

© 2020 г. А.Б. МИЛЛЕР, канд. техн. наук (amiller@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Казанский федеральный университет),
Б.М. МИЛЛЕР, д-р физ.-мат. наук (bmiller@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Университет Монаш, Виктория, Австралия;
Казанский федеральный университет),
К.В. СТЕПАНЯН, канд. физ.-мат. наук (KVStepanyan@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва)

ОДНОВРЕМЕННОЕ ИМПУЛЬСНОЕ И НЕПРЕРЫВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАРКОВСКОЙ ЦЕПЬЮ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ¹

Рассматривается непрерывное и импульсное управление марковской цепью (МЦ) с конечным множеством состояний в непрерывном времени. Непрерывное управление определяет интенсивность переходов между состояниями МЦ, при этом времена переходов и их направления случайны. Тем не менее иногда требуется обеспечить переход, который ведет к мгновенному изменению состояния МЦ. Поскольку такие переходы требуют различных воздействий и могут производить различное действие на состояние МЦ, такие управления можно трактовать как импульсные. В статье используется мартингалное представление управляемой МЦ и дается условие оптимальности, которое с использованием принципа динамического программирования приводится к форме квазивариационного неравенства. Решение этого неравенства может быть получено в форме уравнения динамического программирования, которое для МЦ с конечным множеством состояний сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с одной линией переключения. Дано доказательство достаточного условия оптимальности и рассмотрены примеры задач с детерминированным и случайным импульсным воздействием.

Ключевые слова: марковская цепь, импульсные управления, квазивариационное неравенство.

DOI: 10.31857/S0005231020030071

1. Введение

Импульсное управление как воздействие, производящее мгновенные (в действительности очень быстрые) изменения состояния динамической системы, детально исследуется с 70-х гг. XX в. В серии пионерских работ А. Бенсусан и Ж.-Л. Лионс развили теорию стохастического импульсного управления, в которой обобщили принцип динамического программирования

¹ Работа выполнена А.Б. Миллером и Б.М. Миллером частично за счет средств субсидии, выделенной в рамках Государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

и сформулировали условия оптимальности в форме так называемого квазивариационного неравенства [1]. Их идеи привели к возникновению нового класса дискретно-непрерывных стохастических систем, которые функционируют непрерывно (детерминированно или стохастически) между скачками, которые происходят в моменты применения импульсных воздействий. В стохастическом анализе эти идеи были подхвачены многими исследователями, развившими теорию кусочно-детерминированных марковских моделей (КДММ), поведение которых между случайными моментами скачков, возможно и управляемых, подчиняется непрерывной динамике (см., например, [2–4]). Дальнейшие исследования в области импульсного управления привели к появлению нового класса управляемых динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с мерой, которые универсальным способом описывают как импульсные, так и непрерывные воздействия. В этом классе систем были получены условия существования оптимальных обобщенных решений и обобщенных управлений-мер и одновременно непрерывных управлений [5, 6] и получены условия оптимальности в форме обобщенного принципа максимума [7, 8]. В последние годы заметно вырос интерес к управлению марковскими цепями (МЦ) и, в частности, к КДММ поскольку эти модели более приспособлены к решению задач оптимизации и значительно более просты для моделирования [9–11]. Более того, возникло целое направление, а именно: марковские процессы принятия решений (Markov Decision Processes (MDP)), которое весьма востребовано во многих прикладных областях. Здесь можно привести в качестве примеров: управление системами водохранилищ [12, 13], где импульсные воздействия проявляются в виде контролируемого сброса воды, например для избежания переполнений; при контроле добычи и использования природных ресурсов [14, 15]; при управлении Интернетом для избежания перегрузок [16, 17]; в непрерывном управлении распределением водных ресурсов с помощью контроля цен потребляемой воды в различных секторах экономики [18, 19]; при распределении потоков газа в системе газоснабжения при необходимости сглаживания сезонных пульсаций потребления [20]. Во всех этих областях импульсные воздействия, так же как и непрерывные, возникают весьма естественно как управления, приводящие к быстрым контролируемым изменениям состояния; в управлении передачей данных — это освобождение памяти при угрозе переполнения [21]; в управлении системой водохранилищ — это контролируемый слив излишков воды [19, 22].

Другой причиной растущего интереса к MDP является относительная простота и гибкость моделирования непрерывных и дискретных стохастических динамических систем с помощью МЦ с конечным множеством состояний [23], и поскольку точность аппроксимации напрямую зависит от числа состояний, то постоянно возрастающие возможности доступных компьютеров позволяют достичь необходимой точности решения задач оптимального управления без существенных проблем. Кроме того, теория оптимального управления МЦ как в дискретном, так и в непрерывном времени достаточно развита как для обычных задач [24], так и для задач с ограничениями на состояние [25–27], поэтому соответствующие численные процедуры могут быть легко реализованы. Здесь стоит отметить, что для стохастических систем с непрерывным множеством состояний оптимизация импульсного управления ведет к специаль-

ному типу условия оптимальности, а именно: квазивариационному неравенству [1], которое играет роль уравнения динамического программирования. Это неравенство, даже если существование его решения установлено, весьма трудно разрешимо даже численно, поскольку требует гладкого сопряжения решений пары уравнений в частных производных на заранее неизвестной поверхности. Более того, оптимальное управление есть случайная мера, локализованная на этой поверхности, функция распределения которой сингулярна по отношению к мере Лебега, поэтому определить характеристики такого управления можно лишь с помощью моделирования. Однако в случае МЦ с конечным множеством состояний эта проблема отсутствует. Для них импульсное управление есть совокупность разделенных во времени пар времен и интенсивностей приложения импульсных воздействий, а проблема решения соответствующего квазивариационного неравенства сводится в решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной поверхностью переключения.

Материал статьи имеет следующую структуру: в разделе 2 дано описание модели МЦ с непрерывным и импульсным управлениями, в разделе 3 дан вывод условий оптимальности в форме квазивариационного неравенства и приведен метод его решения. В разделе 3.3 дано доказательство достаточности условия оптимальности. В разделе 4 рассматривается численный пример. Выводы и направления дальнейших исследований приведены в разделе 5.

2. Описание модели и постановка задачи

Используется мартингалное представление управляемой МЦ, следуя описанию, данному в [16, 24, гл. 12] для непрерывного управления, дополненное членами, описывающими импульсные воздействия. Все процессы рассматриваются на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$.

Определение 1. Процесс $\{X_t, t \in [0, T]\}$ — есть управляемый марковский процесс с кусочно-постоянными непрерывными справа траекториями. Пространство состояний этого процесса есть конечное множество единичных векторов \mathbf{S} вида $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, т.е. e_i состоит из нулевых элементов кроме i -го, который равен единице, символ “Т” здесь и далее соответствует транспонированию векторов и матриц. Таким образом, $X_t \in \mathbf{S}$.

2.1. Непрерывное управление МЦ

Предположение 1. Матричная функция $A(t, u)$ с элементами $a_{ij}(t, u)$ есть семейство генераторов МЦ, зависящих от времени $t \in [0, T]$, таких что вектор вероятностей состояния $p_t = (p_t^1, \dots, p_t^n)^T$, где $p_t^i = P(X_t = e_i)$ удовлетворяет прямым уравнениям Колмогорова

$$(2.1) \quad \frac{dp_t}{dt} = A(t, u)p_t.$$

Здесь управление $u \in U$, где U — некоторое компактное подмножество полного метрического пространства и $A(t, u)$ непрерывна на $[0, T] \times U$.

Введем непрерывное справа семейство полных σ -алгебр, порождаемых процессом X_t

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \in [0, t]\}.$$

Предположение 2. Множество \underline{U} допустимых управлений $\{u(\cdot)\}$ есть множество \mathcal{F}_t^X -предсказуемых процессов со значениями в U . Это означает, что если N_t — это количество изменений состояния процесса X , а X_0^t — последовательность состояний начиная с момента времени $t = 0$, до текущего времени $t \in [0, T]$, т.е.

$$X_0^t = \{(X_0, 0), (X_{\tau_1}, \tau_1), \dots, (X_{\tau_{N_t}}, \tau_{N_t})\}$$

— есть совокупность состояний и времен скачков, тогда для $\tau_{N_t} < t \leq \tau_{N_t+1}$ управление $u_t = u(t, X_0^t)$ есть функция от X_0^t и текущего времени t [24, 28].

Для каждого управления $u(\cdot) \in \underline{U}$ процесс $\{X_t\}$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$(2.2) \quad X_t = X_0 + \int_0^t A(s, u_s) X_s ds + W_t,$$

где X_0 — начальное условие, а $W_t := \{W_t^1, \dots, W_t^n\}$ — квадратично интегрируемый (\mathcal{F}_t^X, P) мартингал с квадратичной характеристикой [24, 28, 29]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \langle W \rangle_t &= \int_0^t \text{diag} (A(s, u_s) X_s) ds + \\ &+ \int_0^t [A(s, u_s)(\text{diag} X_s) + (\text{diag} X_s)A^T(s, u_s)] ds, \end{aligned}$$

где $\text{diag}(X)$ означает диагональную матрицу с элементами X^1, \dots, X^n .

Замечание 1. Другими словами, процесс $X(t)$ есть решение *мартингальной проблемы* (2.2), (2.3) для управляемой марковской цепи [24].

2.2. Импульсное управление МЦ

Импульсное управление — это множество $\mathcal{I} = \{(V_i, \tau_i), i = 1, 2, \dots, N\}$, где $\tau_i < \tau_{i+1} \leq T$, $V_i \in \mathcal{V}(X)$ и число импульсов не более чем счетно. Применение импульсного управления в момент времени τ_i приводит к мгновенному случайному изменению состояния X , так что

$$(2.4) \quad \Delta X_{\tau_i} = \psi(\tau_i, V_i, X_{\tau_i-}) = \bar{A}(\tau_i, V_i) X_{\tau_i-} + \Delta W_{\tau_i},$$

где

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} [\Delta W_{\tau_i} | \mathcal{F}_{\tau_i-}^X] &= \mathbf{E} [\Delta W_{\tau_i} | X_{\tau_i-}] = 0, \\ \langle \Delta W_{\tau_i} \rangle &= \text{diag}(\bar{A}(\tau_i, V_i) X_{\tau_i-}) - \bar{A}(\tau_i, V_i) \text{diag}(X_{\tau_i-}) \bar{A}^T(\tau_i, V_i). \end{aligned}$$

Здесь и далее $\mathbf{E}[\cdot]$ означает математическое ожидание.

Предположение 3. В (2.4) $\psi(\tau_i, V_i, X_{\tau_i-})$ — случайный оператор, такой что для любых $X_{\tau_i-} \in \mathbf{S}$, $V_i \in \mathcal{V}(X_{\tau_i-})$ и $\tau_i \in [0, T]$

$$(2.6) \quad X_{\tau_i} = \Delta X_{\tau_i-} + X_{\tau_i-} \in \mathbf{S}.$$

Множество $\mathcal{V}(X)$ компактно, функция $\bar{A}(t, V)$ непрерывна по t и $\bar{A}(t, 0) = 0$, и поэтому $\psi(\tau, 0, X) = 0$ для любых $\tau \in [0, T]$ и $X \in \mathbf{S}$.

2.3. Одновременное непрерывное и импульсное управление МЦ

Объединяя уравнения (2.2) и (2.4), получаем уравнение для совместного непрерывного и импульсного управления

$$(2.7) \quad X_t = X_0 + \int_0^t A(s, u(s))X_s ds + \sum_{\tau_i \leq t} \bar{A}(\tau_i, V_i)X_{\tau_i-} + W_t',$$

где W_t' — квадратично интегрируемый мартингал с квадратичной характеристикой

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \langle W_t \rangle &= \sum_{\tau_i \leq t} \langle \Delta W_{\tau_i} \rangle - \int_0^t (\text{diag } X_{s-}) A^T(s, u(s)) ds - \\ &- \int_0^t A(s, u(s)) (\text{diag } X_{s-}) ds + \text{diag} \int_0^t A(s, u(s)) X_{s-} ds. \end{aligned}$$

Цель управления — минимизация критерия качества (2.9)

$$(2.9) \quad \begin{aligned} J_0[u(\cdot), \mathcal{I}] &= \mathbf{E} \left\{ \langle \phi_0, X_T \rangle + \int_0^T \langle g_0(s, u(s)), X_s \rangle ds + \sum_{\tau_i \leq T} \langle \psi_0(\tau_i, V_i), X_{\tau_i-} \rangle \right\} = \\ &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^N \phi_0^k I\{X_T = e_k\} + \int_0^T g_0^k(s, u(s)) I\{X_s = e_k\} ds + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\tau_i \leq T} \sum_{k=1}^N \psi_0^k(\tau_i, V_i) I\{X_{\tau_i-} = e_k\} \right\} \end{aligned}$$

по множеству \mathcal{F}_t^X -предсказуемых управлений $u(t) \in \underline{U}$ и импульсных управлений \mathcal{I} . В соотношении (2.9) $I\{\cdot\}$ означает индикаторную функцию, т.е. $I\{A\} = 1$, если событие A происходит и $I\{A\} = 0$ в противном случае.

Предположение 4. Вектор-функция g_0 непрерывна по t и u . Вектор-функция $\psi_0(t, V)$ непрерывна по t и V и удовлетворяет неравенству $\psi_0^l(t, V) \geq C > 0$ для всех l и допустимых $V \neq 0$. Множества U и \mathcal{V} компактны.

Замечание 2. Компоненты вектора ϕ_0 определяют цену терминального состояния X_T , вектор-функция g_0 — интегральную цену промежуточных состояний, а ψ_0 — цену импульсных управлений.

Замечание 3. В данной статье предполагается наиболее простая формулировка задачи управления и возможны расширения на:

- 1) системы со случайной реакцией на импульсное воздействие;
- 2) задачи с другими типами критериев, например с дисконтированием или усреднением на бесконечном интервале времени [21];
- 3) задачи с ограничениями на состояние по аналогии с [25–27];
- 4) задачи с неполной информацией [24, 30].

3. Уравнение динамического программирования в форме квазивариационного неравенства

3.1. Условие оптимальности одновременного непрерывного и импульсного управления

Функция цены в задаче (2.7)–(2.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \phi(t, X) = \inf_{u(\cdot), \mathcal{I}} \mathbf{E} \left\{ \left\langle \phi_0, X_T \right\rangle + \int_t^T \left\langle g_0(s, u(s)), X_s \right\rangle ds + \right. \\ \left. + \sum_{t < \tau_i \leq T} \left\langle \psi_0(\tau_i, V_i), X_{\tau_i-} \right\rangle \middle| X_{t-} = X \right\} = \left\langle \phi(t), X \right\rangle, \end{aligned}$$

где функция $\phi(t) \in \mathbb{R}^N$ — решение квазивариационного неравенства

$$(3.1) \quad \begin{cases} Q_1(t, \phi(t), X) = \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt}, X \right\rangle + \min_{u \in U} \left\langle A^T(t, u)\phi(t) + g_0(t, u), X \right\rangle \geq 0, \\ Q_2(t, \phi(t), X) = \left\langle \phi(t), X \right\rangle - \\ \quad - \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \left\langle [E + \bar{A}^T(t, V)]\phi(t) + \psi_0(t, V), X \right\rangle \geq 0, \\ \min \{Q_1(t, \phi(t), X), Q_2(t, \phi(t), X)\} = 0 \end{cases}$$

с граничным условием $\phi(T) = \phi_0$. Здесь и далее под E понимается единичная матрица соответствующей размерности, а $\mathbf{E}[\cdot]$ — по-прежнему означает операцию взятия математического ожидания.

Замечание 4. Отметим, что соотношения (3.1) должны выполняться для всех значений $X \in \mathcal{S}$, т.е. (3.1) представляет собой систему неравенств, задающих значение функции цены для всех возможных начальных условий t, X .

3.2. Метод решения квазивариационного неравенства

Квазивариационное неравенство (3.1) для системы с конечным множеством состояний допускает достаточно простой метод решения в отличие от общего случая системы с непрерывной частью, описываемой диффузионным стохастическим уравнением [1]. Решение, как и в случае простого уравнения динамического программирования, определяется в обратном времени [25–27] с граничным условием $\phi(T) = \phi_0$ для всех компонент вектора ϕ_0 , удовлетворяющих условиям (3.1). Функции $\phi(t)$ определяется из первого уравнения системы (3.1) при решении его от терминальной точки $\phi(T) = \phi_0$ до линии переключения

$$(3.2) \quad 0 = \langle \phi(t), X \rangle - \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \left\{ \langle \phi(t), [E + \bar{A}(t, V)]X \rangle + \langle \psi_0(t, V), X \rangle \right\} \quad \text{или}$$

$$G(t, X) = \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \langle \bar{A}^T(t, V)\phi(t) + \psi_0(t, V), X \rangle = 0.$$

В задачах импульсного управления существование и единственность решения квазивариационного неравенства (3.1) играет принципиальную роль [1]. В случае управления МЦ с конечным множеством состояний система неравенств (3.1) распадается на конечное число дифференциально-разностных уравнений соответственно числу состояний. Для каждого значения $l = 1, \dots, N$ определим функцию переключения $G^l(\phi, t) : \mathbb{R}^N \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ так:

$$(3.3) \quad G^l(\phi, t) = \min_{V \in \mathcal{V}(e_l)} \left\{ \sum_{k=1}^N \phi_k \bar{A}_{l,k}(t, V) + \psi_0^l(t, V) \right\}.$$

В силу непрерывности \bar{A} и ψ_0 по t функция переключения непрерывна по паре (ϕ, t) и определяет для каждого l линию переключения

$$(3.4) \quad Sw^l = \left\{ (\phi, t, l) : G^l(\phi, t) = 0 \right\}.$$

Таким образом, если

$$\phi(t) = \{\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)\}^T,$$

то элементы $\phi_l(t), l = 1, \dots, N$, удовлетворяют системе уравнений

$$(3.5) \quad \frac{d\phi_l(t)}{dt} + \min_{u \in U} \left\{ \sum_{k=1}^N \phi_k(t) A_{l,k}(t, u) + g_0^l(t, u) \right\} = 0, \quad \text{если } G^l(\phi(t), t) > 0.$$

При решении первого уравнения системы (3.5) в обратном времени с граничными условиями $\phi(T) = \phi_0$ для каждого $l = 1, \dots, N$, линия переключения достигается в момент времени $\{t^l : G^l(\phi(t^l), t^l) = 0\}$. Вследствие условия (3.2) функция ϕ остается непрерывной при пересечении линии переключения, однако следующее условие на ϕ позволяет определить величину импульсного управления

$$(3.6) \quad 0 = \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \left\{ \left\langle \bar{A}^T(t, V)\phi(t), X \right\rangle + \left\langle \psi_0(t, V), X \right\rangle \right\}.$$

Минимизирующее воздействие в соотношении

$$(3.7) \quad V = \operatorname{argmin}_{V \in \mathcal{V}(X)} \left\{ \left\langle \bar{A}^T(t, V)\phi(t), X \right\rangle + \left\langle \psi_0(t, V), X \right\rangle \right\}$$

существует, и далее решение системы (3.5) продолжается в обратном времени до следующего пересечения с линией переключения. Таким образом, в точке T_i используется импульсное управление V_i , определяемое соотношениями (3.6), (3.7), а функции $\phi(t)$ остаются непрерывными. Описанная процедура определяет решения квазивариационного неравенства (3.1).

3.3. Достаточное условие оптимальности одновременного импульсного и непрерывного управления

Предложение 1. Пусть:

- а) функции $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ определены с помощью процедуры, описанной в подразделе 3.2, и удовлетворяют уравнению

$$(3.8) \quad \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt}, X \right\rangle + \min_{u \in U(X)} \left\langle A^T(t, u)\phi(t) + g_0(t, u), X \right\rangle = 0$$

на каждом из подынтервалов $[T_i, T_{i+1})$ с терминальным условием $\phi(T) = \phi_0$;

- б) управления $u^*(t)$ на $[T_i, T_{i+1})$ выбраны марковскими $u^*(t) = u^*(t, X_t)$ и доставляют минимум правой части соотношения (3.8);
 в) моменты приложения импульсных воздействий $T_i^* = t^*(X)$ выбраны в соответствии с соотношением

$$(3.9) \quad \min_{V \in \mathcal{V}(X)} \left\langle [\bar{A}^T(t^*(X), V)]\phi(t^*(X)) + \psi_0(t^*(X), V), X \right\rangle = 0,$$

а импульсные воздействия V_i^* выбраны в соответствии с соотношением (3.7).

Тогда одновременное непрерывное и импульсное управление $\{u^*(\cdot), T_i^*, V_i^*\}$ оптимально.

Доказательство. Возьмем произвольное непрерывное и импульсное управление $\{u(\cdot), \mathcal{I}\}$, соответствующую траекторию, удовлетворяющую начальному условию $X_t^{u, \mathcal{I}} = X$, и вычислим величину

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \Delta J_t^T &= \left\langle \phi(T), X_T^{u, \mathcal{I}} \right\rangle - \left\langle \phi(t), X \right\rangle + \int_t^T \left\langle g_0(s, u(s)), X_s^{u, \mathcal{I}} \right\rangle ds + \\ &+ \sum_{t \leq T_i \leq T} \left\langle \psi_0(T_i, V_i), X_{T_i}^{u, \mathcal{I}} \right\rangle = \left\langle \phi(T), X_T^{u, \mathcal{I}} \right\rangle - \left\langle \phi(t), X \right\rangle + I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где $\phi(t)$ — решение квазивариационного неравенства (3.1), а $X_t^{u, \mathcal{I}}$ — решение уравнения (2.7) с начальным условием $X_t = X$. Тогда, используя формулу Ито для $X_t^{u, \mathcal{I}}$, получим соотношение

$$\Delta J_t^T = \int_t^T \left\langle \frac{d\phi(s)}{ds}, X_s^{u, \mathcal{I}} \right\rangle ds + I_1 + I_2 + \int_t^T \langle \phi(s), dX_s^{u, \mathcal{I}} \rangle.$$

Однако

$$\begin{aligned} & \int_t^T \langle \phi(s), dX_s^{u, \mathcal{I}} \rangle = \\ & = \int_t^T \langle \phi(s), A(s, u(s))X_s^{u, \mathcal{I}} \rangle ds + \sum_{t \leq T_i \leq T} \langle \phi(T_i), \bar{A}(T_i, V_i)X_{T_i-} \rangle + \int_t^T \phi(s) dW'(s). \end{aligned}$$

Далее, для произвольного управления u, \mathcal{I} в соответствии с соотношениями (3.8), (3.9) получаем, что

$$(3.11) \quad \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt}, X^{u, \mathcal{I}} \right\rangle + \left\langle A^T(t, u)\phi(t) + g_0(t, u), X^{u, \mathcal{I}} \right\rangle \geq 0,$$

$$(3.12) \quad \left\langle \phi(T_i), \bar{A}(T_i, V_i)X_{T_i-} + \psi_0(T_i, V_i), X_{T_i-} \right\rangle \geq 0.$$

Поскольку интеграл по мартингалу имеет нулевое математическое ожидание, то, объединяя (3.11) и (3.12), после подстановки в (3.10) для произвольного управления получаем неравенство

$$(3.13) \quad \mathbf{E} \left\{ \left\langle \phi(T), X_T^{u, \mathcal{I}} \right\rangle + \int_t^T \left\langle g_0(s, u(s)), X_s^{u, \mathcal{I}} \right\rangle ds + \sum_{t \leq T_i \leq T} \left\langle \psi_0(T_i, V_i), X_{T_i}^{u, \mathcal{I}} \right\rangle \right\} \geq \left\langle \phi(t), X \right\rangle.$$

Но при использовании управления, удовлетворяющего условиям оптимальности, в неравенстве (3.13) достигается равенство. Предложение доказано.

3.4. Задачи с ограничениями

Конечно, задачи с ограничениями заслуживают отдельной публикации, здесь приводится лишь набросок возможного подхода. Предположим, что задан набор критериев (3.14) и допустимое решение должно удовлетворять ограничениям

$$J_k[u(\cdot), \mathcal{I}] \leq 0 \text{ для всех } k = 1, \dots, M,$$

где

$$(3.14) \quad J_k[u(\cdot), \mathcal{I}] = \mathbf{E} \left\{ \left\langle \phi_k, X_T \right\rangle + \int_0^T \left\langle g_k(s, u(s)), X_s \right\rangle ds + \sum_{\tau_i \leq T} \left\langle \psi_k((\tau_i, V_i), X_{\tau_i-}) \right\rangle \right\}.$$

В предположении непустоты множества допустимых траекторий при допущении расширения множества управлений до множества управлений-мер можно использовать процедуру лагранжевой минимизации, которая применима, если множество допустимых значений критериев $\{J_k\} \in \mathbb{R}^M$ выпукло. Это свойство, как показано в [25–27], справедливо для задач управления с непрерывными управлениями, однако и для задачи одновременного непрерывного и импульсного управления его можно также установить для расширенного класса управлений-мер. Довольно длинное доказательство повторяет в основном рассуждения, приведенные в [25, 26], и будет предметом отдельной публикации.

4. Примеры с импульсными управлениями

4.1. Детерминированное непрерывное управление

В данной статье рассматривается модель системы обслуживания с расширением, допускающим импульсное управление, с $N = 4$ состояниями:

- 1 — “нагрузка ниже нормальной”,
- 2 — “нормальная”,
- 3 — “критически высокая, требующая немедленной очистки буфера”,
- 4 — “переполнение, приводящее к остановке обслуживания или требующее немедленной очистки очереди заявок и снижения нагрузки до нормальной”.

Допустимые переходы, соответствующие непрерывной динамике:

- $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4$, которые происходят с интенсивностью $\lambda(t)$ входного потока заявок;
- $2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3$, которые происходят с интенсивностью $\mu(t) \in [0, U(X_t)]$ обслуживания заявок;
- переходы, соответствующие импульсному управлению, допустимы в состояниях 3, 4 и переводят систему из состояния $3 \rightarrow 2$ и $4 \rightarrow 2$;
- возможны случайные переходы, например при использовании импульсного управления из состояния $4 \rightarrow 2$ или $4 \rightarrow 3$ с вероятностями p_1 и $1 - p_1$ соответственно.

Состояние 4 является критическим, и время нахождения в нем желательно минимизировать. Цель управления — “поддерживать” систему в состоянии 2, сохраняя при этом время нахождения в состояниях 3, 4 на приемлемом уровне. Вектор состояния $X \in \mathbb{R}^4$, а матрица интенсивностей переходов $A(t, \mu)$, зависящая от “непрерывного” управления μ , имеет вид (для

простоты опускаем зависимости от времени t)

$$A(t, \mu) = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu_2 & 0 & 0 \\ \lambda & -(\lambda + \mu_2) & \mu_3 & 0 \\ 0 & \lambda & -(\lambda + \mu_3) & \mu_4 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu_4 \end{pmatrix}.$$

Переменные μ_2, μ_3, μ_4 соответствуют интенсивности обработки требований в состояниях 2–4 соответственно.

Предложенная в статье модель аналогична как задачам управления уровнем воды в водохранилище [19, 31, 32], так и задачам управления потоками данных в интернете [16, 17]. Данная аналогия не столь искусственна, так как в обоих случаях увеличение уровня (воды или загрузки) происходит случайным образом за счет дождей или входного потока требований, а уменьшение уровня — за счет испарения и/или потребления различными потребителями: промышленностью, сельским хозяйством или населенными пунктами, если речь идет о воде, или за счет выполнения заданий, если речь идет о системе обслуживания. В первом случае импульсное управление — это контролируемый слив для избежания переполнения водохранилища, во втором — очистка буфера заданий для избежания перегрузки. Кроме импульсного управления используется и “непрерывное”, которое уменьшает уровень в первом случае за счет снабжения потребителей, а во втором — за счет сокращения числа заданий, ожидающих выполнения. Обе модели имеют определенные особенности, например интенсивность обслуживания может зависеть от длины очереди, но и в случае водохранилищ интенсивность снижения уровня за счет испарения может зависеть от сезонных изменений и текущего уровня.

4.2. Детерминированное импульсное управление

Предполагается возможность использования импульсного управления в состояниях 3 и 4 с переходами $3 \rightarrow 2$ и $4 \rightarrow 2$.

Матрица перехода, соответствующая применению управления V_3 , в состоянии 3 в некоторый момент времени τ_i равна

$$E + \bar{A}(\tau_i, V_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица, соответствующая применению управления V_4 , в состоянии 4 в некоторый момент времени τ_i равна соответственно

$$E + \bar{A}(\tau_i, V_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если плата за импульсное управление выбрана как

$$(4.1) \quad \psi_0(t, V) = (0, 0, 1, 1)^T,$$

то условие применения импульсного управления в точке T_i как функция от $\phi(T_i)$ в соответствии с (3.2) задается соотношением

$$0 \leq \langle \phi(T_i), \bar{A}(T_i, V_i)X \rangle + \langle \psi_0(T_i, V_i), X \rangle,$$

которое дает соотношения для значений ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \phi_3(T_i) &\geq \phi_2(T_i) + 1, \text{ если } X = e_3, \\ \phi_4(T_i) &\geq \phi_2(T_i) + 1, \text{ если } X = e_4. \end{aligned}$$

Текущая плата, характеризующая отклонение от “нормального” состояния 2 и плату за обслуживание, равна

$$(4.3) \quad g_0(t, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 + \mu_2^2 \\ 1 + \mu_3^2 \\ 2 + \mu_4^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mu_i \in [0, U(e_i)]$ для $i = 2, 3, 4$, что соответствует ограничениям на управления — интенсивностям обслуживания в соответствующем состоянии.

Таким образом, непрерывная часть системы уравнений (3.1) имеет вид:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt} = -\lambda\phi_1 + \mu_2\phi_2 + 1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} = \min_{\mu_2 \in [0, U(e_2)]} [\lambda\phi_1 - (\lambda + \mu_2)\phi_2 + \mu_3\phi_3 + \mu_2^2], \\ \frac{d\phi_3}{dt} = \min_{\mu_3 \in [0, U(e_3)]} [\lambda\phi_2 - (\lambda + \mu_3)\phi_3 + \mu_4\phi_4 + \mu_3^2 + 1], \\ \frac{d\phi_4}{dt} = \min_{\mu_4 \in [0, U(e_4)]} [\lambda\phi_3 - \mu_4\phi_4 + 2 + \mu_4^2]. \end{cases}$$

Система (4.4) решается от терминальной точки T с граничным условием (4.1) и, даже если условие применения импульсного управления выполняется, ее решение остается непрерывным. Далее при реализации решения если система находится в состоянии 3 или 4 и условие (4.2) имеет место, то применяется импульсное управление и система переходит в состояние 2. Поскольку в состоянии 2 импульсное управление недопустимо, то применяется непрерывное управление до тех пор, пока система не перейдет в состояние 3 или 4 и не будет выполнено условие применения импульсного управления. Состояние 1 не является недостижимым. Система может оказаться в нем как из-за начальных условий, так и за счет “естественной” динамики.

4.3. Стохастическое импульсное управление

В этом случае после применения импульсного управления возможны переходы из состояния 4 в состояния 2 и 3 с вероятностями p_1 и $1 - p_1$ соответственно. Предполагаем что остальные параметры не меняются. Тогда

матрица, соответствующая применению импульсного управления, имеет вид

$$E + \bar{A}(\tau_i, V_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 - p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие возможности применения импульсного воздействия имеет вид

$$\phi_4(T_i) \geq p_1 \phi_1(T_i) + (1 - p_1) \phi_3(T_i) + 1.$$

Замечание 5. Следует отметить замечательный факт, что функция $\phi(t)$ остается непрерывной в точках применения импульсного управления. Это, однако, не удивительно, поскольку, как показано в [25–27], компоненты этой функции совпадают с сопряженными переменными в принципе максимума, поэтому они не зависят от управления, как и в случае обычной задачи импульсного управления [6–8].

Схожий пример рассматривался в [33].

4.4. Реализация совместного непрерывного и импульсного управления

Необходимо подчеркнуть разницу между системами с непрерывным и дискретным множествами состояний. В первом случае импульсное управление прилагается, как правило, в начальный момент времени, если система находится выше поверхности переключения. Если затем в результате случайного движения система снова приходит на поверхность разрыва, то импульсное управление действует так, чтобы держать систему ниже поверхности переключения, реализуя так называемое сингулярное управление отталкивания [34]. В этом случае импульсы не разделяются и возникает сингулярное управление типа Канторовой лестницы. Управления такого типа характерны для задач импульсного управления стохастическими процессами диффузионного типа. В случае управления цепью Маркова если условие

$$\mathcal{V}(X_{\tau_i}) = \emptyset$$

имеет место, то после скачка мгновенное применение импульсного управления невозможно и следующее импульсное управление возможно только тогда, когда система снова попадает в состояние, где

$$\mathcal{V}(X_{t-}) \neq \emptyset.$$

Однако если в результате импульсного управления, имеющего случайный или детерминированный характер, система либо остается на поверхности переключения, либо попадает в состояние, где снова возможно импульсное управление, то импульсы могут повторяться до тех пор, пока система не перейдет в состояние, где импульсное воздействие невозможно. Таким образом возникает эффект “множественного” импульса (пачки импульсов) [21]. В рассматриваемом примере при переходе из состояния 4 в 3 такой эффект возможен, если в состоянии 3 снова допустимо применение импульса. В этом случае переход из состояния 4 в 2 происходит в два скачка $4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$, но стоимость такого импульсного воздействия равна суммарной стоимости двух переходов, т.е. $1 + 1 = 2$.

4.5. Примеры нахождения “непрерывных” и импульсных управлений

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим систему с детерминированным импульсным управлением, описанную в подразделе 2.3 с параметрами:

- $T = 1$;
- терминальные условия, соответствующие “штрафу” за пребывание в состояниях 1–4 в конечный момент времени равны

$$(4.5) \quad \phi_0 = \phi(T) = (2, 0; 1, 5; 3, 5; 5, 0)^T;$$

- ограничения на управление или скорость обслуживания $\mu_2^{\max} = U(e_2) = 0, 2$, $\mu_3^{\max} = U(e_3) = 0, 4$ задаются только для состояний 2 и 3, а состояние 4 соответствует остановке обслуживания, поэтому состояние 4 предполагается поглощающим.

Таким образом, непрерывная часть системы уравнений (3.1) в этом случае имеет вид:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{d\phi_1}{dt} = -\lambda\phi_1 + \mu_2\phi_2 + 1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} = \min_{\mu_2 \in [0, \mu_2^{\max}]} [\lambda\phi_1 - (\lambda + \mu_2)\phi_2 + \mu_3\phi_3 + \mu_2^2], \\ \frac{d\phi_3}{dt} = \min_{\mu_3 \in [0, \mu_3^{\max}]} [\lambda\phi_2 - (\lambda + \mu_3)\phi_3 + \mu_4\phi_4 + \mu_3^2 + 1], \\ \frac{d\phi_4}{dt} = \lambda\phi_3 + 2. \end{cases}$$

Решение системы 4.6 в обратном времени для интенсивности потока входных требований, заданной соотношением

$$(4.7) \quad \lambda(t) = 0, 25 \cos(2\pi t) + 0, 5,$$

показано на рис. 1.

Линия переключения (3.2) для допустимого импульсного управления вычисляется как $SW(t) = \phi_3(t) - \phi_2(t) - 1 = 0$ и приведена на рис. 2. Таким образом, если система находится в состоянии 3 и выполнено условие $SW(t) \geq 0$, то должно использоваться импульсное управление, которое переведет систему в состояние 2. Таким образом, область применения импульсного управления — это одновременно состояние 3 и временной интервал $\approx [0, 8; 1, 0]$.

Заметим, что использование импульсного управления позволяет уменьшить значение критерия качества, хотя это зависит от вероятности попадания в состояние 3 на отрезке $[0, 8; 1, 0]$. Если это происходит, например, в момент времени $t = 0, 8$, то значение критерия качества для состояния 3 в момент окончания процесса $t = 1, 0$ равно $\phi_2(1, 0) + 1 \approx 2, 5$, что меньше, чем без применения импульсного управления, т.е. $\phi_3(1, 0) \approx 3, 5$. Однако для вычисления значения критерия качества при использовании одновременно непрерывного и импульсного управлений необходимо вычислять значение цены задачи с учетом случайного характера применения импульсного управления, что

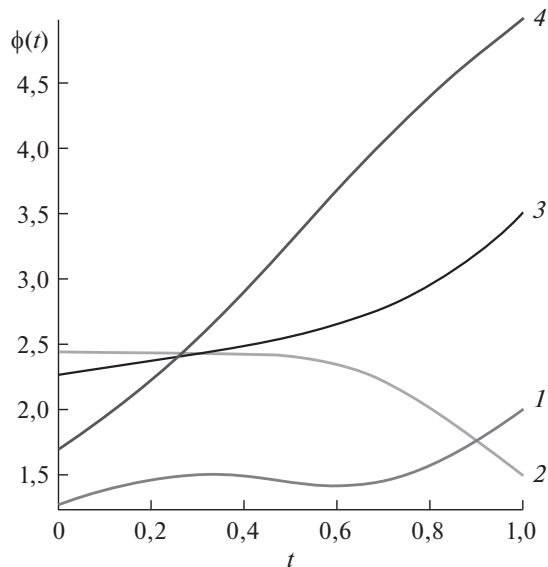


Рис. 1. Решение системы (4.6) в обратном времени с терминальными условиями (4.5). 1 — $\phi_1(t)$, 2 — $\phi_2(t)$, 3 — $\phi_3(t)$, 4 — $\phi_4(t)$.

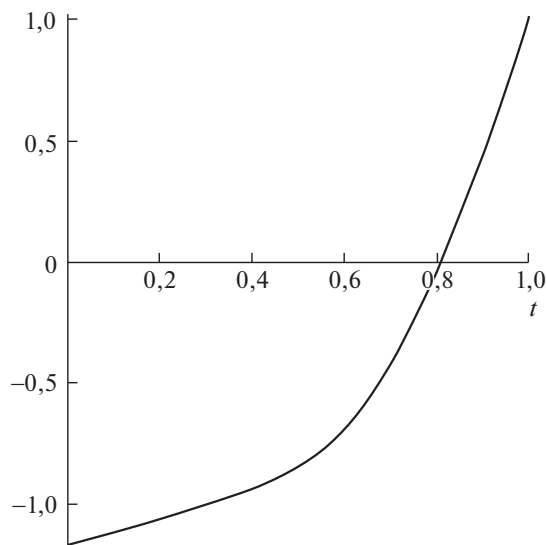


Рис. 2. Линия переключения для импульсного управления в состоянии 3. Область, где $SW(t) \geq 0$, — это область импульсного управления.

должно быть предметом специальной публикации. Другой важный вопрос, требующий отдельного рассмотрения, — это вычисление функции распределения состояний при использовании импульсного управления, что приводит к необходимости решения прямых уравнений Колмогорова, которые в этом случае будут уже не обыкновенными дифференциальными уравнениями, а дискретно-непрерывными со случайными временами переключения.

5. Заключение

В данной статье развит подход к численному решению задачи стохастического управления МЦ с “непрерывными” и импульсными управлениями. Важной особенностью модели МЦ является более простая процедура определения условий оптимальности, чем для стохастических систем с непрерывным множеством состояний. Дальнейшие исследования будут направлены на решение прикладных задач управления природными ресурсами с использованием моделей МЦ, например для управления водоснабжением [19], распределением природного газа [20], управлением передачей данных через телекоммуникационные сети с нестабильными характеристиками и, в частности, для связи и передачи данных с беспилотными летательными аппаратами [30, 35].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенсуссан А., Лионс Ж.-Л. Импульсное управление и квазивариационные неравенства / Пер. с франц. М.: Наука, 1987.
Bensoussan A., Lions J.L. Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasivariationnelles. Bordas. Paris: Dunod, 1982.
2. Yushkevich A.A. Markov Decision Processes with Both Continuous and Impulsive Control // Arkin V.I., Shiraev A., Wets R. (eds). Stochastic Optimization. Lect. Notes in Control and Information Sci. 1986. V. 81. P. 234–246. Berlin. Heidelberg: Springer. DOI 10.1007/BFb0007100
3. Gatarek D. Impulsive Control of Piecewise-Deterministic Processes // Zabczyk J. (eds). Stochastic Systems and Optimization. Lect. Notes in Control and Information Sci. 1989. V. 136. P. 298–308. Berlin, Heidelberg: Springer. DOI 10.1007/BFb0002690
4. Dempster M.A.H., Ye J.J. Impulse Control of Piecewise Deterministic Markov Processes // Ann. Appl. Prob. 1995. V. 5. No. 2. P. 399–423.
DOI 10.1214/aoap/1177004771
5. Dufour F., Miller B.M. Generalized Solutions in Nonlinear Stochastic Control Problems // SIAM J. Control Optim. 2002. V. 40. P. 1724–1745.
DOI 10.1137/S0363012900374221
6. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. N.Y.: Kluwer Acad./Plenum Publishres, 2003.
DOI 10.1007/978-1-4615-0095-7
7. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.
8. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями и ударными воздействиями. М.: ЛЕНАНД/URSS, 2019.
9. Dufour F., Horiguchi M., Piunovskiy A.B. Optimal Impulsive Control of Piecewise Deterministic Markov Processes // Stochastics. 2016. V. 88. No. 7. P. 1073–1098.
DOI 10.1080/17442508.2016.1197925
10. Shujun Wang, Zhen Wu Maximum Principle for Optimal Control Problems of Forward-Backward Regime-Switching Systems Involving Impulse Controls // Math. Probl. Eng. 2015. Article ID 892304. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/892304>.
11. Dufour F., Piunovskiy A.B. Impulsive Control for Continuous-Time Markov Decision Processes: A Linear Programming Approach // Appl. Math. Optim. 2016. V. 74. P. 129–161. DOI 10.1007/s00245-015-9310-8

12. *Delebecque F., Quadrat J.-P.* Optimal Control of Markov Chains Admitting Strong and Weak Interactions // *Automatica*. 1981. V. 17. No. 2. P. 281–296.
DOI 10.1016/0005-1098(81)90047-9
13. *Bae J., Kim S., Lee E.Y.* Average Cost under the $p_{\lambda, \tau}^M$ Policy in a Finite Dam with Compound Poisson Inputs // *J. Appl. Probab.* 2003. V. 40. No. 2. P. 519–526.
DOI 10.1239/jap/1053003561
14. *Filar J.A., Vrieze K.* Competitive Markov Decision Processes — Theory, Algorithms and Applications. N.Y.: Springer, 1997. DOI 10.1007/978-1-4612-4054-9
15. *Williams B.K.* Markov Decision Processes in Natural Resources Management: Observability and Uncertainty // *Ecological Modelling*. 2009. V. 220. No. 6. P. 830–840. DOI 10.1016/j.ecolmodel.2008.12.023
16. *Miller A.* Dynamic access control with active users // *J. of Communications Technology and Electronics*. 2010. V. 55. No. 12. P. 1432–1441.
DOI 10.1134/S1064226910120168
17. *Miller A., Miller B.* Control of Connected Markov Chains. Application to Congestion Avoidance in the Internet // *Proc. 50th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. (CDC-ECC) Orlando, FL, USA, 2011, December 12–15, 2011*. P. 7242–7248. DOI 10.1109/CDC.2011.6161029
18. *Miller B., McInnes D.* Optimal Management of a Two Dam System via Stochastic Control: Parallel Computing Approach // *Proc. 50th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. (CDC-ECC) Orlando, FL, USA, December 12–15, 2011*. P. 1417–1423. DOI 10.1109/CDC.2011.6160566
19. *McInnes D., Miller B.* Optimal Control of Large Dam Using Time-Inhomogeneous Markov Chains with an Application to Flood Control // *IFAC-PapersOnLine*. 2017. V. 50. No. 1. P. 3499–3504. DOI 10.1016/j.ifacol.2017.08.936
20. *McInnes D., Miller B., Schreider S.* Optimisation of Gas Flows in South Eastern Australia via Controllable Markov Chains // *Proc. Australian Control Conf. November 3–4, 2016*. Newcastle: Engineers Australia. P. 341–346. DOI 10.1109/AUCC.2016.7868213
21. *Avrachenkov K., Habachi O., Piunovskiy A., Zhang Y.* Infinite Horizon Optimal Impulsive Control with Applications to Internet Congestion Control // *Int. J. Control*. 2015. V. 88. No. 4. P. 703–716. DOI: 10.1080/00207179.2014.971436
22. *McInnes D., Miller B.* Optimal Control of Time-Inhomogeneous Markov Chains with Application to Dam Management // *Proc. Australian Control Conf. 4–5 November, 2013, Perth, Australia*. 2013. P. 230–237. DOI 10.1109/AUCC.2013.6697278
23. *Kushner H.J., Dupuis P.G.* Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. 2nd ed. N.Y.: Springer Science+Business Media, 2001.
DOI 10.1007/978-1-4613-0007-6
24. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models. Estimation and Control. N.Y.: Springer Verlag, 2008. DOI 10.1007/978-0-387-84854-9
25. *Miller B., Miller G., Semenikhin K.* Towards the Optimal Control of Markov Chains with Constraints // *Automatica*. 2010. V. 46. P. 1495–1502.
DOI 10.1016/j.automatica.2010.06.003
26. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // *АиТ*. 2011. № 2. С. 111–130.
Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V. Methods to Design Optimal Control of Markov Process with Finite State Set in the Presence of Constraints // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 2. P. 323–341.

27. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Регуляризация задачи оптимального управления марковским процессом с конечным числом состояний при наличии ограничений // *АиТ.* 2016. № 9. С. 96–123.
Miller B.M., Miller G.B., Semikhin K.V. Optimal Control Problem Regularization for the Markov Process with Finite Number of States and Constraints // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 9. P. 1589–1611. DOI 10.1134/S0005117916090071
28. *Brémaud P.* Point Processes and Queues: Martingale Dynamics. N.Y.: Springer, 1981.
29. *Liptser R.Sh., Shiryaev A.N.* Statistics of Random Processes. N.Y.: Springer, 1979.
30. *Miller B., Miller G., Semikhin K.* Optimization of the Data Transmission Flow from Moving Object to Nonhomogeneous Network of Base Stations // *IFAC-PapersOnLine.* 2017. V. 50. No. 1. P. 6160–6165. DOI 10.1016/j.ifacol.2017.08.981
31. *Miller A., Miller B., Popov A., Stepanyan K.* Towards the Development of Numerical Procedure for Control of Connected Markov Chains // *Proc. 5th Australian Control Conf. (AUCC).* November 5–6, 2015, Gold Coast, QLD, Australia. 2015. P. 336–341.
32. *Miller B., Stepanyan K., Miller A., Popov A.* Towards One Nonconvex Connected Markov Chain Control Problem. An Approach to Numerical Solution // *2018 Australian New Zealand Control Conf. (ANZCC).* Swinburne University of Technology, Melbourne, Australia, Dec. 7–8, 2018. P. 172–177.
DOI: 10.1109/ANZCC.2018.8606576
33. *Miller A., Miller B., Stepanyan K.* A numerical Approach to Joint Continuous and Impulsive Control of Markov Chains // *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. No. 32. P. 462–467. DOI:10.1016/j.ifacol.2018.11.428
34. *Karatzas I., Shreve S.E.* Connection Between Optimal Stopping and Singular Stochastic Control I. Monotone Follower Problems // *SIAM J. Control Optim.* 1984. V. 22. No. 6. P. 856–877. DOI 10.1137/0322054
35. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Оптимизация выбора каналов связи при передаче потока данных с учетом потерь // *АиТ.* 2018. № 1. С. 84–99.
Miller B.M., Miller G.B., Semikhin K.V. Optimal Channel Choice for Lossy Data Flow Transmission // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 1. P. 66–77.
DOI 10.1134/S000511791801006X

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 14.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019