Автоматика и телемеханика, № 3, 2020

© 2020 г. Ю.А. КУТОЯНЦ, д-р физ.-мат. наук (kutoyants@univ-lemans.fr)
(Ле-Ман Университет, Франция;
Томский государственный университет)

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Представляется обзор работ по оценке параметров скрытых (hidden) марковских процессов. Рассмотрены две модели наблюдений: частично наблюдаемый двумерный гауссовский процесс и телеграфный процесс, наблюдаемый на фоне белого гауссовского шума. Описываются свойства оценок в асимптотике больших выборок и малого шума. Специальное внимание оказано вопросам вычислительной сложности и асимптотической эффективности предлагаемых оценок.

Ключевые слова: оценка параметров, скрытые процессы, калмановская фильтрация, телеграфный процесс.

DOI: 10.31857/S000523102003006X

1. Введение

Рассматривается несколько задач оценки конечномерного параметра по наблюдениям случайного процесса

$$\mathrm{d}X_t = f_t Y_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1}$$

Предполагается, что случайный процесс Y_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ является марковским и не наблюдаемым (hidden). Это может быть как решение линейного стохастического дифференциального уравнения

$$\mathrm{d}Y_t = -a_t Y_t \mathrm{d}t + b_t \mathrm{d}V_t, \qquad Y_0 = y_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

так и стационарный марковский процесс с двумя состояниями (y_1 и y_2) с инфинитеземальной матрицей переходов

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Уравнение (1) называется уравнением наблюдений, а уравнение (2) — уравнением состояний. Винеровские процессы W_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ и V_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ в этих уравнениях всегда в работе предполагаются независимыми. В случае диффузионных процессов (1)–(2) предполагается, что функции f_t, a_t и b_t зависят от неизвестных параметров, которые обозначены как ϑ, а в случае телеграфного процесса, наблюдаемого в белом шуме (1), (3), неизвестный параметр равен $\vartheta = (\lambda, \mu)^\top$. Здесь и далее $a^\top$ обозначает транспонирование вектора $\vec{a}$.

Настоящая работа представляет обзор результатов по оценке параметров, полученных для этих двух моделей наблюдений. Следует сказать, что в связи с большим значением калмановской фильтрации для многих прикладных задач имеется обширная литература по идентификации схожих частично наблюдаемых моделей наблюдений. В основном исследовались системы с дискретным временем. Кроме того, эти модели привлекали внимание и тех, кто работает в математической статистике, см., например, [1–3] и ссылки в этих работах. Результаты, приведенные в этой статье, отражают скорее личные интересы автора и не претендуют на исчерпывающее описание всех известных результатов для этих моделей наблюдений. Заметим, что если возможно статистическое оценивание с малыми ошибками, то это, скорее всего, соответствует одной из моделей с асимптотикой. Например, можно иметь большой объем наблюдений, т.е. большие выборки (large samples), либо большой сигнал или эквивалентно "малый шум" (small noise).

2. Основные результаты

Ниже описываются свойства оценок в асимптотике больших выборок ($T \to \infty$, модели (1)–(2) и (1), (3)) и в асимптотике малого шума (два предела $\sigma_t \to 0$, $b_t \to 0$ и $\sigma_t \to 0$, модель (1)–(2)). В качестве оценок взяты оценка максимального правдоподобия (ОМП), оценки Байеса (БО) и недавно введенные для этих моделей наблюдений одношаговые оценки-процессы максимального правдоподобия (One-step MLE-processes).

Введем ряд обозначений и определений. Рассмотрим модель (1)–(2), где обозначим $f_t = f(\vartheta, t)$, $a_t = a(\vartheta, t)$ и $b_t = b(\vartheta, t)$. Неизвестный параметр $\vartheta \in \Theta$ одномерный и множество есть $\Theta = (\alpha, \beta)$. Напомним, что в случае $\sigma_t = \sigma(\vartheta, t)$ задача оценки параметра ϑ вырождена, т.е. возможно построение оценки ϑ без ошибки. Например, если $\sigma(\vartheta, t) = \vartheta h(t)$, $\vartheta > 0$, $h(t) > 0$, тогда по формуле Ито для X_t^2 получается стохастический дифференциал $\mathrm{d}X_t^2 = 2X_t \mathrm{d}X_t + \vartheta^2 h(t)^2 \,\mathrm{d}t$. Следовательно оценка

$$\vartheta_t = \left(\int_0^t h(s)^2 \,\mathrm{d}s\right)^{-1/2} \left(X_t^2 - 2\int_0^t X_s \mathrm{d}X_s\right)^{1/2} = \vartheta$$

для всех $t > 0$.

Для упрощения изложения предполагается, что все функции положительны и ограничены. Меры, отвечающие наблюдениям (1) при разных значениях параметра ϑ, эквивалентны, и функция отношения правдоподобия есть

$$L(\vartheta, X^T) = \exp\left\{\int_0^T \frac{f(\vartheta,t) m(\vartheta,t)}{\sigma_t^2} \mathrm{d}X_t - \int_0^T \frac{f(\vartheta,t)^2 m(\vartheta,t)^2}{2\sigma_t^2} \mathrm{d}t\right\}, \quad \vartheta \in \Theta, \tag{4}$$

где $m(\vartheta, t)$ — условное ожидание, $m(\vartheta, t) = \mathbf{E}_\vartheta (Y_t | X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$ (см. [4]).

ОМП $\hat\vartheta$ определяется как решение уравнения

$$L(\hat\vartheta, X^T) = \sup_{\vartheta \in \Theta} L\left(\vartheta, X^T\right). \tag{5}$$

Предположим, что ϑ – случайная величина с плотностью распределения $p(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, где $p(\cdot)$ – положительная непрерывная функция на Θ. Тогда байесовская оценка $\tilde{\vartheta}$ при квадратической функции потерь имеет вид

$$(6) \qquad \tilde{\vartheta} = \frac{\int_\Theta \vartheta p(\vartheta) L\left(\vartheta, X^T\right) \mathrm{d}\vartheta}{\int_\Theta p(\vartheta) L\left(\vartheta, X^T\right) \mathrm{d}\vartheta}.$$

Случайный процесс $m(\vartheta, t)$ является решением уравнений фильтрации (Калмана–Бьюси):

$$(7) \quad \mathrm{d}m(\vartheta,t) = -a(\vartheta,t)\, m(\vartheta,t)\,\mathrm{d}t + \frac{\gamma(\vartheta,t) f(\vartheta,t)}{\sigma_t^2}\left[\mathrm{d}X_t - f(\vartheta,t)\, m(\vartheta,t)\,\mathrm{d}t\right],$$

$$(8) \qquad \frac{\partial\gamma(\vartheta,t)}{\partial t} = -2a(\vartheta,t)\gamma(\vartheta,t) - \frac{\gamma(\vartheta,t)^2 f(\vartheta,t)^2}{\sigma_t^2} + b(\vartheta,t)^2$$

с начальными условиями $m(\vartheta,0) = y_0$ и $\gamma(\vartheta,0) = 0$. Здесь

$$\gamma(\vartheta,t) = \mathbf{E}_\vartheta\left(Y_t - m(\vartheta,t)\right)^2.$$

Описываются асимптотические свойства оценок $\hat{\vartheta}$ и $\tilde{\vartheta}$ при различных условиях регулярности функций $f(\vartheta,t)$, $a(\vartheta,t)$ и $b(\vartheta,t)$.

Третья оценка, которая будет интересна, — это одношаговая оценка-процесс максимального правдоподобия (One-step MLE-process) $\vartheta_t^\star$, $0 < \tau < t \leqslant T$. Она строится в два приема. Сначала по начальной малой выборке $X^\tau = (X_t, 0 \leqslant t \leqslant \tau)$ строится простая состоятельная оценка $\bar{\vartheta}_\tau$, а затем эта оценка используется следующим образом

$$(9) \qquad \vartheta_t^\star = \bar{\vartheta}_\tau + \mathbb{I}\left(\bar{\vartheta}_\tau\right)^{-1} \int_\tau^t \frac{\dot{\mathcal{M}}\left(\bar{\vartheta}_\tau, s\right)}{\sigma_s^2}\left[\mathrm{d}X_s - \mathcal{M}\left(\bar{\vartheta}_\tau, s\right)\mathrm{d}s\right], \qquad \tau < t \leqslant T.$$

Здесь обозначили через $\mathbb{I}(\vartheta)$ информацию Фишера и $\mathcal{M}(\vartheta,s) = f(\vartheta,s)m(\vartheta,t)$. Точка над функцией означает дифференцирование по ϑ.

Далее показывается, что эта оценка асимптотически эквивалентна ОМП, т.е. является асимптотически эффективной.

Сходная двухшаговая процедура оценивания предлагается и в случае наблюдений (1), где Y_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ — марковский процесс с двумя состояниями и матрицей (3). Неизвестный параметр $\vartheta = (\lambda, \mu)^\top$.

Напомним, что одношаговые ОМП (One-step MLE) были введены Фишером в 1925 г. [5] и исследованы Ле Камом в 1956 г. [6]. Впоследствии эти оценки были использованы многими статистиками для широкого класса моделей. Их построение мотивируется следующим образом. Пусть $\dot{V}(\hat{\vartheta}, X^T) = 0$ — уравнение максимального правдоподобия, где $V(\vartheta, X^T) = \ln L(\vartheta, X^T)$. Разложим решение этого уравнения в окрестности истинного значения ϑ_0 и получим $\dot{V}(\vartheta_0, X^T) + (\hat{\vartheta} - \vartheta_0)\ddot{V}(\bar{\vartheta}, X^T) = 0$. Можно написать $\hat{\vartheta} = \vartheta_0 - \ddot{V}(\bar{\vartheta}, X^T)^{-1}\dot{V}(\vartheta_0, X^T)$. Напомним, что при правильной нормировке

$\ddot{V}(\vartheta_0, X^T) \to -\mathbb{I}(\vartheta_0)$. Если в этом уравнении заменить ϑ и $\bar{\vartheta}$ некоторой состоятельной оценкой ϑ°, то получим одношаговую ОМП

$$\vartheta^\star = \vartheta^\circ + \frac{\dot{V}\left(\vartheta^\circ, X^T\right)}{\mathbb{I}\left(\vartheta^\circ\right)},$$

которая, при определенных условиях является асимптотически эффективной.

Заметим, что скорости сходимости оценок φ_ε в случае малого шума имеют порядки $\sqrt{\varepsilon}$, ε, ε^a, $a \in (1,2)$, ε^2 и в эргодических случаях (диффузионный и телеграфный процессы) порядок сходимости $\varphi_T = T^{-1/2}$. Эти скорости определяются локальным поведением (в окрестности истинного значения ϑ_0) расстояния Кульбака–Лейблера $R_{K-L}\left(u\right)$, которое символически можно записать следующим образом (малый шум):

$$R_{K-L}(u) = \int\limits_0^T \frac{\left[f(\vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u, t)m(\vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u, t) - f(\vartheta_0, t)m(\vartheta_0, t)\right]^2}{2\varepsilon^2\sigma_t^2} \mathrm{d}t \longrightarrow \Psi(u),$$

т.е., скорость сходимости $\varphi_\varepsilon \to 0$ должна быть такой, что этот интеграл имеет невырожденный предел $\Psi\left(u\right)$. Здесь $\Psi\left(u\right)$ — некоторая положительная функция, которая разная в разных задачах. Например, в гладком случае $\varphi_\varepsilon = \varepsilon$ и $\Psi\left(u\right) = \frac{1}{2}u^2\mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)$. Аналогичное соотношение имеем и в случае эргодических наблюдений с $\varphi_T = T^{-1/2}$.

Получены следующие результаты.

В случае, когда $f_t = f\left(\vartheta, t\right)$, $a_t = a\left(\vartheta, t\right)$, $\sigma_t = \varepsilon\sigma\left(t\right)$, $b_t = \varepsilon b\left(t\right)$, где $f\left(\vartheta, t\right)$ и $a\left(\vartheta, t\right)$ гладкие по ϑ, ОМП и БО при $\varepsilon \to 0$ асимптотически нормальные $\varepsilon^{-1}(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right)$ и асимптотически эффективные (теорема 1). Те же свойства имеет одношаговая ОМП (теорема 3).

В случае, когда $f_t = f(\vartheta, t)$, $a_t = a(\vartheta, t)$, $\sigma_t = \varepsilon\sigma(t)$,$b_t = b(\vartheta, t)$, где $f(\vartheta, t)$, $a(\vartheta, t)$ и $b(\vartheta, t)$ гладкие по ϑ, ОМП и БО при $\varepsilon \to 0$ асимптотически нормальные $\varepsilon^{-1/2}(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0) \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right)$ и асимптотически эффективные (теорема 4).

В случае, когда $f_t = h\left(t\right)\mathbb{1}_{\{t<\vartheta\}} + g\left(t\right)\mathbb{1}_{\{t\geqslant\vartheta\}}$, $\sigma_t = \varepsilon$, $b_t = \varepsilon b\left(t\right)$, ОМП и БО при $\varepsilon \to 0$ имеют разные предельные распределения с нормировкой ε^{-2} и асимптотически эффективны только БО (теорема 6). Если же разладка имеет место в уравнении состояний, то обе оценки асимптотически нормальны с "регулярной" скоростью ε^{-1} (теорема 7).

Далее рассматриваем задачу определения источника по наблюдениям гауссовских сигналов из этого источника, зарегистрированных детекторами на фоне малого белого гауссовского шума. Описано предельное поведение ОМП и БО положения источника при трех разных предположениях о форме фронта регистрируемых сигналов (теоремы 8–10).

Рассматривается также задача оценки параметров частично наблюдаемой линейной гауссовской системы в случае "больших выборок". Показано, что в гладком случае ОМП и БО при $T \to \infty$ асимптотически нормальны

$T^{1/2}(\hat{\vartheta}_T-\vartheta_0)\Rightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right)$ и асимптотически эффективны (теорема 11). Те же свойства имеет одношаговая ОМП (теорема 12).

Последняя задача посвящена оценке параметров $\vartheta=(\lambda,\mu)^\top$ в случае наблюдений (1), где $f_t=1$ и Y_t — марковский процесс с двумя состояниями и матрицей (3). Построена одношаговая ОМП-процесс этого параметра и доказана ее состоятельность и асимптотическая нормальность с нормировкой $T^{1/2}$ (теорема 13).

3. Диффузионные процессы, малый шум, гладкий случай

3.1. Линейные системы

Рассмотрим двумерное линейное стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t&=f\left(\vartheta,t\right)Y_t\,\mathrm{d}t+\varepsilon_1\sigma\left(t\right)\,\mathrm{d}W_t, &&X_0=0, &&0\leqslant t\leqslant T,\\
\mathrm{d}Y_t&=-a\left(\vartheta,t\right)Y_t\,\mathrm{d}t+\varepsilon_2 b\left(\vartheta,t\right)\,\mathrm{d}V_t, &&Y_0=y_0, &&0\leqslant t\leqslant T.
\end{aligned}$$

Функции $f\left(\vartheta,t\right),a\left(\vartheta,t\right),b\left(\vartheta,t\right)$ известны и для определенности будем считать их положительными. Рассматривается задача оценки параметра ϑ по наблюдениям X^T в двух разных асимптотиках: **A**) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon\rightarrow 0$ и **B**) $\varepsilon_1=\varepsilon\rightarrow 0$, $\varepsilon_2=1$.

В случае **A**) уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t&=f\left(\vartheta,t\right)Y_t\,\mathrm{d}t+\varepsilon\sigma\left(t\right)\mathrm{d}W_t, &&X_0=0, &&0\leqslant t\leqslant T,\\
\mathrm{d}Y_t&=-a\left(\vartheta,t\right)Y_t\,\mathrm{d}t+\varepsilon b\left(t\right)\mathrm{d}V_t, &&Y_0=y_0>0, &&0\leqslant t\leqslant T.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\vartheta_0\in\Theta$ истинное значение параметра. Множество $\Theta\subset\mathcal{R}^d$ открытое, выпуклое и ограниченное. При $\varepsilon=0$ решения этих уравнений $X_t\rightarrow x_t\left(\vartheta\right)$, $Y_t\rightarrow y\left(\vartheta,t\right)$ можно записать в виде функций

$$x_t\left(\vartheta_0\right)=\int_0^t f\left(\vartheta_0,s\right)y_s\left(\vartheta_0\right)\mathrm{d}s,\quad y_t\left(\vartheta_0\right)=y_0\exp\left\{-\int_0^t a\left(\vartheta_0,s\right)\mathrm{d}s\right\}.$$

Уравнения фильтрации (7)–(8) при $\varepsilon\rightarrow 0$ сходятся к уравнениям

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y\left(\vartheta,t\right)}{\partial t}&=-\left[a\left(\vartheta,t\right)\gamma_*\left(\vartheta,t\right)h_t\left(\vartheta\right)^2\right]y\left(\vartheta,t\right)+\gamma_*\left(\vartheta,t\right)h_t\left(\vartheta\right)h_t\left(\vartheta_0\right)y_t\left(\vartheta_0\right),\\
\frac{\partial\gamma_*\left(\vartheta,t\right)}{\partial t}&=-2a\left(\vartheta,t\right)\gamma_*\left(\vartheta,t\right)-\gamma_*\left(\vartheta,t\right)^2h\left(\vartheta,t\right)^2+b\left(t\right)^2, \qquad \gamma_*\left(\vartheta,0\right)=0,
\end{aligned}$$

где обозначено $y(\vartheta,t)=m(\vartheta,t)|_{\varepsilon=0}$, $\gamma_*(\vartheta,t)=\varepsilon^{-2}\gamma(\vartheta,t)$ и $h(\vartheta,t)=\sigma(t)^{-1}f(\vartheta,t)$. Заметим, что $y(\vartheta,t)$ зависит от ϑ_0, а уравнение для $\gamma_*(\vartheta,t)$ не зависит от ε. Введем функцию $M(\vartheta,t)=f(\vartheta,t)y(\vartheta,t)$, вектор-функцию $\dot M(\vartheta,t)$ и информационную матрицу

$$\mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)=\int_0^T\dot M\left(\vartheta_0,t\right)^\top\dot M\left(\vartheta_0,t\right)\sigma\left(t\right)^{-2}\mathrm{d}t.$$

Условие идентифицируемости для этой модели наблюдений имеет вид: для любого $\nu > 0$ имеем

$$\inf_{\|\vartheta-\vartheta_0\|>\nu} \int\limits_0^T \left[f\left(\vartheta,t\right)y\left(\vartheta,t\right) - f\left(\vartheta_0,t\right)y_t\left(\vartheta_0\right)\right]^2 \mathrm{d}t > 0. \tag{10}$$

Т е о р е м а 1. *Предположим, что функции $f(\vartheta,t)$ и $a(\vartheta,t)$ имеют две непрерывные ограниченные производные по ϑ, информационная матрица $\mathbb{I}(\vartheta)$ равномерно по ϑ не вырождена и условие идентифицируемости (10) выполнено. Тогда ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ равномерно на компактах состоятельны, асимптотически нормальны,*

$$\varepsilon^{-1}\left(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \zeta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right), \quad \varepsilon^{-1}\left(\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \zeta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right),$$

имеет место сходимость моментов

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right\|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0}\|\zeta\|^p, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right\|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0}\|\zeta\|^p$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [7, теорема 6.2].

При доказательстве используется два общих результата, полученных Ибрагимовым и Хасьминским в [8, теоремы 1.10.1 и 1.10.3]. Напомним основные элементы доказательства. Этот метод изучения применяется при доказательстве свойств ОМП и БО всех остальных результатов, представленных в этой работе. Введем нормированное отношение правдоподобия

$$Z_\varepsilon(u) = \frac{L\left(\vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u, X^T\right)}{L\left(\vartheta_0, X^T\right)}, \qquad u \in \mathbb{U}_\varepsilon = \left\{u:\ \vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u \in \Theta\right\}.$$

Нормирующая функция в этой задаче $\varphi_\varepsilon = \varepsilon$. Заметим, что в других задачах нормировка будет другой, но метод доказательства тот же. Например в задаче о разладке $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^2$. Предположим, что $Z_\varepsilon(u)$ сходится к некоторому предельному процессу $Z(u)$, $u \in \mathcal{R}^d$:

$$Z_\varepsilon(\cdot) \Longrightarrow Z(\cdot).$$

Введем два вектора $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$

$$Z(\hat{\zeta}) = \sup_{u\in\mathcal{R}^d} Z(u), \quad \tilde{\zeta} = \left(\int\limits_{\mathcal{R}^d} Z(u)\,\mathrm{d}u\right)^{-1} \int\limits_{\mathcal{R}^d} uZ(u)\,\mathrm{d}u. \tag{11}$$

Тогда предельные распределения оценок получают следующим образом. Пусть множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^d$. Для ОМП имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\varphi_\varepsilon^{-1}\left(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right) \in \mathcal{B}\right) = \\
&= \mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{\sup_{\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta-\vartheta_0)\in\mathcal{B}} L\left(\vartheta, X^T\right) > \sup_{\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta-\vartheta_0)\in\mathcal{B}^c} L\left(\vartheta, X^T\right)\right\} = \\
&= \mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{\sup_{\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta-\vartheta_0)\in\mathcal{B}} \frac{L\left(\vartheta, X^T\right)}{L\left(\vartheta_0, X^T\right)} > \sup_{\varphi_\varepsilon^{-1}(\vartheta-\vartheta_0)\in\mathcal{B}^c} \frac{L\left(\vartheta, X^T\right)}{L\left(\vartheta_0, X^T\right)}\right\} = \\
&= \mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{\sup_{u\in\mathcal{B}, u\in\mathbb{U}_\varepsilon} Z_\varepsilon(u) > \sup_{u\in\mathcal{B}^c, u\in\mathbb{U}_\varepsilon} Z_\varepsilon(u)\right\} \longrightarrow \\
&\qquad \longrightarrow \mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{\sup_{u\in\mathcal{B}} Z(u) > \sup_{u\in\mathcal{B}^c} Z(u)\right\} = \mathbf{P}_{\vartheta_0}\left(\hat{\zeta} \in \mathcal{B}\right).
\end{aligned}
$$

Здесь была сделана замена переменных $\vartheta = \vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u$. Для БО можем написать (ниже $\vartheta_u = \vartheta_0 + \varphi_\varepsilon u$)

$$
\tilde{\vartheta}_\varepsilon = \frac{\int_\Theta \theta p(\theta) L\left(\theta, X^T\right) \mathrm{d}\theta}{\int_\Theta p(\theta) L\left(\theta, X^T\right) \mathrm{d}\theta} = \vartheta_0 + \varphi_\varepsilon \frac{\int_{\mathbb{U}_\varepsilon} u p(\theta_u) Z_\varepsilon(u)\, \mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\varepsilon} p(\theta_u) Z_\varepsilon(u)\, \mathrm{d}u}.
$$

Следовательно,

$$
\varphi_\varepsilon^{-1}\left(\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right) = \frac{\int_{\mathbb{U}_\varepsilon} u p(\theta_u) Z_\varepsilon(u)\, \mathrm{d}u}{\int_{\mathbb{U}_\varepsilon} p(\theta_u) Z_\varepsilon(u)\, \mathrm{d}u} \Longrightarrow \frac{\int_{\mathcal{R}^d} u Z(u)\, \mathrm{d}u}{\int_{\mathcal{R}^d} Z(u)\, \mathrm{d}u} = \tilde{\zeta}.
$$

В условиях теоремы 1 (гладком случае)

$$
\begin{aligned}
Z_\varepsilon(u) = \exp&\left\{\langle u, \Delta_\varepsilon\rangle - \frac{1}{2} u^\top \mathbb{I}(\vartheta_0) u + r_\varepsilon\right\} \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow Z(u) = \exp\left\{\langle u, \Delta(\vartheta_0)\rangle - \frac{1}{2} u^\top \mathbb{I}(\vartheta_0) u\right\},
\end{aligned}
$$

где Δ_ε является “score-function” (логарифмическая производная отношения правдоподобия по параметру), $\Delta_\varepsilon \Rightarrow \Delta(\vartheta_0) \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{I}(\vartheta_0))$ и $r_\varepsilon \to 0$. Кроме того, $\hat{\zeta} = \zeta = \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1} \Delta(\vartheta_0)$, $\tilde{\zeta} = \zeta$.

Одношаговая оценка. Описанные выше ОМП и БО имеют серьезный недостаток, связанный со сложностью их вычисления. Действительно, чтобы найти ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ или БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ (см. (4)–(6)) надо решить уравнения фильтрации (7)–(8) при всех значениях параметра $\vartheta \in \Theta$, что является вычислительно довольно сложной задачей. Ниже предлагается построение оценки, называемой одношаговой ОМП (One-step MLE), которую вычислять существенно проще (см. (9)) и которая имеет те же асимптотические свойства, что и ОМП или БО. Построение этой оценки осуществляется в два этапа. Сначала строится простая предварительная оценка параметра по небольшой части начальных наблюдений, а затем эта оценка используется для построения одношаговой. Метод построения оценок при одномерном процессе Y_t позволяет построить оценку только в случае одномерного параметра $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$.

Предполагается, что функции $f(\vartheta, t), a(\vartheta, t)$ имеют две непрерывные ограниченные производные по ϑ и по t. Функции $f(\vartheta, 0)$ и $\dot{f}(\vartheta, 0)$ отделены от нуля:

$$\inf_{\vartheta\in\Theta} |f(\vartheta, 0)| > 0, \quad \inf_{\vartheta\in\Theta} \left|\dot{f}(\vartheta, 0)\right| > 0.$$

Введем функции

$$x_m(t) = \inf_{\vartheta\in\Theta} x_t(\vartheta) < \sup_{\vartheta\in\Theta} x_t(\vartheta) = x_M(t).$$

Заметим, что в окрестности $t = 0$

$$x_m(t) = x_t(\alpha), \quad x_M(t) = x_t(\beta).$$

Положим $\tau_\varepsilon = \varepsilon^\delta, \delta \in (0, 2)$, и введем множества

$$\mathbb{B}_\varepsilon = \{x_m(\tau_\varepsilon) < X_{\tau_\varepsilon} < x_M(\tau_\varepsilon)\},$$
$$\mathbb{B}_\varepsilon^- = \{X_{\tau_\varepsilon} \leqslant x_m(\tau_\varepsilon)\}, \quad \mathbb{B}_\varepsilon^- = \{X_{\tau_\varepsilon} \geqslant x_M(\tau_\varepsilon)\}.$$

Предварительную оценку определим равенством

$$\bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon} = \alpha 1\!\!1_{\left\{\mathbb{B}_\varepsilon^-\right\}} + \mu_\varepsilon 1\!\!1_{\{\mathbb{B}_\varepsilon\}} + \beta 1\!\!1_{\left\{\mathbb{B}_\varepsilon^+\right\}}, \tag{12}$$

где μ_ε является решением уравнения $x_{\tau_\varepsilon}(\mu_\varepsilon) = X_{\tau_\varepsilon}$.

Т е о р е м а 2. *Оценка $\bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon}$ состоятельна и для любого $p > 0$*

$$\sup_{\vartheta_0\in\Theta} \mathbf{E}_{\vartheta_0} |\bar{\vartheta}_{\tau_\varepsilon} - \vartheta_0|^p \leqslant C\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau_\varepsilon}}\right)^p \longrightarrow 0.$$

Информация Фишера

$$\mathrm{I}_\tau(\vartheta, t) = \int\limits_\tau^t \left[\frac{\dot{f}(\vartheta, s)\, y_s(\vartheta) + f(\vartheta, s)\, \dot{y}(\vartheta, s)}{\sigma(s)}\right]^2 \mathrm{d}s, \quad \mathrm{I}(\vartheta, t) = \mathrm{I}_0(\vartheta, t).$$

Статистический эксперимент является регулярным с локально асимптотически нормальным семейством мер, поэтому имеем нижнюю границу Гаека-Ле Кама на риск любой оценки $\vartheta_{t,\varepsilon}$, построенной по наблюдениям $X^t = (X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$ [8]:

$$\lim_{\nu\to 0} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\vartheta (\vartheta_{t,\varepsilon} - \vartheta)^2 \geqslant \mathrm{I}(\vartheta_0, t)^{-1}.$$

Назовем оценку $\vartheta^*_{t,\varepsilon}$ асимптотически эффективной, если при всех $\vartheta_0 \in \Theta$, имеем равенство

$$\lim_{\nu\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\nu} \varepsilon^{-2}\mathbf{E}_\vartheta \left(\vartheta^*_{t,\varepsilon}-\vartheta\right)^2 = \mathrm{I}\left(\vartheta_0,t\right)^{-1}. \tag{13}$$

Введем одношаговую ОМП-процесс

$$\vartheta^\star_{t,\varepsilon} = \bar\vartheta_{\tau_\varepsilon} + \frac{1}{\mathrm{I}_{\tau_\varepsilon}\left(\bar\vartheta_{\tau_\varepsilon},t\right)}\int\limits_{\tau_\varepsilon}^{t} \frac{\dot M\left(\bar\vartheta_{\tau_\varepsilon},s\right)}{\sigma\left(s\right)^2}\left[\mathrm{d}X_s - f\left(\bar\vartheta_{\tau_\varepsilon},s\right)m\left(\bar\vartheta_{\tau_\varepsilon},t\right)\mathrm{d}s\right], \qquad \tau_\varepsilon < t \leqslant T, \tag{14}$$

где обозначили $\dot M\left(\vartheta,s\right) = \dot f\left(\vartheta,s\right)y_s\left(\vartheta\right) + f\left(\vartheta,s\right)\dot y\left(\vartheta,s\right)$.

Теорема 3. Положим $\delta \in (0,1)$, тогда оценка $\vartheta^\star_{t,\varepsilon}$, $\tau_\varepsilon < t \leqslant T$ состоятельна, асимптотически нормальная

$$\varepsilon^{-1}\left(\vartheta^\star_{t,\varepsilon}-\vartheta_0\right) \Longrightarrow \zeta_t \sim \mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}\left(\vartheta_0,t\right)^{-1}\right),$$

моменты сходятся: для любого $p > 0$

$$\varepsilon^{-p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\vartheta^\star_{t,\varepsilon}-\vartheta_0\right|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\zeta_t\right|^p$$

и асимптотически эффективная при всех $t \in (0,T]$.

Доказательство см. [9].

В случае **B**) имеем уравнения

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= f\left(\vartheta,t\right)Y_t\mathrm{d}t + \varepsilon\sigma\left(t\right)\mathrm{d}W_t, \qquad && X_0 = 0, \qquad && 0 \leqslant t \leqslant T,\\ \mathrm{d}Y_t &= -a\left(\vartheta,t\right)Y_t\mathrm{d}t + b\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}V_t, && Y_0 = y_0 > 0, && 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}$$

Эта модель наблюдений имеет интересные особенности. Имеют место следующие пределы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[f\left(\vartheta,t\right)\dot m\left(\vartheta,t\right) + \dot f\left(\vartheta,t\right)m\left(\vartheta,t\right)\right] = 0,$$

$$\varepsilon^2\mathrm{I}_\varepsilon\left(\vartheta\right) = \int\limits_0^T \sigma\left(t\right)^{-2}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[f\left(\vartheta,t\right)m\left(\vartheta,t\right)\right]\right)^2\mathrm{d}t \longrightarrow 0$$

и по распределению

$$\varepsilon^{-1/2}\left[f\left(\vartheta,t\right)\dot m\left(\vartheta,t\right) + \dot f\left(\vartheta,t\right)m\left(\vartheta,t\right)\right] \Longrightarrow n\left(\vartheta,t\right)\,\xi_t,$$

где ξ_t, $t \in (0,T]$ — независимые случайные величины и вид функции $n\left(\vartheta,t\right)$ ясен из определения информации Фишера $\mathrm{I}_0\left(\vartheta\right)$ ниже. Но

$$\varepsilon\,\mathrm{I}_\varepsilon\left(\vartheta\right) \not\longrightarrow \int\limits_0^T n\left(\vartheta,t\right)^2\xi_t^2\,\mathrm{d}t.$$

Заметим, что этот интеграл не существует, так как предел $\xi_t^2, 0 < t \leqslant T$ не является сепарабельным процессом. Правильный предел есть

$$\varepsilon\,\mathrm{I}_\varepsilon(\vartheta) \longrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^T n(\vartheta,t)^2\ \mathrm{d}t \equiv \mathrm{I}_0(\vartheta)\,.$$

Введем обозначения $S(\vartheta,t) = f(\vartheta,t)\,b(\vartheta,t)$,

$$G(\vartheta,\vartheta_0) = \int\limits_0^T \frac{[S(\vartheta,t)-S(\vartheta_0,t)]^2}{2S(\vartheta,t)\sigma(t)}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{I}_0(\vartheta) = \int\limits_0^T \frac{S(\vartheta,t)}{2\sigma(t)}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\ln[S(\vartheta,t)]\right)^2\mathrm{d}t,$$

и условия $\mathcal{C}$:

$\mathcal{C}_1$. *Функции $f(\vartheta,t)$, $b(\vartheta,t)$, $\vartheta\in\Theta$, $t\in[0,T]$ и $\sigma(t)$, $t\in[0,T]$ ограничены и имеют две непрерывные ограниченные производные по ϑ, t,*

$$\kappa = \inf_{\vartheta\in\Theta}\inf_{0\leqslant t\leqslant T} f(\vartheta,t) > 0, \qquad \inf_{0\leqslant t\leqslant T}\sigma(t) > 0, \qquad \inf_{\vartheta\in\Theta}\inf_{0\leqslant t\leqslant T} b(\vartheta,t) > 0.$$

$\mathcal{C}_2$. *Для любого $\nu > 0$*

$$\inf_{\vartheta_0\in\Theta}\inf_{|\vartheta-\vartheta_0|>\nu} G(\vartheta,\vartheta_0) > 0.$$

$\mathcal{C}_3$. *Информация Фишера*

$$\inf_{\vartheta\in\Theta}\mathrm{I}_0(\vartheta) > 0.$$

Статистический эксперимент является регулярным, и в результате имеем нижнюю границу Гаека-Ле Кама

$$\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\delta}\varepsilon^{-1}\mathbf{E}_\vartheta\left|\bar\vartheta_\varepsilon-\vartheta\right|^2 \geqslant \mathrm{I}_0(\vartheta)^{-1}\,.$$

Как и в случае **A**, асимптотически эффективную оценку ϑ_ε^* определяем с помощью этой границы следующим равенством

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\delta}\varepsilon^{-1}\mathbf{E}_\vartheta\left|\vartheta_\varepsilon^*-\vartheta\right|^2 = \mathrm{I}_0(\vartheta)^{-1}\,.$$

ОМП и БО определяются соотношениями (5), (6).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия $\mathcal{C}$. Тогда ОМП и БО состоятельны, асимптотически нормальны*

$$\frac{\hat\vartheta_\varepsilon-\vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon}} \Longrightarrow \zeta\sim\mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}_0(\vartheta_0)^{-1}\right), \qquad \frac{\tilde\vartheta_\varepsilon-\vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon}} \Longrightarrow \zeta,$$

моменты сходятся: для любого $p > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\frac{\hat\vartheta_\varepsilon-\vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\zeta|^p\,, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\frac{\tilde\vartheta_\varepsilon-\vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0}|\zeta|^p$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [10].

Заметим, что для этой модели также возможно построение одношаговой ОМП-процесса.

Рассмотрим систему уравнений

$$\mathrm{d}X_t = f_t(\vartheta, X_t)\, Y_t \mathrm{d}t + \varepsilon \mathrm{d}W_t, \quad X_0 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\mathrm{d}Y_t = -a_t(\vartheta, X_t)\, Y_t \mathrm{d}t + \varepsilon b_t(X_t)\, \mathrm{d}V_t, \quad Y_0 = y_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

где, как и раньше, W_t, V_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ — независимые винеровские процессы и Y_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ — ненаблюдаемый (hidden) процесс. Здесь Y_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ — условно гауссовский процесс, и фильтрация таких процессов была описана Р. Липцером [11] (см. также гл. 11 в [4]). Обозначим $m(\vartheta, t) = \mathbf{E}_\vartheta(Y_t | X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$ и $\gamma(\vartheta, t) = \varepsilon^{-2}\mathbf{E}_\vartheta([Y_t - m(\vartheta, t)]^2 | X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$. Уравнения фильтрации имеют вид

$$\mathrm{d}m(\vartheta, t) = -a_t(\vartheta, X_t)\, m(\vartheta, t)\, \mathrm{d}t +$$
$$+\, \gamma(\vartheta, t)\, f_t(\vartheta, X_t)\left[\mathrm{d}X_t - f_t(\vartheta, X_t)\, m(\vartheta, t)\, \mathrm{d}t\right],$$
$$\frac{\partial \gamma(\vartheta, t)}{\partial t} = -2a_t(\vartheta, X_t)\, \gamma(\vartheta, t) - \gamma(\vartheta, t)^2 f_t(\vartheta, X_t)^2 + b_t(X_t)^2$$

с начальными условиями $m(\vartheta, 0) = y_0, \gamma(\vartheta, 0) = 0$.

Введем обозначения $S_t(\vartheta, X) = f_t(\vartheta, X_t)\, m(\vartheta, t)$,

$$\dot S_t(\vartheta, X) = \dot f_t(\vartheta, X_t)\, m(\vartheta, t) + f_t(\vartheta, X_t)\, \dot m(\vartheta, t),$$
$$\dot S_t(\vartheta, x) = \dot f_t(\vartheta, X_t)\, m(\vartheta, t)\big|_{\varepsilon=0} + f_t(\vartheta, X_t)\, \dot m(\vartheta, t)\big|_{\varepsilon=0} =$$
$$= \dot f_t(\vartheta, x_t)\, y(\vartheta, t) + f_t(\vartheta, x_t)\, \dot y(\vartheta, t),$$
$$\mathbb{I}(\vartheta) = \int_0^T \dot S_t(\vartheta, x)^\top \dot S_t(\vartheta, x)\, \mathrm{d}t.$$

Здесь $S_t(\vartheta, x) = S_t(\vartheta, x_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$. Условие идентифицируемости: для любого $\nu > 0$

$$\inf_{\|\vartheta - \vartheta_0\| > \nu} \int_0^T \left[f_t(\vartheta, x_t)\, y(\vartheta, t) - f_t(\vartheta_0, x_t)\, y(\vartheta_0, t)\right]^2 \mathrm{d}t > 0.$$

Теорема 5. *Предположим, что функции $f_t(\vartheta, x), a_t(\vartheta, x)$ имеют две непрерывные ограниченные производные по θ, выполнено условие идентифицируемости и матрица информации Фишера $\mathbb{I}(\vartheta)$ равномерно по ϑ невырожденна. Тогда ОМП $\hat\vartheta_\varepsilon$ и БО $\tilde\vartheta_\varepsilon$ состоятельны, асимптотически нормальные*

$$\frac{\hat\vartheta_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon} \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right), \quad \frac{\tilde\vartheta_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon} \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right),$$

моменты сходятся и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [7, теорема 6.4].

Можно также рассмотреть, например, следующую нелинейную модель наблюдений

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= f(\vartheta, Y_t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon \mathrm{d}W_t, \quad X_0 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \mathrm{d}Y_t &= -a(\vartheta, Y_t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon \mathrm{d}V_t, \quad Y_0 = y_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}$$

Построение условного ожидания $\mathbf{E}_\vartheta(Y_t | X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$ является сложной задачей, но построение состоятельной и асимптотически нормальной (но не эффективной) оценки может быть реализовано следующим образом. Заметим, что случайный процесс Y_t допускает разложение

$$\begin{gathered} Y_t = y_t(\vartheta) + \varepsilon y_t^{(1)}(\vartheta) + O\left(\varepsilon^2\right), \\ f(\vartheta, Y_t) = f(\vartheta, y_t(\vartheta)) + f'_y(\vartheta, y_t(\vartheta))(Y_t - y_t(\vartheta)) + O\left(\varepsilon^2\right), \end{gathered}$$

где $y_t(\vartheta) = Y_t|_{\varepsilon=0}$ и $y_t^{(1)}(\vartheta)$ — решение линейного уравнения

$$\mathrm{d}y_t^{(1)}(\vartheta) = -a'_y(\vartheta, y_t(\vartheta))\, y_t^{(1)}(\vartheta)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}V_t, \quad y_0^{(1)}(\vartheta) = 0.$$

Далее исходная система уравнений заменяется линеаризированной и уже для этой линейной системы выписываются уравнения фильтрации. На основании линейной модели строится псевдо-ОМП, доказывается ее состоятельность и асимптотическая нормальность. Конечно условие идентифицируемости отличается от обычного. Подробности см. в [7, теорема 6.5].

4. Диффузионные процессы, малый шум, задача о разладке

Рассмотрим частично наблюдаемые линейные модели наблюдений с разладками в уравнении наблюдений (**A**) и в уравнении состояний (**B**).

A. Первая модель имеет вид

$$\begin{gathered} \mathrm{d}X_t = h_t Y_t \mathbb{1}_{\{t<\vartheta\}}\,\mathrm{d}t + g_t Y_t \mathbb{1}_{\{t\geqslant\vartheta\}}\,\mathrm{d}t + \varepsilon\,\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \mathrm{d}Y_t = -a_t Y_t\,\mathrm{d}t + \varepsilon b_t\,\mathrm{d}V_t, \quad Y_0 = y_0 \neq 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{gathered}$$

Неизвестный параметр — это момент разладки $\vartheta \in \Theta = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < T$ и его надо оценить по наблюдениям $X^T = (X_t, 0 \leqslant t \leqslant T)$. Функции h_t, g_t, a_t, b_t предполагаются ограниченными.

Для построения ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ этого параметра понадобится условное ожидание $m(\vartheta, t) = \mathbf{E}_\vartheta(Y_t | X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$. Процесс $m(\vartheta, t)$ удовлетворяет уравнениям фильтрации

$$\begin{gathered} \mathrm{d}m(\vartheta,t) = -a_t m(\vartheta,t)\mathrm{d}t + \gamma(\vartheta,t) h_t[\mathrm{d}X_t - h_t m(\vartheta,t)\mathrm{d}t], \quad m(\vartheta,0) = y_0, \quad 0 \leqslant t < \vartheta, \\ \frac{\partial \gamma(\vartheta,t)}{\partial t} = -2a_t \gamma(\vartheta,t) - \gamma(\vartheta,t)^2 h_t^2 + b_t^2, \quad \gamma(\vartheta,0) = 0, \qquad 0 \leqslant t < \vartheta \end{gathered}$$

и для $t \in [\vartheta, T]$

$$\mathrm{d}m(\vartheta,t) = -a_t m(\vartheta,t)\,\mathrm{d}t + \gamma(\vartheta,t)\, g_t\left[\mathrm{d}X_t - g_t m(\vartheta,t)\,\mathrm{d}t\right],$$

$$\frac{\partial\gamma\left(\vartheta,t\right)}{\partial t}=-2a_t\gamma\left(\vartheta,t\right)-\gamma\left(\vartheta,t\right)^2g_t^2+b_t^2,$$

с начальными значениями $m\left(\vartheta,\vartheta\right),\gamma\left(\vartheta,\vartheta\right)$. Разумеется, на интервале $[0,\vartheta]$ имеем $m\left(\vartheta,t\right)=m\left(t\right)$ и $\gamma\left(\vartheta,t\right)=\gamma\left(t\right)$.

Введем случайные величины $\hat\zeta$ и $\tilde\zeta$ с помощью уравнений (11), где случайный процесс $Z\left(u\right)$ есть

$$Z\left(u\right)=\exp\left\{\rho\left(\vartheta_0\right)W\left(u\right)-\frac{|u|}{2}\rho\left(\vartheta_0\right)^2\right\},\quad u\in\mathcal{R}.$$

Ранее через $W\left(\cdot\right)$ был обозначен двусторонний винеровский процесс,

$$\rho\left(\vartheta\right)=\left(h_\vartheta-g_\vartheta\right)y_\vartheta,\quad y_\vartheta=y_0\exp\left\{-\int\limits_0^\vartheta a_s\mathrm{d}s\right\}.$$

Имеется нижняя граница на среднеквадратический риск любой оценки [8]

$$\lim_{\delta\to0}\varliminf_{\varepsilon\to0}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\delta}\varepsilon^{-4}\mathbf{E}_\vartheta\left|\bar\vartheta_\varepsilon-\vartheta\right|^2\geqslant\mathbf{E}_{\vartheta_0}\tilde\zeta^2.$$

Асимптотически эффективную оценку ϑ_ε^* определяем с помощью этой границы следующим равенством

$$\lim_{\delta\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\delta}\varepsilon^{-4}\mathbf{E}_\vartheta\left|\vartheta_\varepsilon^*-\vartheta\right|^2=\mathbf{E}_{\vartheta_0}\tilde\zeta^2.$$

Т е о р е м а 6. *Предположим, что* $\inf_{\vartheta\in\Theta}\left|\rho\left(\vartheta\right)\right|>0$. *Тогда ОМП* $\hat\vartheta_\varepsilon$ *и БО* $\tilde\vartheta_\varepsilon$ *состоятельны, имеют разные предельные распределения*

$$\frac{\hat\vartheta_\varepsilon-\vartheta_0}{\varepsilon^2}\Longrightarrow\hat\zeta,\quad\frac{\tilde\vartheta_\varepsilon-\vartheta_0}{\varepsilon^2}\Longrightarrow\tilde\zeta,$$

моменты сходятся: для любого $p>0$

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\frac{\hat\vartheta_\varepsilon-\vartheta_0}{\varepsilon^2}\right|^p\to\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\hat\zeta\right|^p,\quad\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\frac{\tilde\vartheta_\varepsilon-\vartheta_0}{\varepsilon^2}\right|^p\to\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\tilde\zeta\right|^p$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. [7, теорема 6.6] и [12].

B. Рассмотрим теперь частично наблюдаемую систему с разладкой в уравнении состояний

$$\mathrm{d}X_t=f_tY_t\,\mathrm{d}t+\varepsilon\,\mathrm{d}W_t,\quad X_0=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$
$$\mathrm{d}Y_t=h_tY_t1\!\!1_{\{t<\vartheta\}}\,\mathrm{d}t+g_tY_t1\!\!1_{\{t\geqslant\vartheta\}}\,\mathrm{d}t+\varepsilon b_t\,\mathrm{d}V_t,\quad Y_0=y_0\neq0.$$

Обозначим $\Theta = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta < T$, $\gamma(\vartheta, t) = \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\vartheta (Y_t - m(\vartheta, t))^2$, $r_t(\vartheta) = h_t \mathbb{I}_{\{t<\vartheta\}} + g_t \mathbb{I}_{\{t\geqslant\vartheta\}}$, $\rho(\vartheta) = (h(\vartheta) - g(\vartheta)) y_\vartheta(\vartheta)$ и положим

$$z_t(\vartheta) = \rho(\vartheta) \exp\left\{ \int\limits_\vartheta^t \left[g_s - f_s^2 \gamma(\vartheta, s) \right] \mathrm{d}s \right\}, \quad \frac{\partial y_t(\vartheta)}{\partial t} = r_t(\vartheta) y_t(\vartheta),\ y_0(\vartheta) = y_0,$$

$$\frac{\partial \gamma(\vartheta, t)}{\partial t} = 2 r_t(\vartheta) \gamma(\vartheta, t) - f_t^2 \gamma(\vartheta, t)^2 + b_t^2, \quad \gamma(\vartheta, 0) = 0, \quad \mathbb{I}(\vartheta) = \int\limits_\vartheta^T f_t^2\, z_t(\vartheta)^2\, \mathrm{d}t.$$

Для $m_t(\vartheta) = \mathbf{E}_\vartheta (Y_t | X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$ имеем

$$\mathrm{d}m(\vartheta, t) = r_t(\vartheta) m(\vartheta, t)\, \mathrm{d}t + \gamma(\vartheta, t) f_t \left[\mathrm{d}X_t - f_t m(\vartheta, t)\, \mathrm{d}t \right], \quad m(\vartheta, 0) = y_0.$$

Статистический эксперимент в этом случае является регулярным и справедлива нижняя граница Гаека-Ле Кама

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{|\vartheta - \vartheta_0| < \delta} \varepsilon^{-2} \mathbf{E}_\vartheta \left| \bar\vartheta_\varepsilon - \vartheta \right|^2 \geqslant \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}.$$

Как обычно, асимптотически эффективными назовем оценки, для которых здесь имеется равенство при всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Теорема 7. Предположим, что $\inf_{\vartheta\in\Theta} |\rho(\vartheta)| > 0$. *Тогда ОМП* $\hat\vartheta_\varepsilon$ *и БО* $\tilde\vartheta_\varepsilon$ *состоятельны, асимптотически нормальны,*

$$\frac{\hat\vartheta_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon} \Longrightarrow \zeta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right), \quad \frac{\tilde\vartheta_\varepsilon - \vartheta_0}{\varepsilon} \Longrightarrow \zeta,$$

имеет место сходимость моментов $(p > 0)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \hat\vartheta_\varepsilon - \vartheta_0 \right\|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\zeta\|^p, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-p} \mathbf{E}_{\vartheta_0} \left\| \tilde\vartheta_\varepsilon - \vartheta_0 \right\|^p = \mathbf{E}_{\vartheta_0} \|\zeta\|^p$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. [7, теорема 6.7].

5. Диффузионные процессы, малый шум, локализация источника на плоскости

Рассмотрим задачу обнаружения положения $\vartheta_0 = (x_0, y_0)^\top$ источника $\mathbb{S}_0$ на плоскости по наблюдениям K детекторов $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{D}_K$ (см. рис. 1).

Обозначим через $\vartheta_k = (x_k, y_k)^\top \in \mathcal{R}^2$ положение k-го детектора. Источник начинает излучать в момент $t = 0$ и сигнал приходит к k-му детектору через время $\tau_k(\vartheta_0) = \nu^{-1} \|\vartheta_k - \vartheta_0\|$, где $\nu > 0$ — скорость распространения сигнала в среде и $\|\cdot\|$ — норма в $\mathcal{R}^2$. Наблюдения k-го детектора могут быть записаны следующим образом:

$$\mathrm{d}X_k(t) = a_k(t)\, \bar\psi(t - \tau_k(\vartheta_0))\, Y_k(t)\, \mathrm{d}t + \varepsilon \sigma_k(t)\, \mathrm{d}W_k(t), \quad X_k(0) = 0. \tag{15}$$

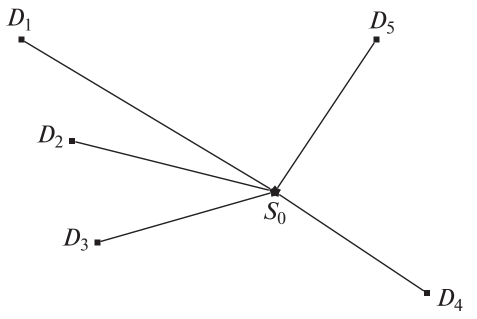

Рис. 1. Модель наблюдений.

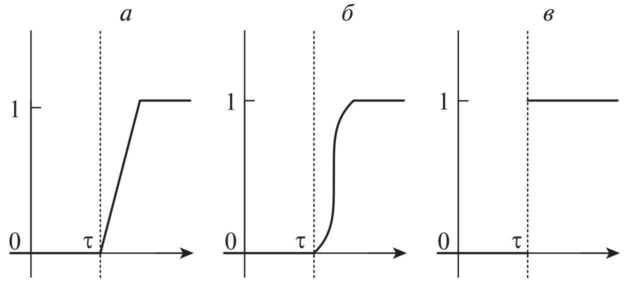

Рис. 2. Пример функций: $a - \psi_\delta(\cdot)$, $б - \psi_{\delta,\kappa}$, $в - \psi(\cdot)$.

Здесь $a_k(\cdot)$, $\sigma_k(\cdot)$, $\bar\psi(t-\tau_k(\vartheta_0))$ и $\sigma_k(\cdot)$ — известные ограниченные функции и $W_k(t)$, $k=1,\ldots,K$ — независимые винеровские процессы. Функция $\bar\psi(t)=0$, $t<0$ и отражает форму сигнала в момент его достижения детектора. Рассмотрим три разных случая: гладкий, сингулярность типа касп (cusp-type) и сингулярность типа разладки (change-point type). А именно,

$$\psi_\delta(t)=\frac{t}{\delta}\mathbb{I}_{\{0\leqslant t\leqslant\delta\}}+\mathbb{I}_{\{t>\delta\}},\quad \psi(t)=\mathbb{I}_{\{t>0\}},$$

$$\psi_{\delta,\kappa}(t)=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{sgn}(2t-\delta)\left|\frac{2t}{\delta}-1\right|^{\kappa}\right)\mathbb{I}_{\{0\leqslant t\leqslant\delta\}}+\mathbb{I}_{\{t>\delta\}}.$$

Параметр δ известен и принимает малые значения. Примеры таких функций показаны на рис. 2.

Сигналы $Y_k(\cdot)$, $k=1,\ldots,K$ удовлетворяют линейному СДУ

$$\mathrm{d}Y_k(t)=-f_k(t)\,Y_k(t)\,\mathrm{d}t+\varepsilon b_k(t)\,\mathrm{d}V_k(t),\quad Y_k(0)=y_k\neq 0. \tag{16}$$

Рассматриваем задачу оценивания положения (параметра) ϑ_0 по наблюдениям $X^T=(X_1,\ldots,X_K)$, где $X_k=(X_k(t),0\leqslant t\leqslant T)$. Процессы $Y_k(\cdot)$ ненаблюдаемы (hidden).

Для определенности предполагается, что функции $a_k(\cdot)$, $\sigma_k(\cdot)$, $f_k(\cdot)$, $b_k(\cdot)$, $k=1,\ldots,K$ ограничены и $\sigma_k(\cdot)$ отделена от нуля. Множество Θ открытое, выпуклое и ограниченное. Как минимум три детектора не лежат на одной прямой.

Функция правдоподобия имеет вид

$$\ln L\left(\vartheta, X^K\right)=\sum_{k=1}^K \int\limits_{\tau_k(\vartheta)}^T \frac{a_k\left(t\right) M_k\left(\tau_k\left(\vartheta\right), t\right)}{\varepsilon^2 \sigma_k\left(t\right)^2} \,\mathrm{d} X_k\left(t\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^K \int\limits_{\tau_k(\vartheta)}^T \frac{a_k\left(t\right)^2 M_k\left(\tau_k\left(\vartheta\right), t\right)^2}{2 \varepsilon^2 \sigma_k\left(t\right)^2} \,\mathrm{d} t,$$

где обозначили $M_k(\tau_k, t)=\bar{\psi}(t-\tau_k) m_k(\tau_k, t)$ и условное ожидание $m_k(\tau_k, t)= =\mathbf{E}_\vartheta(Y_k(t) | X_k(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$. ОМП и БО определены по тем же формулам (5), (6). Цель — изучить асимптотические ($\varepsilon \rightarrow 0$) свойства этих оценок в трех ситуациях: гладкой, типа касп и с разладкой.

Введем обозначения $\tau_k\left(\vartheta_0\right)=\nu^{-1}\left\|\vartheta_k-\vartheta_0\right\|$,

$$\frac{\partial \tau_k\left(\vartheta_0\right)}{\partial x_0}=-\frac{x_k-x_0}{\nu \rho_k}=-\frac{\mu_{k, x}}{\nu}, \quad \frac{\partial \tau_k\left(\vartheta_0\right)}{\partial y_0}=-\frac{y_k-y_0}{\nu \rho_k}=-\frac{\mu_{k, y}}{\nu},$$

$$\rho_k=\left\|\vartheta_k-\vartheta_0\right\|, \quad \mu_k=\left(\mu_{k, x}, \mu_{k, y}\right)^{\top}, \quad\left\|\mu_k\right\|=1,$$

$$h_k\left(t\right)=\frac{a_k\left(t\right)}{\sigma_k\left(t\right)}, \quad \mathbb{B}_k^{+}=\left(w: \quad\left\langle\mu_k, w\right\rangle>0\right), \mathbb{B}_k^{-}=\left(w: \quad\left\langle\mu_k, w\right\rangle<0\right).$$

Заметим, что

$$\tau_k\left(\vartheta_0+\nu \varphi_{\varepsilon} w\right)=\tau_k\left(\vartheta_0\right)-\varphi_{\varepsilon}\left\langle\mu_k, w\right\rangle+O\left(\varphi_{\varepsilon}^2\right), \quad w \in \mathcal{R}^2, \quad \varphi_{\varepsilon} \rightarrow 0.$$

Случайные процессы $m_k\left(\tau_k, t\right),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ k=1, \ldots, K$ и функции $\gamma_k\left(\vartheta, t\right)$, $0 \leqslant t \leqslant T,\ k=1, \ldots, K$ удовлетворяют соответствующим уравнениям фильтрации, которые здесь не приводятся. Они могут быть найдены в [13]. Заметим, что калмановская фильтрация активно используется в задачах GPS-локализации (см., например, [14, 15]).

Гладкий случай. Предположим, что

$$\bar{\psi}\left(t-\tau_k\right)=\psi_\delta\left(t-\tau_k\right)=\frac{\left(t-\tau_k\right)}{\delta} \mathbb{I}_{\left\{0 \leqslant t-\tau_k \leqslant \delta\right\}}+\mathbb{I}_{\left\{t \geqslant \delta+\tau_k\right\}}.$$

Введем две функции

$$\dot{M}_{k, x}^o\left(\tau_k\left(\vartheta_0\right), t\right)=\left.\frac{\partial\left[m_k\left(\tau_k\left(\vartheta\right), t\right) \psi_\delta\left(t-\tau_k\left(\vartheta\right)\right)\right]}{\partial \tau_k}\right|_{\vartheta=\vartheta_0, \varepsilon=0} \frac{\partial \tau_k\left(\vartheta_0\right)}{\partial x_0},$$

$$\dot{M}_{k, y}^o\left(\tau_k\left(\vartheta_0\right), t\right)=\left.\frac{\partial\left[m_k\left(\tau_k\left(\vartheta\right), t\right) \psi_\delta\left(t-\tau_k\left(\vartheta\right)\right)\right]}{\partial \tau_k}\right|_{\vartheta=\vartheta_0, \varepsilon=0} \frac{\partial \tau_k\left(\vartheta_0\right)}{\partial y_0}$$

и матрицу $\mathbb{I}(\vartheta_0) = \left(\mathrm{I}(\vartheta_0)_{l,m}\right)$ с компонентами

$$\mathrm{I}_{1,1}(\vartheta_0) = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\tau_k(\vartheta_0)}^{T} h_k(t)^2 \dot{M}_{k,x}^{o}(\tau_k(\vartheta_0), t)^2 \,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{I}_{2,2}(\vartheta_0) = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\tau_k(\vartheta_0)}^{T} h_k(t)^2 \dot{M}_{k,y}^{o}(\tau_k(\vartheta_0), t)^2 \,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{I}_{1,2}(\vartheta_0) = \mathrm{I}_{2,1}(\vartheta_0) = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\tau_k(\vartheta_0)}^{T} h_k(t)^2 \dot{M}_{k,x}^{o}(\tau_k(\vartheta_0), t)\, \dot{M}_{k,y}^{o}(\tau_k(\vartheta_0), t) \,\mathrm{d}t.$$

Имеем нижнюю границу Гаека-Ле Кама на риски всех оценок

$$\lim_{\delta\to 0} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|\vartheta-\vartheta_0\|\leqslant\delta} \varepsilon^{-2}\mathbf{E}_{\vartheta}\left\|\bar{\vartheta}_{\varepsilon}-\vartheta\right\|^2 \geqslant \mathbf{E}_{\vartheta_0}\|\zeta\|^2, \quad \zeta\sim\mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

Как обычно, определим асимптотически эффективные оценки с помощью этой границы.

Т е о р е м а 8. *Предположим, что матрица $\mathbb{I}(\vartheta_0)$ равномерно по $\vartheta\in\Theta$ не вырождена. Тогда ОМП и БО состоятельны, асимптотически нормальны*

$$\varepsilon^{-1}\left(\hat{\vartheta}_{\varepsilon}-\vartheta_0\right) \Longrightarrow \zeta\sim\mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}(\vartheta_0)^{-1}\right), \quad \varepsilon^{-1}\left(\tilde{\vartheta}_{\varepsilon}-\vartheta_0\right) \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right),$$

моменты сходятся: для любого $p>0$

$$\varepsilon^{-p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\hat{\vartheta}_{\varepsilon}-\vartheta_0\right\|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0}\|\zeta\|^p, \quad \varepsilon^{-p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\tilde{\vartheta}_{\varepsilon}-\vartheta_0\right\|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0}\|\zeta\|^p,$$

и обе оценки асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [13].

Случай сингулярности типа касп. Рассмотрим случай возрастания сигнала с помощью непрерывной, но не дифференцирируемой функции (информация Фишера равна бесконечности), имеющей вид

$$\psi_{\delta,\kappa}(t) = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{sgn}(2t-\delta)\left|\frac{2t}{\delta}-1\right|^{\kappa}\right)\mathbb{1}_{\{0\leqslant t\leqslant\delta\}} + \mathbb{1}_{\{\delta\leqslant t\leqslant T\}}.$$

Эта модель наблюдений предлагается, как альтернатива модели разладки. Реальные технические устройства, в которых сигналу соответствует электрический ток, не могут реализовать действительно разрывные функции и модель с каспом может оказаться ближе к реальной.

Введем обозначения

$$\pi_k(\vartheta_0) = h_k(\tau_k(\vartheta_0+\delta/2))\, y_k(\tau_k(\vartheta_0)+\delta/2),$$

$$\pi_k = \pi_k(\vartheta_0), \quad Q(\kappa)^2 = \int_{\mathcal{R}} \left[\operatorname{sgn}(s-1)|s-1|^{\kappa} - \operatorname{sgn}(s)|s|^{\kappa}\right]^2 \mathrm{d}s,$$

$$\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{H}}\, Q(\kappa)^{-\frac{1}{H}}\ 2^{\frac{1-\kappa}{H}}\ \delta^{\frac{\kappa}{H}}, \qquad H = \kappa + \frac{1}{2}.$$

Предельное отношение правдоподобия имеет вид

$$Z(w) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{K}\left[\pi_k W_k^{H,+}(\langle\mu_k, w\rangle) - \frac{\pi_k^2}{2}|\langle\mu_k, w\rangle|^{2H}\right]\mathbb{1}_{\left\{w\in\mathbb{B}_k^+\right\}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{K}\left[\pi_k W_k^{H,-}(-\langle\mu_k, w\rangle) - \frac{\pi_k^2}{2}|\langle\mu_k, w\rangle|^{2H}\right]\mathbb{1}_{\left\{w\in\mathbb{B}_k^-\right\}}\right\}, \quad w \in \mathcal{R}^2.$$

Здесь $W_k^{H,+}(s)$, $s \geqslant 0$, $k = 1, \dots, K$ и $W_k^{H,-}(s)$, $s \geqslant 0$, $k = 1, \dots, K$ — независимые фрактальные броуновские процессы с параметром Херста H, т.е. независимые гауссовские процессы со средним $\mathbf{E}W_k^{H,+}(s) = 0$ и ковариацией

$$\mathbf{E}W_k^{H,+}(s_1)\, W_k^{H,+}(s_2) = \frac{1}{2}\left(|s_1|^{2H} + |s_2|^{2H} - |s_1 - s_2|^{2H}\right).$$

Предельные распределения оценок описываются случайными векторами $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$, определенными соотношениями (11).

Имеется нижняя граница на риски оценок

$$\lim_{\delta_*\to 0}\varliminf_{\varepsilon\to 0}\sup_{\|\vartheta-\vartheta_0\|\leqslant\delta_*}\varphi_\varepsilon^{-2}\mathbf{E}_\vartheta\left\|\bar{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta\right\|^2 \geqslant \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\tilde{\zeta}\right\|^p.$$

Асимптотически эффективные оценки определяем как оценки, для которых в этом неравенстве достигается равенство при всех $\vartheta_0 \in \Theta$.

Теорема 9. *В сделанных предположениях ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ равномерно состоятельны, имеют разные предельные распределения*

$$\varphi_\varepsilon^{-1}\left(\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \hat{\zeta}, \quad \varphi_\varepsilon^{-1}\left(\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right) \Longrightarrow \tilde{\zeta},$$

имеет место сходимость моментов: для любого $p > 0$

$$\varphi_\varepsilon^{-p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right\|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\hat{\zeta}\right\|^p, \quad \varphi_\varepsilon^{-p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\tilde{\vartheta}_\varepsilon - \vartheta_0\right\|^p \longrightarrow \mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\tilde{\zeta}\right\|^p$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [13]. Заметим, что в случае независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью, имеющей сингулярность типа касп и параметр сдвига, свойства оценок описаны в [8].

Случай разладки. Рассмотрим ту же задачу оценки положения $\vartheta_0 \in \Theta$ источника сигналов по наблюдениям $X^T = (X_1, \dots, X_K)$ (уравнения (15)) с K детекторов, когда в момент появления сигнала τ_k имеет место скачок в соответствии с функцией

$$\bar{\psi}\left(t-\tau_k\right)=1\!\!1_{\{t\geqslant\tau_k\}}.$$

Сами сигналы $Y_k\left(\cdot\right)$, $k=1,\ldots,K$ удовлетворяют тем же уравнениям (16). Функция правдоподобия может быть записана следующим образом

$$L\left(\vartheta,X^K\right)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{\tau_k(\vartheta)}^{T}\frac{a_k\left(t\right)m_k\left(\tau_k\left(\vartheta\right),t\right)}{\varepsilon^2\sigma_k\left(t\right)^2}\mathrm{d}X_k\left(t\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{\tau_k(\vartheta)}^{T}\frac{a_k\left(t\right)^2m_k\left(\tau_k\left(\vartheta\right),t\right)^2}{2\varepsilon^2\sigma_k\left(t\right)^2}\mathrm{d}t\right\},\quad\vartheta\in\Theta.$$

Оценки ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ определены соотношениями (5) и (6) соответственно.

Предельное отношение правдоподобия запишем в виде

$$Z\left(w\right)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{K}\left[\pi_kW_k^+\left(\langle\mu_k,w\rangle\right)-\frac{\pi_k^2}{2}\left|\langle\mu_k,w\rangle\right|\right]1\!\!1_{\left\{w\in\mathbb{B}_k^+\right\}}\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{K}\left[\pi_kW_k^-\left(-\langle\mu_k,w\rangle\right)-\frac{\pi_k^2}{2}\left|\langle\mu_k,w\rangle\right|\right]1\!\!1_{\left\{w\in\mathbb{B}_k^-\right\}}\right\},\quad w\in\mathcal{R}^2,$$

где обозначено через $W_k^+\left(s\right)$, $s\geqslant0$, $k=1,\ldots,K$ и $W_k^-\left(s\right)$, $s\geqslant0$, $k=1,\ldots,K$ независимые винеровские процессы и $\pi_k\left(\vartheta_0\right)=h_k\left(\tau_k\left(\vartheta_0\right)\right)y_k\left(\tau_k\left(\vartheta_0\right)\right)$, $\pi_k=\pi_k\left(\vartheta_0\right)$. Предельные распределения оценок задаются случайными векторами $\hat{\zeta}$ и $\tilde{\zeta}$, определяемыми соотношениями (11).

Нижняя граница в этой задаче имеет вид

$$\lim_{\nu\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\sup_{\|\vartheta-\vartheta_0\|\leqslant\nu}\varepsilon^{-4}\mathbf{E}_\vartheta\|\vartheta_\varepsilon^*-\vartheta\|^2\geqslant\mathbf{E}_{\vartheta_0}\|\tilde{\zeta}\|^2$$

с соответствующим определением асимптотически эффективных оценок.

Т е о р е м а 10. *В сделанных предположениях ОМП $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ и БО $\tilde{\vartheta}_\varepsilon$ равномерно состоятельны, имеют разные предельные распределения*

$$\varepsilon^{-2}\left(\hat{\vartheta}_\varepsilon-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\hat{\zeta},\quad\varepsilon^{-2}\left(\tilde{\vartheta}_\varepsilon-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\tilde{\zeta},$$

имеет место сходимость моментов: для любого $p>0$

$$\varepsilon^{-2p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\hat{\vartheta}_\varepsilon-\vartheta_0\right\|^p\longrightarrow\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\hat{\zeta}\right\|^p,\quad\varepsilon^{-2p}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\tilde{\vartheta}_\varepsilon-\vartheta_0\right\|^p\longrightarrow\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left\|\tilde{\zeta}\right\|^p$$

и БО асимптотически эффективны.

Доказательство см. в [13].

Заметим, что в [10] предлагается также упрощенная процедура оценивания положения источника. Она осуществляется в два этапа. Сначала каждый детектор оценивает момент τ_k появления сигнала. Затем значения оценок $\bar\tau_\varepsilon = (\bar\tau_{1,\varepsilon}, \ldots, \bar\tau_{K,\varepsilon})$ передаются в центр обработки данных, где на основании $\bar\tau_\varepsilon$ положение находится как решение линейного уравнения. Полученные оценки не являются асимптотически эффективными, но предпочтительнее с точки зрения вычислений.

6. Диффузионные процессы, эргодический случай

Рассмотрим однородную частично наблюдаемую линейную систему уравнений

$$\mathrm{d}X_t = c\,(\vartheta)\; Y_t\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t, \quad X_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{17}$$

$$\mathrm{d}Y_t = -a\,(\vartheta)\; Y_t\,\mathrm{d}t + b\,(\vartheta)\,\mathrm{d}V_t, \quad Y_0, \tag{18}$$

где, как и раньше, X_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ — наблюдаемый процесс и Y_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ — скрытый (hidden) процесс, а W_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ и V_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ независимые винеровские процессы. X_0 и Y_0 — независимые гауссовские случайные величины. Параметр $\sigma > 0$ и функции $c\,(\vartheta)$, $a\,(\vartheta)$, $b\,(\vartheta)$ предполагаются известными.

Уравнения фильтрации Калмана–Бьюси для $m(\vartheta,t) = \mathbf{E}_\vartheta(Y_t|X_s, 0 \leqslant s \leqslant t)$ и $\gamma\,(\vartheta,t) = \mathbf{E}_\vartheta\left(\left(Y_t - m\,(\vartheta,t)\right)^2 |X_s, 0 \leqslant s \leqslant t\right)$ имеют вид

$$\mathrm{d}m\,(\vartheta,t) = -a\,(\vartheta)\,m\,(\vartheta,t) + \frac{c\,(\vartheta)\,\gamma\,(\vartheta,t)}{\sigma^2}\left[\mathrm{d}X_t - c\,(\vartheta)\,m\,(\vartheta,t)\,\mathrm{d}t\right], \tag{19}$$

$$\frac{\partial\gamma\,(\vartheta,t)}{\partial t} = -2a\,(\vartheta)\,\gamma\,(\vartheta,t) - \frac{c\,(\vartheta)^2\,\gamma\,(\vartheta,t)^2}{\sigma^2} + b\,(\vartheta)^2 \tag{20}$$

с начальными условиями $m_0 = \mathbf{E}Y_0$ и $\gamma\,(\vartheta,0) = \mathbf{E}\,(Y_0 - \mathbf{E}Y_0)^2$ соответственно. Функцию правдоподобия в этой модели наблюдений запишем в виде

$$L\left(\vartheta, X^T\right) = \exp\left\{\int_0^T \frac{c\,(\vartheta)\,m\,(\vartheta,t)}{\sigma^2}\mathrm{d}X_t - \int_0^T \frac{c\,(\vartheta)^2\,m\,(\vartheta,t)^2}{2\sigma^2}\mathrm{d}t\right\}, \quad \vartheta \in \Theta. \tag{21}$$

Параметр $\vartheta \in \Theta = (\alpha,\beta)$ предполагается неизвестным. Рассматриваем задачу оценки ϑ и описываем свойства оценок при $T \to \infty$. ОМП $\hat\vartheta_T$ и БО $\tilde\vartheta_T$ определены соотношениями (5), (6).

Для функций выполняется: $c\,(\vartheta) \neq 0$, $a\,(\vartheta) > 0$ и $b\,(\vartheta) \neq 0$ при всех $\vartheta \in \Theta$. Они также непрерывно дифференцируемы. Случайный процесс $m\,(\vartheta,t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ является эргодическим. Введем обозначения: информация Фишера (см. [16])

$$\mathbb{I}\,(\vartheta) = \frac{\dot a\,(\vartheta)^2}{2a\,(\vartheta)} - \frac{2\dot a\,(\vartheta)\,\dot r\,(\vartheta)}{a\,(\vartheta) + r\,(\vartheta)} + \frac{\dot r\,(\vartheta)^2}{2r\,(\vartheta)}, \quad r\,(\vartheta) = \sqrt{a\,(\vartheta)^2 + \frac{b\,(\vartheta)^2\,c\,(\vartheta)^2}{\sigma^2}}$$

и условия: при всех $\nu > 0$

$$\inf_{|\vartheta-\vartheta_0|>\nu}\left(|a(\vartheta)-a(\vartheta_0)|+|r(\vartheta)-r(\vartheta_0)|\right)>0,\quad \inf_{\vartheta\in\Theta}\left(|\dot a(\vartheta)|+|\dot r(\vartheta)|\right)>0.$$

Асимптотически эффективные оценки определяются с помощью нижней границы Гаека-Ле Кама

$$\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{T\to\infty}\sup_{|\vartheta-\vartheta_0|\leqslant\delta} T\mathbf{E}_\vartheta|\bar\vartheta_T-\vartheta|^2\geqslant \mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}.$$

Теорема 11. *В сделанных условиях ОМП $\hat\vartheta_T$ и БО $\tilde\vartheta_T$ равномерно состоятельны, асимптотически нормальны*

$$\sqrt{T}\left(\hat\vartheta_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\zeta\sim\mathcal{N}\left(0,\mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right),\quad \sqrt{T}\left(\hat\vartheta_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\zeta,$$

моменты сходятся: при всех $p>0$

$$T^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\hat\vartheta_T-\vartheta_0\right|^p\to\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\zeta|^p,\quad T^{\frac{p}{2}}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\tilde\vartheta_T-\vartheta_0\right|^p\to\mathbf{E}_{\vartheta_0}|\zeta|^p$$

и обе оценки асмимптотически эффективны.

Доказательство см. в [16, 17]. Схожий результат получен в [18].

Оценки минимальных расстояний. При оценивании параметров частичнонаблюдаемых линейных систем могут быть использованы и другие методы оценивания. Например, оценки минимальных расстояний (ОМР) неизвестных параметров для модели (17), (18) можно построить следующим образом. Рассмотрим интеграл

$$D_T(\vartheta)=\int\limits_0^T\left[X_t-c(\vartheta)\int\limits_0^t m(\vartheta,s)\,\mathrm{d}s\right]^2\mathrm{d}s$$

и определим ОМР $\check\vartheta_T$ как решение уравнения

$$D_T\left(\check\vartheta_T\right)=\inf_{\vartheta\in\Theta}D_T(\vartheta).$$

Может быть показано, что при определенных условиях эта оценка состоятельна и асимптотически нормальна

$$\sqrt{T}\left(\check\vartheta_T-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\xi\sim\mathcal{N}\left(0,Q(\vartheta_0)\right).$$

Доказательство см. в [19].

Одношаговые оценки-процессы максимального правдоподобия. Как и в случае малого шума, вычисление ОМП и БО по формулам (5), (6) требует знания решений уравнений (19), (20) при всех $\vartheta\in\Theta$, где $L\left(\vartheta,X^T\right)$ вычисляется согласно (21). Понятно, что численная реализация таких процедур оценивания и в этом случае является экстремально трудной. Поэтому предлагаем двухшаговую процедуру оценивания. Сначала с помощью метода моментов по пренебрежимо малой части начальных наблюдений строится предварительная оценка неизвестного параметра, а затем с помощью этой оценки и лекамовской одношаговой процедуры получается оценка, которая асимптотически эквивалентна ОМП. Таким образом, предложенная оценка является также асимптотически эффективной.

Запишем исходную модель наблюдений в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= fY_t\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t, \quad X_0 = 0, \\ \mathrm{d}Y_t &= -aY_t\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}V_t, \quad Y_0 = \xi. \end{aligned}$$

Система полностью определяется параметрами $f \neq 0, \sigma^2 \neq 0, a > 0, b \neq 0$. Напомним, что параметр σ^2 оценивается без ошибки. Рассмотрим задачи оценивания остальных трех параметров. Заметим, что имеет место представление

$$X_t = fb\int\limits_0^t\int\limits_0^s e^{-a(s-r)}\mathrm{d}V_r\,\mathrm{d}s + \sigma W_t + o\left(1\right).$$

Следовательно, оценить состоятельно одновременно f и b невозможно. Рассмотрим задачи оценки одномерных параметров $\vartheta = f$, $\vartheta = a$ и $\vartheta = b$, а оценки двумерных параметров $\vartheta = (f, a)$ и $\vartheta = (a, b)$ обсудим после.

Предположим, что неизвестный параметр $\vartheta = a$. Тогда уравнения фильтрации имеют вид

$$\mathrm{d}m\left(\vartheta,t\right) = -\left[\vartheta + \frac{\gamma\left(\vartheta,t\right)f^2}{\sigma^2}\right]m\left(\vartheta,t\right)\mathrm{d}t + \frac{\gamma\left(\vartheta,t\right)f}{\sigma^2}\mathrm{d}X_t,$$

$$\frac{\partial\gamma\left(\vartheta,t\right)}{\partial t} = -2\vartheta\,\gamma\left(\vartheta,t\right) - \frac{\gamma\left(\vartheta,t\right)^2 f^2}{\sigma^2} + b^2, \quad \gamma\left(\vartheta,0\right) = d^2.$$

Предварительную оценку строим следующим образом. Введем статистику

$$\mathbb{S}_Q = \frac{1}{Q}\sum_{k=1}^{Q}\left[X_k - X_{k-1}\right]^2 \longrightarrow \Phi\left(\vartheta\right) = \frac{f^2b^2}{\vartheta^3}\left[e^{-\vartheta} - 1 + \vartheta\right] + \sigma^2,$$

где $Q = \left[T^\delta\right]$, $\delta \in (1/2, 1)$ и $[A]$ — целая часть A. Предел соответствует $T \to \infty$. Сразу заметим, что в случаях $\vartheta = b$ и $\vartheta = f$ пределы этой статистики равны

$$\Phi_*\left(\vartheta\right) = \frac{f^2\vartheta^2}{a^3}\left[e^{-a} - 1 + a\right] + \sigma^2, \quad \hat{\Phi}\left(\vartheta\right) = \frac{\vartheta^2b^2}{a^3}\left[e^{-a} - 1 + a\right] + \sigma^2$$

соответственно.

Функция $\Phi\left(\vartheta\right)$, $\alpha < \vartheta < \beta$ строго убывающая. Определим предварительную оценку соотношением

$$\bar{\vartheta}_Q = \vartheta_Q^*\mathbb{1}_{\left\{\mathcal{A}_Q\right\}} + \alpha\mathbb{1}_{\left\{\mathcal{A}_Q^-\right\}} + \beta\mathbb{1}_{\left\{\mathcal{A}_Q^+\right\}}.$$

Здесь ϑ_Q^* является решением уравнения $\Phi\left(\vartheta_Q^*\right)=\mathbb{S}_Q$ и множества $\mathcal{A}_Q$, $\mathcal{A}_Q^-$, $\mathcal{A}_Q^+$ определены равенствами

$$\mathcal{A}_Q=\{\omega:\Phi(\beta)<\mathbb{S}_Q<\Phi(\alpha)\},\quad \mathcal{A}_Q^-=\{\omega:\mathbb{S}_Q\geqslant\Phi(\alpha)\},\quad \mathcal{A}_Q^+=\{\omega:\mathbb{S}_Q\leqslant\Phi(\beta)\}.$$

Предложение 1. Оценка $\bar\vartheta_Q$ равномерно состоятельна и существует константа $C>0$ такая, что

$$\sup_{\vartheta_0\in\Theta}\mathbf{E}_{\vartheta_0}\left|\bar\vartheta_Q-\vartheta_0\right|^2\leqslant\frac{C}{Q}.$$

с некоторой константой $C>0$.

Доказательство см. в [20].

Введем еще уравнение для производной $\dot m\left(\vartheta,t\right)=\partial m\left(\vartheta,t\right)/\partial\vartheta$

$$\mathrm{d}\dot m(\vartheta,t)=-\left[\vartheta+\frac{\gamma\left(\vartheta\right)f^2}{\sigma^2}\right]\dot m(\vartheta,t)\mathrm{d}t+\frac{\dot\gamma(\vartheta)f}{\sigma^2}\mathrm{d}X_t-\left[1+\frac{\dot\gamma(\vartheta)f^2}{\sigma^2}\right]m(\vartheta,t)\mathrm{d}t,$$

где $\gamma\left(\vartheta\right)$ и $\dot\gamma\left(\vartheta\right)$ — стационарное решение уравнения Рикатти и его производная равна

$$\gamma\left(\vartheta\right)=\frac{\vartheta\sigma^2}{f^2}\left(\sqrt{1+\frac{b^2f^2}{\vartheta^2\sigma^2}}-1\right),\quad \dot\gamma\left(\vartheta\right)=\frac{\partial\gamma\left(\vartheta\right)}{\partial\vartheta}.$$

Информация Фишера:

$$\mathbb{I}\left(\vartheta\right)=\frac{1}{2\vartheta}-\frac{2\dot r\left(\vartheta\right)}{r\left(\vartheta\right)+\vartheta}+\frac{\dot r\left(\vartheta\right)^2}{2r\left(\vartheta\right)}.$$

Одношаговую оценку-процесс максимального правдоподобия $\vartheta_t^\star$, $T^\delta<t\leqslant$ $\leqslant T$ определим равенством

$$\vartheta_t^\star=\bar\vartheta_Q+\frac{f}{\sigma^2t\mathbb{I}\left(\bar\vartheta_Q\right)}\int\limits_Q^t\dot m(\bar\vartheta_Q,s)\left[\mathrm{d}X_s-fm(\bar\vartheta_Q,s)\mathrm{d}s\right].$$

Заменим переменные $t=\tau T$ и обозначим $\vartheta_{\tau T}^\star=\vartheta_T^\star\left(\tau\right)$, $T^{\delta-1}<\tau\leqslant1$.

Теорема 12. Одношаговая оценка-процесс максимального правдоподобия $\vartheta_T^\star\left(\tau\right)$, $T^{\delta-1}<\tau\leqslant1$ с $\delta\in(1/2,1)$ состоятельна и асимптотически нормальна: для любого $\tau\in(0,1]$

$$\sqrt{\tau T}\left(\vartheta_T^\star\left(\tau\right)-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)^{-1}\right).$$

Доказательство см. в [20].

Заметим, что эта оценка-процесс может быть записана в рекуррентной форме

$$\mathrm{d}\vartheta_t^\star = -\frac{\vartheta_t^\star}{t - T^\delta}\mathrm{d}t + \frac{f\dot{m}(\bar{\vartheta}_{T^\delta}, t)}{\sigma^2 t\mathbb{I}(\bar{\vartheta}_{T^\delta})}\left[\mathrm{d}X_t - fm(\bar{\vartheta}_{T^\delta}, t)\mathrm{d}t\right]. \tag{22}$$

Вместе с уравнениями

$$\mathrm{d}m_t = -\left[\vartheta_t^\star + \frac{\gamma\left(\vartheta_t^\star\right) f^2}{\sigma^2}\right] m_t\mathrm{d}t + \frac{\gamma\left(\vartheta_t^\star\right) f}{\sigma^2}\mathrm{d}X_t, \quad T^\delta < t \leqslant T, \tag{23}$$

$$\gamma\left(\vartheta_t^\star\right) = \frac{\vartheta_t^\star\sigma^2}{f^2}\left(\sqrt{1 + \frac{b^2 f^2}{\left(\vartheta_t^\star\right)^2\sigma^2}} - 1\right) \tag{24}$$

получаем замкнутую систему (22)–(24) адаптированной фильтрации.

Введем случайный процесс

$$\zeta_T\left(\tau\right) = \sqrt{T\mathrm{I}\left(\vartheta_0\right)}\left(\vartheta_T^\star\left(\tau\right) - \vartheta_0\right), \quad \kappa \leqslant \tau \leqslant 1,$$

где $\kappa \in (0,1)$. Случайный процесс $\zeta_T(\cdot)$ сходится по распределению в пространстве $(\mathcal{C}\left[\kappa,1\right], \mathscr{B})$ к гауссовскому случайному процессу

$$\zeta_T\left(\cdot\right) \Longrightarrow \zeta\left(\cdot\right),$$

где гауссовский процесс $\zeta\left(\tau\right), \left[\kappa, 1\right]$ имеет моменты

$$\mathbf{E}_{\vartheta_0}\zeta\left(\tau\right) = 0, \qquad \mathbf{E}_{\vartheta_0}\zeta\left(\tau_1\right)\zeta\left(\tau_2\right) = \tau_1 \wedge \tau_2,$$

т.е. $\zeta\left(\cdot\right)$ — винеровский процесс на интервале $[\kappa, 1]$.

Рассмотрим случаи $\vartheta = (a,b)$ и $\vartheta = (f,a)$ и две статистики

$$\mathbb{S}_Q = \frac{1}{Q}\sum_{k=1}^{Q}\left[X_k - X_{k-1}\right]^2, \quad \mathbb{R}_Q = \frac{1}{Q}\sum_{k=1}^{Q}\left[X_k - X_{k-1}\right]\left[X_{k-1} - X_{k-2}\right].$$

Их пределы при $Q \to \infty$ равны

$$\mathbb{S}_Q \to \Phi\left(\vartheta\right) = \frac{f^2 b^2}{a^3}\left[e^{-a} - 1 + a\right], \quad \mathbb{R}_Q \to \Xi\left(\vartheta\right) = \frac{f^2 b^2}{2a^3}\left[e^{-a} - 1\right]^2.$$

Следовательно,

$$\mathbb{Q}_Q = \frac{\mathbb{S}_Q}{\mathbb{R}_Q} \longrightarrow \frac{2\left[e^{-a} - 1 + a\right]}{\left[e^{-a} - 1\right]^2}.$$

Функция

$$\phi\left(x\right) = \frac{2\left[e^{-x} - 1 + x\right]}{\left[e^{-x} - 1\right]^2}, \quad x > 0$$

строго монотонная, $\lim_{x\to 0}\phi(x)=1$, $\lim_{x\to\infty}\phi(x)=\infty$. Это позволяет оценить параметр a как решение уравнения

$$\mathbb{Q}_Q=\phi\left(a_Q^*\right).$$

И второй параметр f или b может быть оценен как решения уравнений

$$\mathbb{S}_Q=\Phi\left(a_Q^*,f_Q^*\right),\quad \mathbb{S}_Q=\Phi\left(a_Q^*,b_Q^*\right)$$

соответственно.

Одношаговая оценка-процесс, скажем, в случае $\bar\vartheta_{T^\delta}=\left(a_{T^\delta}^*,b_{T^\delta}^*\right)$ и соответствующей матрице Фишера $\mathbb{I}(\vartheta)$ имеет вид

$$\vartheta_t^\star=\bar\vartheta_{T^\delta}+\mathbb{I}\left(\bar\vartheta_{T^\delta}\right)^{-1}\int\limits_{T^\delta}^{t}\frac{f\,\dot m\left(\bar\vartheta_{T^\delta},s\right)}{t\,\sigma^2}\left[\mathrm{d}X_s-fm\left(\bar\vartheta_{T^\delta},s\right)\mathrm{d}s\right],\quad T^\delta<t\leqslant T.$$

Эта оценка также состоятельна, асимптотически нормальна и асимптотически эффективна. Доказательство см. в [20].

Телеграфный процесс. Рассмотрим частично наблюдаемую модель (1)

$$\mathrm{d}X_t=Y_t\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}W_t,\quad X_0=0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где Y_t, $0\leqslant t\leqslant T$ — скрытый (hidden) марковский процесс с двумя состояниями y_1 и y_2 и с инфинитеземальной матрицей переходов (3).

Предполагается, что $\lambda>0$ и $\mu>0$ неизвестны и необходимо оценить двухмерный параметр $\vartheta=(\lambda,\mu)^\top\in\Theta$, где $\Theta=(c_0,c_1)\times(c_0,c_1)$, $c_0>0$. Напомним, что в случае $\lambda=\mu$ асимптотические свойства ОМП параметра $\vartheta=\lambda$ описаны в [21]. В частности, доказана состоятельность и асимптотическая нормальность ОМП.

Функция отношения правдоподобия имеет вид

$$L\left(\vartheta,X^T\right)=\exp\left\{\int\limits_0^T m(\vartheta,t)\,\mathrm{d}X_t-\frac{1}{2}\int\limits_0^T m(\vartheta,t)^2\,\mathrm{d}t\right\},\quad \vartheta\in\Theta. \tag{25}$$

Здесь $m(\vartheta,t)$ — также условное ожидание

$$m(\vartheta,t)=\mathbf{E}_\vartheta\left(Y_t|X_s,0\leqslant s\leqslant t\right)=y_2+(y_1-y_2)\,\pi(t,\vartheta),$$

где $\pi(t,\vartheta)=\mathbf{P}_\vartheta\left(Y_t=y_1|X_s,0\leqslant s\leqslant t\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\pi(t,\vartheta)=&\left[\mu-(\lambda+\mu)\,\pi(t,\vartheta)+\right.\\&\left.+\pi(t,\vartheta)\left(1-\pi(t,\vartheta)\right)(y_2-y_1)\left(y_2+(y_1-y_2)\,\pi(t,\vartheta)\right)\right]\mathrm{d}t+\\&+\pi(t,\vartheta)\left(1-\pi(t,\vartheta)\right)(y_1-y_2)\,\mathrm{d}X_t.\end{aligned} \tag{26}$$

ОМП $\hat\vartheta$ и БО $\tilde\vartheta$ параметра $\vartheta=(\lambda,\mu)^\top$ определяются теми же уравнениями (5) и (6) соответственно.

Опишем ниже процедуру построения одношаговой оценки-процесса максимального правдоподобия для этой модели наблюдений. Построение близко к (9), т.е. сначала по пренебрежимой части наблюдений $X^{T^\delta}=(X_t, 0\leqslant t\leqslant T^\delta)$, $\delta<1$ строится предварительная оценка параметра $\bar\vartheta_{T^\delta}$, а затем эта оценка используется для построения $\vartheta^\star_t, T^\delta < t \leqslant T$.

Введем обозначения $Q=\left[T^\delta\right]$, где $[a]$ — целая часть a,

$$\Phi\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\left(1-e^{-x}\right),\quad \zeta_Q=\frac{1}{Q}\sum_{i=0}^{Q-1}\left[X_{i+1}-X_i\right]^2-1,$$

$$\eta_Q=\left(\frac{X_Q}{Q}-y_1\right)\left(y_2-\frac{X_Q}{Q}\right).$$

Случайную величину α_Q определим как решение уравнения

$$\zeta_Q=\left(\frac{X_Q}{Q}\right)^2+2\eta_Q\,\Phi\left(\alpha_Q\right) \tag{27}$$

и положим

$$\beta_Q=\alpha_Q\,1\!\!1_{\left\{\mathcal{A}_Q\right\}}+\left(c_0+c_1\right)\,1\!\!1_{\left\{\mathcal{A}_Q^c\right\}}.$$

Здесь $\mathcal{A}_Q$ — случайное событие, заключающееся в том, что уравнение (27) имеет решение.

Оценка метода моментов параметра $\hat\vartheta_Q=\left(\hat\lambda_Q,\hat\mu_Q\right)$:

$$\hat\lambda_Q=\frac{\frac{X_Q}{Q}-y_1}{y_2-y_1}\beta_Q;\quad \hat\mu_Q=\frac{y_2-\frac{X_Q}{Q}}{y_2-y_1}\beta_Q.$$

П р е д л о ж е н и е 2. Существует константа $C>0$ такая, что

$$\mathbf{E}_\vartheta\left[\sqrt{Q}\left(\hat\lambda_Q-\lambda\right)\right]^2<C,\quad \mathbf{E}_\vartheta\left[\sqrt{Q}\left(\hat\mu_Q-\mu\right)\right]^2<C.$$

Доказательство см. в [22].

Введем условие

$$\frac{2c_0}{\left(y_1-y_2\right)^2}>6{,}5 \tag{28}$$

и одношаговую оценку-процесс максимального правдоподобия

$$\vartheta^\star_{t,T}=\hat\vartheta_{T^\delta}+t^{-1}\mathbb{I}_t(\hat\vartheta_{T^\delta})^{-1}\int\limits_{T^\delta}^{t}\dot m(\hat\vartheta_{T^\delta},s)\,\left[\mathrm{d}X_s-m(\hat\vartheta_{T^\delta},s)\mathrm{d}s\right],\quad T^\delta<t\leqslant T.$$

Здесь $\dot m(\vartheta,s)$ — вектор производных

$$\dot m(\vartheta,s)=(y_1-y_2)\,\frac{\partial\pi\left(s,\vartheta\right)}{\partial\vartheta}=(y_1-y_2)\left(\frac{\partial\pi\left(t,\vartheta\right)}{\partial\lambda},\frac{\partial\pi\left(t,\vartheta\right)}{\partial\mu}\right)^\top,$$

и эмпирическая матрица информации равна

$$\mathbb{I}_t(\vartheta) = \frac{1}{t}\int\limits_{T^\delta}^{t} \dot m(\vartheta,s)\dot m(\vartheta,s)^\top \mathrm{d}s \longrightarrow \mathbb{I}(\vartheta),$$

где

$$\mathbb{I}(\vartheta) = (y_1-y_2)^2\,\mathbf{E}_\vartheta \frac{\partial\pi\,(s,\vartheta)}{\partial\vartheta}\frac{\partial\pi\,(s,\vartheta)}{\partial\vartheta}^\top.$$

Сделаем замену переменных $\tau = tT^{-1}\in[0,1]$, положим $\tau_\delta = QT^{-1}$ и введем случайный процесс $\vartheta^\star_T(\tau)$, $\tau_\delta\leqslant\tau\leqslant 1$.

Теорема 13. *Предположим, что условие* (28) *выполнено и* $\delta\in(\frac12,1)$. *Тогда оценка-процесс* $\vartheta^\star_T(\tau)$, $0<\tau\leqslant 1$ *состоятельна: для любого* $\nu>0$ *и любого* $\tau\in(0,1]$

$$\mathbf{P}_{\vartheta_0}\left\{|\vartheta^\star_T(\tau)-\vartheta_0|>\nu\right\}\to 0$$

и эта оценка асимптотически нормальная

$$\sqrt{\tau T}\left(\vartheta^\star_T(\tau)-\vartheta_0\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(0,\mathbb{I}(\vartheta_0)^{-1}\right).$$

Доказательство см. в [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bickel P.J., Ritov Y., Rydén T.* Asymptotic normality of the maximum likelihood estimator for general hidden Markov models // Ann. Statist., 1998. V. 26. No. 4. P. 1614–1635.
2. *Cappé O., Moulines E., Rydén T.* Inference in Hidden Markov Models. N.Y.: Springer, 2005.
3. *Elliott R.J., Aggoun L., Moor J.B.* Hidden Markov Models. N.Y.: Springer, 1995.
4. *Liptser R.S. Shiryaev A.N.* Statistics of Random Processes. 2-nd ed. V. 1. N.Y.: Springer, 2001.
5. *Fisher R.A.* Theory of statistical estimation // Proc. Cambridge Phylosoph. Soc. 1925. V. 22. P. 700–725.
6. *Le Cam L.* On the asymptotic theory of estimation and testing hypotheses // Proc. 3rd Berkeley Sympos. 1956. V. I. P. 355–368.
7. *Kutoyants Yu.A.* Identification of Dynamical Systems with Small Noise. Dordrecht: Kluwer, 1994.
8. *Ibragimov I.A., Khasminskii R.Z.* Statistical Estimation — Asymptotic Theory. N.Y.: Springer, 1981.
9. *Kutoyants Yu.A., Zhou, L.* On parameter estimation of the hidden Gaussian process in perturbed SDE // Submitted. 2019 (arXiv:1904.09750).
10. *Kutoyants Yu.A.* On parameter estimation of hidden Ornstein-Uhlenbeck process // J. Multivariate Anal. 2019. V. 169. No. 1. P. 248–263.
11. *Liptser R.S.* On filtration and prediction of components in diffusion Markov processes // Theory Probab. Appl. 1967. V. 12. No. 4. P. 697–698.

12. *Campillo F., Le Gland F., Kutoyants Yu.A.* Small noise asymptotics of the GLR Test for off-line change detection in misspecified diffusion processes // Stochast. Stochast. Report. 2000. V. 70. P. 109–129.
13. *Kutoyants, Yu.A.* On localization of source by hidden Gaussian processes with small noise // Submitted. 2019.
14. *Gustaffson F.* Adaptive Filtering and Change Detection. N.Y.: J. Wiley & Sons, 2000.
15. *Luo X.* GPS Stochastic Modeling. N.Y.: Springer, 2013.
16. *Kutoyants Yu.A.* Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. London: Springer, 2004.
17. *Kutoyants Yu.A.* Parameter Estimation for Stochastic Processes. Berlin: Heldermann, 1984.
18. *Kallianpur G., Selukar R.S.* Parameter estimation in linear filtering // J. Multivariate Analysiis. 1991. V. 39. P. 284–304.
19. *Bertrand P., Kutoyants Yu.A.* A minimum distance estimator for partially observed linear stochastic systems // Statist. Decisions. 1996. V. 14. P. 323–342.
20. *Kutoyants Yu.A.* On parameter estimation of hidden ergodic Ornstein-Uhlenbeck process // Electronic. J. Statist. 2019. No. 13. P. 4508–4526.
21. *Chigansky P.* Maximum likelihood estimation for hidden Markov models in continuous time // Statist. Inference Stoch. Proc. 2009. V. 12. No. 2. P. 139–163.
22. *Khasminskii R.Z., Kutoyants Yu.A.* On parameter estimation of hidden telegraph process // Bernoulli. 2018. V. 24. No. 3. P. 2064–2090.
23. *Kutoyants Yu. A., Pohlmann H.* Parameter estimation for Kalman-Bucy filter with small noise // Statist. 1994. No. 25. P. 307–323.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 02.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019