr\}\, dt.$$

Тогда расширенный функционал (2) примет вид

$$\mathfrak{L}_T[\mu,\lambda] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T g(t,x(t),\mu(t,x(t)),\lambda)\, dt,$$

$$g(t,x,\mu,\lambda) = \frac{\ell(t)}{(1-\ell(t))\alpha(t)} + \frac{x+1}{(1-\ell(t))\mu} + \lambda\bigl[\mu + c\alpha(t)\,(N-x)\bigr].$$

Для синтеза оптимальной скорости передачи данных $\hat{\mu}(t,x)$ по критерию минимума расширенного функционала $\mathfrak{L}_T[\mu,\lambda]$ рассмотрим сначала задачу

$$\mathfrak{L}_T[u,\lambda] = \frac{1}{T}\int\limits_0^T g(t,x(t),u(t),\lambda)\, dt \to \min_{u\in\mathcal{U}} \tag{12}$$

на классе $\mathcal{U}$ программных управлений, т.е. кусочно-непрерывных функций $u(t)$, $t\in[0,T]$, со значениями в множестве $U=[m_{\min},m_{\max}]$. При этом состояние $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (9), в котором вместо позиционного управления $\mu(t,x)$ используется программное, а именно:

$$\dot{x} = f(t,x,u(t)), \quad f(t,x,u) = \alpha(t)(N-x) - \ell(t)u. \tag{13}$$

Определим гамильтониан

$$H(t, x, \psi, u, \lambda) = \psi f(t, x, u) - g(t, x, u, \lambda),$$

в котором ψ — сопряженная переменная. Тогда нетрудно получить представление

$$H(t, x, \psi, u, \lambda) = \ldots - \big(au + b/u\big),$$

где a и b — краткие обозначения для коэффициентов

$$a = \ell(t)\psi + \lambda, \qquad b = (x+1)/(1 - \ell(t)),$$

а многоточие обозначает слагаемые, не зависящие от переменной u. Если известно, что для состояния системы (13) можно гарантировать условие $x \geqslant 0$, то коэффициент b будет положительным и максимум гамильтониана по переменной $u \in U$ будет достигаться в единственной точке:

$$Q(a, b) = \begin{cases} m_{\max}, & a/b \leqslant 1/m_{\max}^2, \\ \sqrt{b/a}, & 1/m_{\max}^2 \leqslant a/b \leqslant 1/m_{\min}^2, \\ m_{\min}, & a/b \geqslant 1/m_{\min}^2. \end{cases} \tag{14}$$

Теперь определим уравнение для сопряженной переменной с учетом терминального условия

$$\dot{\psi} = -H_x(t, x, \psi, u(t), \lambda), \quad t \in [0, T], \quad \psi(T) = 0, \tag{15}$$

где правая часть дифференциального уравнения определяется как

$$-H_x(t, x, \psi, u, \lambda) = \alpha(t)\psi + \frac{1}{(1 - \ell(t))u} - \lambda c \alpha(t).$$

Пусть $x(t), \psi(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений (13), (15), в которых в качестве $u(t)$ взято управление

$$\hat{u}(t) = Q\big(\ell(t)\psi(t) + \lambda, (x(t) + 1)/(1 - \ell(t))\big), \tag{16}$$

где предполагается, что $x(t) \geqslant 0$ всюду на $[0, T]$.

Сформулируем полученный результат в теореме 1.

Теорема 1. *Если для какого-либо $\varepsilon \geqslant 0$ выполнено правое неравенство в* (11), *то при любом начальном условии $x(0) \geqslant 0$ управление* (16) *представляет собой решение задачи* (12). *Если к тому же имеет место неравенство*

$$\lambda(c/4 + 1) \leqslant \big(1/m_{\max} + 1/(4\alpha(t))\big)/m_{\max}, \quad t \in [0, T], \tag{17}$$

то оптимальное управление совпадает с верхней границей, т.е. $\hat{u}(t) \equiv m_{\max}$.

Теорема 1 позволяет описать схему нахождения оптимального позиционного управления $\hat{\mu}(t,x)$. Для каждого $x_T \in (0,N)$ необходимо проинтегрировать в обратном времени систему (13), (15) с учетом $u(t)=\hat{u}(t)$ и терминальных условий $x(T)=x_T$, $\psi(T)=0$ вплоть до момента t_0, при котором будет выполнено одно из условий: $x(t_0)=0$, $x(t_0)=N$ или $t_0=0$. Теперь искомое управление определяется вдоль каждой полученной траектории по правилу $\hat{\mu}(t,x(t))=\hat{u}(t)$.

Структуру оптимального управления $\hat{u}$ из (16) можно пояснить следующим образом. Выбор между двумя границами $m_{\min}$, $m_{\max}$ определяется отношением $r=(1-\ell)(\ell\psi+\lambda)/(x+1)$. Если энергозатраты, выражаемые параметром λ, незначительны по сравнению с уровнем загрузки системы x, то r мало и в этом случае более предпочтительно передавать на максимальной скорости, т.е. $\hat{u}=m_{\max}$. Неравенство (17) описывает достаточное условие, при котором можно сделать такой вывод. Если же, наоборот, сохранение ресурсов весьма критично, что выражается большим значением r, то оптимальная скорость передачи устанавливается на минимальном уровне: $\hat{u}=m_{\min}$.

Замечание. Выражение (16) позволяет предложить постоянную стратегию, которую можно использовать для предварительного решения задачи в модели с постоянными параметрами α и ℓ.

Предположим, что значение двойственной переменной $\psi(t)$ незначительно. Это так, по крайней мере, на конце промежутка, поскольку $\psi(T)=0$. Если считать, что к этому моменту состояние $x(t)$ устанавливается на некотором равновесном значении $\bar{x}$, то в случае достаточно широкого диапазона $[1/m_{\max}^2, 1/m_{\min}^2]$ в силу (13) и (14) и с учетом $1 \ll \bar{x}$ получаем систему уравнений:

$$\alpha(N-\bar{x})-\ell\hat{u}=0, \quad \hat{u}=\sqrt{\bar{x}/(\lambda(1-\ell))}.$$

Тогда соответствующее решение $\bar{x}$ имеет вид

$$\bar{x}=N-\frac{\varkappa}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4N}{\varkappa}}-1\right), \quad \varkappa=\frac{\ell^2}{\lambda(1-\ell)\alpha^2},$$

причем заведомо $0<\bar{x}<N$.

5. Стационарный режим

Теперь предположим, что параметры сети ℓ, α являются константами, а искомое управление описывается стационарной стратегией

$$\mu=\{\mu_x : x=1,\dots,N\}\in U^N, \quad U=[m_{\min}, m_{\max}], \tag{18}$$

где μ_x — скорость отправки из основной системы в случае, когда в ней находится x пакетов. При простое основной системы ее сервер бездействует, поэтому соответствующая скорость отправки равна нулю: $\mu_0=0$. Стратегии (18) будем называть *допустимыми*.

В указанных предположениях марковский процесс $X(t)$ будет однородным, а его интенсивности переходов принимают вид $\lambda_{x-1,x}=\alpha(N+1-x)$ и

$\lambda_{x,x-1} = \ell\mu_x$ при $x = 1, \ldots, N$. Процесс $X(t)$, как конечный процесс рождения и гибели, является эргодическим. Это означает, что вне зависимости от выбора начального распределения $X(0)$ для всякого $x \in E$ определены предельные вероятности $\pi_x = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{X(t) = x\}$. Для них известно рекуррентное представление:

$$\pi_x = \frac{\alpha(N+1-x)}{\ell\mu_x}\pi_{x-1}, \quad x = 1, \ldots, N. \tag{19}$$

Если π_0 найти из условия нормировки, то тем самым будет определено стационарное распределение $\pi = \{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N\}$.

Укажем выражения для функционалов качества. Среднее время успешной отправки в силу (5) принимает вид

$$\mathfrak{S}[\mu] = \frac{\pi_0}{\alpha N} + \frac{(1-\pi_N)\ell}{(1-\ell)\alpha} + \sum_{x=1}^{N} \frac{(x+1)\,\pi_x}{(1-\ell)\mu_x}.$$

Из (3) получаем выражение для функционала, определяющего среднюю мощность потребления ресурсов:

$$\mathfrak{R}[\mu] = \sum_{x=0}^{N} \{\mu_x + c\alpha(N-x)\}\pi_x.$$

Тогда с учетом равенства $1 - \pi_N = \pi_0 + \ldots + \pi_{N-1}$ расширенный функционал (2) равен

$$\mathfrak{L}[\mu,\lambda] = h_0\pi_0 + \sum_{x=1}^{N} \big(h_x + b_x/\mu_x + \lambda\mu_x\big)\pi_x, \tag{20}$$

$$h_x = \frac{1}{\alpha N}\,\mathrm{I}\{x=0\} + \frac{\ell}{(1-\ell)\alpha}\,\mathrm{I}\{x<N\} + \lambda c\alpha(N-x), \quad b_x = \frac{x+1}{(1-\ell)}.$$

Решим задачу минимизации расширенного функционала в стационарном режиме

$$\mathfrak{L}[\mu,\lambda] \to \min_{\mu} \tag{21}$$

на классе стратегий (18).

Для этого введем функционал

$$\mathfrak{J}[\pi,\mu,\nu] = \mathfrak{L}[\mu,\lambda] - \nu(\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_N - 1),$$

включив условие нормировки в виде слагаемого с множителем $\nu \in \mathbb{R}$. Последовательность $\pi = \{\pi_x\colon x = 0, 1, \ldots, N\}$ будем рассматривать как траекторию дискретной системы (19) с произвольным начальным условием $\pi_0 \geqslant 0$ и управлением $\mu = \{\mu_x\}$.

Функционал $\mathfrak{J}$ является сепарабельным, поэтому для его минимизации применим метод динамического программирования. Для этого запишем $\mathfrak{J}$ с учетом (19) и (20):

$$\mathfrak{J}[\pi,\mu,\nu] = \nu + \pi_0(h_0-\nu) + \sum_{x=1}^{N} \pi_{x-1} g_x(\mu_x,\nu),$$

$$g_x(u,\nu) = \bigl(h_x + b_x/u + \lambda u - \nu\bigr)\,\gamma_x/u, \qquad \gamma_x = \alpha(N+1-x)/\ell.$$

Определим функцию Беллмана:

$$\mathfrak{B}_n(p,\nu) = \inf_{(\pi,\mu)\in\mathcal{S}_n(p)} \sum_{x=n}^{N} \pi_{x-1} g_x(\mu_x,\nu), \quad n = N, N-1, \ldots, 1, \tag{22}$$

где $\mathcal{S}_n(p)$ — множество пар (π,μ), таких что $\pi = \{\pi_x\colon x = n,\ldots,N\}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению $\pi_x = \pi_{x-1}\gamma_x/\mu_x$ с начальным условием $\pi_{n-1} = p$ и допустимой стратегией $\mu = \{\mu_x\colon x = n,\ldots,N\}$.

Уравнение динамического программирования принимает вид

$$\mathfrak{B}_n(p,\nu) = \inf_{u\in U}\bigl\{p\,g_n(u,\nu) + \mathfrak{B}_{n+1}\bigl(p\gamma_n/u,\,\nu\bigr)\bigr\}, \quad n = N, N-1, \ldots, 1,$$

где $\mathfrak{B}_{N+1} \equiv 0$. При этом

$$\inf_{(\pi,\mu)\in\mathcal{S}_0} \mathfrak{J}[\pi,\mu,\nu] = \inf_{\pi_0\geqslant 0}\bigl\{\nu + \pi_0(h_0-\nu) + \mathfrak{B}_1(\pi_0,\nu)\bigr\}, \tag{23}$$

где $\mathcal{S}_0$ содержит $(\pi,\mu)\in\mathcal{S}_1(\pi_0)$ при произвольном выборе начального условия $\pi_0 \geqslant 0$.

Нетрудно проверить, что функция Беллмана имеет вид $\mathfrak{B}_n(p,\nu) = p\,\beta_n(\nu)$, где последовательность $\{\beta_n(\nu)\}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$\beta_n(\nu) = \inf_{u\in U}\bigl\{g_n(u,\nu) + \gamma_n\,\beta_{n+1}(\nu)/u\bigr\}, \quad n = N, N-1, \ldots, 1, \quad \beta_{N+1} \equiv 0.$$

После замены переменной $w = 1/u$ последнее уравнение принимает вид

$$\beta_n(\nu) = \inf_{1/m_{\max}\leqslant w\leqslant 1/m_{\min}} \bigl\{\lambda + (h_n - \nu + \beta_{n+1}(\nu))\,w + b_n w^2\bigr\}\gamma_n.$$

Если определить точку абсолютного минимума указанной квадратичной функции

$$w_n^* = -\frac{h_n - \nu + \beta_{n+1}(\nu)}{2b_n},$$

то можно утверждать, что стратегия

$$\mu_x^* = \begin{cases} m_{\max}, & w_x^* \leqslant 1/m_{\max}, \\ 1/w_x^*, & 1/m_{\max} \leqslant w_x^* \leqslant 1/m_{\min}, \\ m_{\min}, & w_x^* \geqslant 1/m_{\min}, \end{cases} \quad x = 1,\ldots,N, \tag{24}$$

будет доставлять минимум в (22) при фиксированном $\nu \geqslant 0$.

Таблица 1. Значения расширенного функционала в зависимости от выбора множителя

i	λ_0^i	λ^i	$\mathfrak{L}[\mu^*, \lambda^i]$	$\mathfrak{L}[\hat{u}, \lambda^i]$	$\mathfrak{L}[m_{\min}, \lambda^i]$	$\mathfrak{L}[m_{\mathrm{med}}, \lambda^i]$	$\mathfrak{L}[m_{\max}, \lambda^i]$
1	0,2	0,324	8,616	8,755	36,215	11,204	8,616
2	0,8	1,298	16,686	16,906	37,676	16,805	18,358
3	1,4	2,271	22,079	22,249	39,137	22,407	28,100
4	2,0	3,244	26,393	26,537	40,599	28,009	37,843
5	2,6	4,217	30,094	30,222	42,060	33,611	47,585
6	3,2	5,191	33,388	33,504	43,521	39,213	57,327
7	3,8	6,164	36,385	36,491	44,983	44,815	67,070
8	4,4	7,137	39,152	39,251	46,444	50,416	76,812
9	5,0	8,110	41,736	41,829	47,905	56,018	86,554

Таблица 2. Время успешной отправки и объем ресурсов на стратегиях μ^* и $\hat{u}$

i	λ_0^i	λ^i	$\mathfrak{S}[\mu^*]$	$\mathfrak{S}[\hat{u}]$	$\mathfrak{R}[\mu^*]$	$\mathfrak{R}[\hat{u}]$
1	0,2	0,324	5,3684	5,6916	10,0099	9,4416
2	0,8	1,298	8,3332	9,7654	6,4365	5,5029
3	1,4	2,271	11,0310	12,4353	4,8649	4,3214
4	2,0	3,244	13,1885	14,5780	4,0701	3,6862
5	2,6	4,217	15,0402	16,4194	3,5695	3,2727
6	3,2	5,191	16,6888	18,0591	3,2171	2,9754
7	3,8	6,164	18,1890	19,5514	2,9519	2,7482
8	4,4	7,137	19,5757	20,9300	2,7429	2,5670
9	5,0	8,110	20,8711	22,2173	2,5726	2,4181

Выберем параметр ν так, чтобы минимизируемое выражение в правой части (23) не зависело от π_0. В силу $\mathfrak{B}_1(\pi_0, \nu) = \pi_0 \beta_1(\nu)$ это условие равносильно уравнению

$$h_0 - \nu + \beta_1(\nu) = 0. \tag{25}$$

Теперь можно описать способ решения задачи (21).

Т е о р е м а 2. *Решение ν^* уравнения* (25) *существует и определенно единственным образом, оно положительно и не превосходит значения функционала $\mathfrak{L}[\mu, \lambda]$ на любой допустимой стратегии μ.*

Стратегия μ^*, определяемая в (24) *при $\nu = \nu^*$, является оптимальным управлением в стационарном режиме по критерию минимума расширенного функционала* (21), *причем $\mathfrak{L}[\mu^*, \lambda] = \nu^*$.*

Как следует из доказательства теоремы 2, функция в правой части уравнения (25) непрерывна и монотонно не возрастает. Поэтому решение ν^* можно искать методом деления отрезка пополам или методом золотого сечения на отрезке $[0, \mathfrak{L}[\mu, \lambda]]$, где μ — любая допустимая стратегия, например $\mu_x = m_{\min}$ или $\mu_x = m_{\max}$.

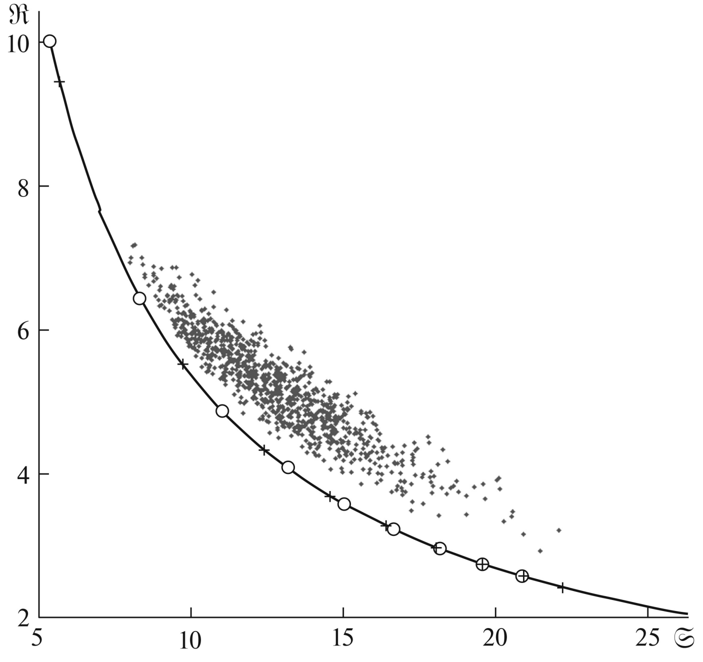

Рис. 2. Граница множества достижимости (сплошная кривая) на плоскости критериев $(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$ при оптимальном управлении μ^* (кружочки), постоянном управлении $\hat{u}$ (крестики) и случайно сгенерированных стратегиях (точки).

Приведем пример численного нахождения оптимального управления замкнутой сетью передачи данных, рассматриваемой в стационарном режиме.

Пример. Сделаем следующие предположения: сеть содержит $N = 50$ пакетов; диапазон допустимых значений скорости передачи задан границами $m_{\min} = 1{,}5$ и $m_{\max} = 10$; $\alpha = 0{,}02$ — интенсивность обслуживания во вспомогательной системе; $\ell = 0{,}05$ — вероятность потери пакета; $c = 0{,}02$ — относительная цена использования сервера вспомогательной системы.

В табл. 1 приведены значения расширенного функционала в зависимости от выбора множителя λ на нескольких управлениях: μ^* — оптимальное управление, описанное в теореме 2; $\hat{u}$ — постоянное управление, значение которого выбрано согласно замечанию; $m_{\min}$, m_{med}, $m_{\max}$ — постоянные управления, равные соответственно нижней границе, середине и верней границе диапазона допустимых значений. Для множителя λ, определяющего вес энергетического критерия, взято несколько значений $\lambda^i = \lambda_0^i \mathfrak{S}[m_{\text{med}}]/\mathfrak{R}[m_{\text{med}}]$, где λ_0^i — безразмерные коэффициенты, $i = 1, \ldots, 9$.

Как видно из табл. 1, значения расширенного функционала на оптимальном управлении μ^* и постоянной стратегии $\hat{u}$, полученной на основе жидкостной аппроксимации, отличаются мало. Тем не менее сравнение функционалов времени успешной отправки $\mathfrak{S}$ и объема ресурсов $\mathfrak{R}$ позволяют увидеть достаточно серьезные отличия в характеристиках качества указанных управлений (см. табл. 2).

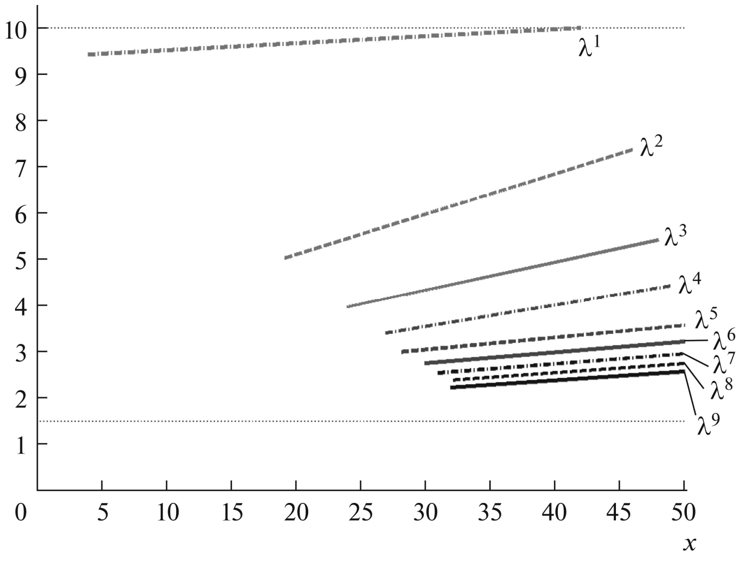

Рис. 3. Оптимальные управления $\{\mu_x^*\}$ как функции состояния $x = 1, 2, \ldots, N$ для нескольких значений множителя $\lambda = \lambda^i$.

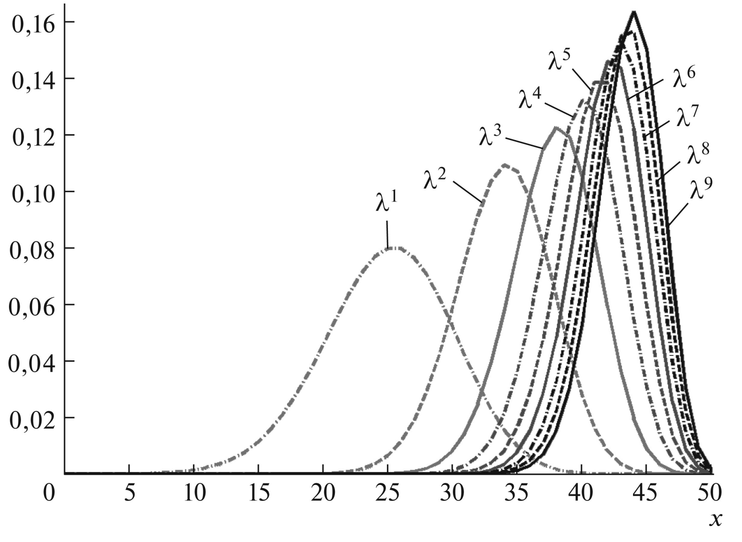

Рис. 4. Вероятности $\{\pi_x^*\}$ состояний $x = 0, 1, \ldots, N$ основной системы при использовании нескольких оптимальных управлений μ^* в зависимости от выбора множителя $\lambda = \lambda^i$.

На плоскости критериев $(\mathfrak{S}, \mathfrak{R})$ оптимальное управление μ^* обязано лежать на границе множества достижимости

$$\mathcal{A} = \{(s, r)\colon\ \exists\, \mu \in U^N\colon\ s \geqslant \mathfrak{S}[\mu],\ r \geqslant \mathfrak{R}[\mu]\}.$$

Этот факт подтверждается рис. 2, на котором точки $(\mathfrak{S}[\mu^*], \mathfrak{R}[\mu^*])$ изображены кружочками, а граница $\mathcal{A}$ — сплошной кривой.

Для постоянной стратегии $\hat{u}$ в силу $\mathfrak{L}[\hat{u}] \approx \mathfrak{L}[\mu^*]$ точки $(\mathfrak{S}[\hat{u}], \mathfrak{R}[\hat{u}])$, обозначенные крестиками, также визуально лежат на границе. Однако точки $(\mathfrak{S}[\mu^*], \mathfrak{R}[\mu^*])$ и $(\mathfrak{S}[\hat{u}], \mathfrak{R}[\hat{u}])$ не совпадают, так как хотя бы по одному из двух критериев различие существенно (см. табл. 2).

Другие стратегии μ (точнее, соответствующим им значения критериев $\mathfrak{S}[\mu], \mathfrak{R}[\mu]$) изображены на рис. 2 точками. Эти стратегии $\mu = \{\mu_x\}$ в количестве 1000 штук получены в результате моделирования набора $\{\mu_1, \ldots, \mu_N\}$ как выборки из равномерного распределения $\mathcal{R}(m_{\min}, m_{\max})$.

На рис. 3 изображены оптимальные управления $\{\mu_x^*\}$ для тех же значений множителя λ, что перечислены в табл. 1 и 2. Соответствующие стационарные распределения $\pi^* = \{\pi_x^*\}$ представлены на рис. 4. Для маловероятных состояний x наблюдался эффект неустойчивости при численном нахождении оптимальных стратегий μ_x^*. Поэтому на рис. 3 для каждого управления μ^* изображена только та часть графика, которая оставалась неизменной при повышении точности решения уравнения (25). Соответствующие значения оптимального управления были найдены с приемлемой точностью для промежутка, в который состояние $X \sim \pi^*$ попадает с вероятностью 0,999.

6. Заключение

В статье изучена задача оптимального управления скоростью передачи данных в модели с ненадежным каналом связи и механизмом повторной отправки по критерию минимума полного времени передачи с учетом энергозатрат передатчика. Сеть передачи данных моделировалась замкнутой сетью массового обслуживания с основным узлом-передатчиком (в виде конечной одноканальной системы) и вспомогательным узлом для повторной отправки пакетов (в виде многоканальной СМО). Условия оптимальности искомого управления получены в приближенной модели, основанной на жидкостной аппроксимации, а также в установившемся режиме при использовании стационарных стратегий.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Если $\mu(t, x)$ — липшицева, то при любом начальном условии $x(0)$ уравнение (9) имеет решение $x(t)$, определенное на всем отрезке $[0, T]$. С учетом обозначения $\beta(t) = N - \ell(t)\mu(t, x(t))/\alpha(t)$ получаем $\dot{x} = -\alpha(t)x + \alpha(t)\beta(t)$, откуда следует представление

$$\text{(П.1)} \quad x(t) = \varphi(t)x(0) + \int_0^t \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}\alpha(s)\beta(s)\,ds, \qquad \varphi(t) = \exp\left\{-\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau\right\}.$$

В силу (11) имеет место неравенство $\varepsilon \leqslant \beta(t) \leqslant N - \varepsilon$. Если в (П.1) вместо β взять $\beta_1 = \varepsilon$ и $\beta_2 = N - \varepsilon$, то соответствующие решения $x_k(t) = \varphi(t)x(0) + (1-\varphi(t))\beta_k$, $k = 1, 2$, будут удовлетворять неравенствам $x_1(t) \leqslant x(t) \leqslant x_2(t)$. Поскольку $0 < \varphi(t) < 1$, получаем, что $x(t)$ — выпуклая комбинация чисел $x(0)$, β_1 и β_2, каждое из которых принадлежит отрезку $[\varepsilon, N - \varepsilon]$. Это влечет $x(t) \in [\varepsilon, N - \varepsilon]$, что и требовалось. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Сначала установим факт существования оптимального управления в задаче (12). Для этого достаточно проверить условия теоремы III.4.1 из [23], а именно: липшицевость по (x, u) функции $f(t, x, u)$ в правой части дифференциального уравнения (13); непрерывность подынтегральной функции $g(t, x, u, \lambda)$; компактность множества допустимых значений управления U; выпуклость множеств

$$F(t, x) = \{(p, z)\colon \exists\, u \in U\colon p = f(t, x, u),\ z \geqslant g(t, x, u, \lambda)\}.$$

Последнее условие выполнено, если $f(t, x, u)$ линейна, а $g(t, x, u, \lambda)$ выпукла по u. Выпуклость второй функции по $u > 0$ вытекает из леммы, благодаря которой можно гарантировать, что $x \geqslant 0$.

Формулировку необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума можно найти, например, в пп. 2.4.1 и 2.4.2 в [24]. В силу существования оптимального управления и того, что максимум гамильтониана достигается в единственной точке (14), можно утверждать, что управление (16) является решением задачи (12).

Теперь выведем достаточное условие того, что оптимальное управление $\hat{u}(t)$ совпадает с верхней границей $m_{\max}$. Так как $\hat{u}(t)$ однозначно определяется выражениями (14) и (16), выясним, в каком случае имеет место $a/b \leqslant 1/m_{\max}^2$. Опуская зависимость от времени, это неравенство можно переписать в виде

$$\ell(1-\ell)\psi + \lambda(1-\ell) \leqslant (x+1)/m_{\max}^2.$$

С учетом $0 \leqslant \ell < 1$ и $x \geqslant 0$ указанное неравенство заведомо выполнено при

$$\psi/4 + \lambda \leqslant 1/m_{\max}^2. \tag{П.2}$$

Оценим сверху значение сопряженной переменной $\psi(t)$. Для этого запишем уравнение (15) в виде $\dot{\psi} = \alpha(t)\psi - \alpha(t)\gamma(t)$, где $\gamma(t) = \lambda c - ((1-\ell(t))\alpha(t)\hat{u}(t))^{-1}$. Воспользуемся неравенством

$$\gamma(t) \leqslant \gamma_{\max} = \lambda c - \frac{1}{\alpha_{\max} m_{\max}}, \qquad \alpha_{\max} = \max_{t \in [0,T]} \alpha(t),$$

и представлением, аналогичным (П.1). Тогда в силу $\psi(T) = 0$ имеем, что

$$\psi(t) = \int\limits_t^T \frac{\varphi(s)}{\varphi(t)} \alpha(s)\gamma(s)\, ds = \frac{\gamma_{\max}}{\varphi(t)}\bigl(\varphi(t) - \varphi(T)\bigr) \leqslant \gamma_{\max}.$$

Теперь при подстановке $\psi = \gamma_{\max}$ в (П.2) получается требуемое неравенство (17). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем, что решение (25) существует, является единственным и положительным. Согласно определению β_n — минимум по w функции, непрерывно зависящей от w, β_{n+1}, ν, причем w пробегает отрезок. Тогда по теореме о непрерывности маргинальной функции

[25, п. 3.1.23], β_n — непрерывная функция переменных β_{n+1}, ν. Следовательно, $\beta_1(\nu)$ — тоже непрерывная функция. При $\nu = 0$ функция $h_0 - \nu + \beta_1(\nu)$ из правой части уравнения (25) будет положительна. Если можно выбрать такое $\nu_{\max} > 0$, чтобы $h_0 - \nu + \beta_1(\nu) < 0$ при $\nu = \nu_{\max}$, то благодаря непрерывности этой функции можно утверждать, что на интервале $(0, \nu_{\max})$ уравнение (25) будет иметь решение ν^*.

Для нахождения $\nu_{\max}$ заметим, что при любом выборе допустимой стратегии μ справедливо неравенство

$$\nu + \pi_0(h_0 - \nu + \beta_1(\nu)) \leqslant \mathfrak{J}[\pi, \mu, \nu],$$

в котором правая часть равна $\mathfrak{L}[\mu, \lambda]$, если последовательность $\{\pi_x\}$ удовлетворяет условию нормировки. Следовательно, $h_0 - \nu + \beta_1(\nu) < 0$ для $\nu > \mathfrak{L}[\mu, \lambda]$. Поэтому искомое $\nu_{\max}$ достаточно взять чуть больше $\mathfrak{L}[\mu, \lambda]$.

Для доказательства единственности ν^* заметим, что $\beta_1(\nu)$ — невозрастающая и вогнутая функция, как минимум таковых. Поэтому теми же свойствами обладает функция $h_0 - \nu + \beta_1(\nu)$, для которой ноль является промежуточным значением. Следовательно, это значение функция принимает в единственной точке.

Чтобы установить оптимальность стратегии μ^* в задаче (21), достаточно проверить, что если π^* — стационарное распределение, соответствующее стратегии μ^*, то (π^*, μ^*) и ν^* образуют седловую точку функционала $\mathfrak{J}[\pi, \mu, \nu]$:

$$\text{(П.3)} \qquad \mathfrak{J}[\pi^*, \mu^*, \nu] \leqslant \mathfrak{J}[\pi^*, \mu^*, \nu^*] \leqslant \mathfrak{J}[\pi, \mu, \nu^*] \quad \forall\, (\pi, \mu) \in \mathcal{S}_0, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{R}.$$

Левое неравенство (П.3) превращается в равенство, так как обе его части равны $\mathfrak{L}[\mu^*, \lambda]$ в силу условия нормировки. Правое неравенство следует из (23) с учетом того, что $\pi_0(h_0 - \nu) + \mathfrak{B}_1(\pi_0, \nu) = \pi_0(h_0 - \nu + \beta_1(\nu)) = 0$ при $\nu = \nu^*$.

При этом $\mathfrak{J}[\pi^*, \mu^*, \nu^*] = \mathfrak{L}[\mu^*, \lambda] = \nu^*$, что и требовалось. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миллер Б.М., Авраченков К.Е., Степанян К.В., Миллер Г.Б.* Задача оптимального стохастического управления потоком данных по неполной информации // Пробл. передачи информации. 2005. Т. 41. № 2. С. 89–110.

   Miller B.M., Avrachenkov K.E., Stepanyan K.V., Miller G.B. Flow Control as a Stochastic Optimal Control Problem with Incomplete Information // Probl. Inform. Transmiss. 2005. V. 41. No. 2. P. 150–170.
2. *Miller B.M.* Optimization of Queuing System via Stochastic Control // Automatica. 2009. V. 45. P. 1423–1430.
3. *Rieder U., Winter J.* Optimal Control of Markovian Jump Processes with Partial Information and Applications to a Parallel Queueing Model // Math. Meth. Oper. Res. 2009. V. 70. P. 567–596.
4. *Солодянников Ю.В.* Управление и наблюдение для динамических сетей массового обслуживания. I // АиТ. 2014. № 3. С. 14–45.

Solodyannikov Yu.V. Control and Observation for Dynamical Queueing Networks. I // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 3. P. 422–446.

5. *Солодянников Ю.В.* Управление и наблюдение для динамических сетей массового обслуживания. II // АиТ. 2014. № 5. С. 91–114.

   Solodyannikov Yu.V. Control and Observation for Dynamical Queueing Networks. II // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 5. P. 880–899.

6. *Кузнецов Н.А., Мясников Д.В., Семенихин К.В.* Оптимизация двухфазной системы массового обслуживания и ее применение к управлению передачей данных между двумя агентами робототехнической системы // Информационные процессы. 2017. Т. 17. № 1. С. 19–42.

   Kuznetsov N.A., Myasnikov D.V., Semenikhin K.V. Optimization of Two-Phase Queuing System and Its Application to the Control of Data Transmission Between Two Robotic Agents // J. Communicat. Technol. Electron. 2017. V. 62. No. 12. P. 1484–1498.

7. *Миллер Г.Б., Борисов А.В., Стефанович А.И.* Управляемые марковские скачкообразные процессы. I. Оптимальная фильтрация по комплексным наблюдениям // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 6. С. 64–83.

   Borisov A.V., Miller G.B., Stefanovich A.I. Controllable Markov Jump Processes. I. Optimum Filtering Based on Complex Observations // J. Comput. Syst. Sci. 2018. V. 57. No. 6. P. 890–906.

8. *Борисов А.В., Миллер Г.Б., Стефанович А.И.* Управляемые марковские скачкообразные процессы. II. Мониторинг и оптимизация функционирования TCP-соединений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. № 1. С. 13–30.

   Borisov A.V., Miller G.B., Stefanovich A.I. Controllable Markov Jump Processes. II. Monitoring and Optimization of TCP Connections // J. Comput. Syst. Sci. 2019. V. 58. No. 1. P. 12–28.

9. *Коган Я.А., Липцер Р.Ш., Смородинский А.В.* Гауссовская диффузионная аппроксимация марковских замкнутых моделей сетей связи ЭВМ // Пробл. передачи информации. 1986. Т. 22. № 1. С. 49–65.

   Kogan A.Ya., Liptser R.Sh., Smorodinskii A.V. Gaussian Diffusion Approximation of Closed Markov Models of Computer Networks // Probl. Inform. Transmiss. 1986. V. 22. No. 1. P. 38–51.

10. *Gordon W.J., Newell F.G.* Closed Queuing Systems with Exponential Servers // Oper. Res. 1967. V. 15. No. 2. P. 254–265.

11. *Кельберт М.Я., Сухов Ю.М.* Математические вопросы теории сетей с очередями // Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Матем. статистика. Теоретич. киберн. М.: ВИНИТИ. 1988. Т. 26. С. 3–96.

12. *Kitaev M.Y., Rykov V.V.* Controlled queueing systems. Boca Raton: FL: CRC, 1995.

13. *Sennott L.I.* Stochastic dynamic programming and the control of queueing systems. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1999.

14. *Whitt W.* Stochastic-process limits. An introduction to stochastic-process limits and their application to queues. N.Y.: Springer, 2002.

15. *Anisimov V.V.* Switching processes in queueing models. Hoboken: J. Wiley & Sons, 2008.

16. *Stidham S.* Optimal design of queueing systems. N.Y.: Chapman & Hall/CRC, 2009.

17. *Altman E.* Constrained Markov decision processes. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 1999.

18. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // АиТ. 2011. № 2. С. 111–130.

Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V. Methods to Design Optimal Control of Markov Process with Finite State set in the Presence of Constraints // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 2. P. 323–341.

19. *Schechner Z., Yao D.* Decentralized Control of Service Rates in a Closed Jackson Network // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. No. 2. P. 236–240.

20. *Ma D.-J., Cao X.-R.* A Direct Approach to Decentralized Control of Service Rates in a Closed Jackson Network // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. No. 7. P. 1460–1463.

21. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Построение и анализ обобщенной модели контакт-центра // АиТ. 2014. № 11. С. 55–69.

Stepanov S.N., Stepanov M.S. Construction and Analysis of a Generalized Contact Center Model // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 11. P. 1936–1947.

22. *Liptser R.S., Shiryayev A.N.* Statistics of random processes. 3rd ed. N.Y.: Springer, 2005.

23. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978.

24. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

25. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 19.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019