

© 2020 г. П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com),  
А.С. КОПОСОВ (koposov96@yandex.ru),  
Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com)  
(Арзамасский политехнический институт (филиал)  
Нижегородского государственного технического  
университета им. Р.Е. Алексева)

## УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ МУЛЬТИАГЕНТНОЙ СИСТЕМОЙ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ<sup>1</sup>

Рассматривается мультиагентная система, в которой каждый из агентов описывается дискретной линейной моделью, учитывающей как внешние случайные возмущения, действующие на объект, так и шумы в измерениях. Предлагаются сетевые версии управления с итеративным обучением на основе минимизации отклонений от эталонной модели и на основе теории стохастической устойчивости повторяющихся процессов с применением дивергентного метода векторной функции Ляпунова. Эти версии сравниваются на примере управления группой манипуляторов.

*Ключевые слова:* мультиагентная система, стохастическая система, сетевое управление, управление с итеративным обучением, эталонная модель, повторяющиеся процессы, векторная функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231020030083

### 1. Введение

Идея управления с итеративным обучением (УИО) впервые была сформулирована в патенте США [1] с приоритетом от 1967 г., затем концепция такого управления была изложена в журнале [2] на японском языке. В силу ограниченной доступности [1, 2] результаты этих работ не были востребованы, пока не появилась серия статей [3–5], вызвавшая широкий интерес как теоретиков, так и практиков. К настоящему времени по различным вопросам УИО опубликовано большое количество работ, из которых в первую очередь можно рекомендовать обзорные статьи [6–8] и монографию [9]. Управление с итеративным обучением стало важным направлением интеллектуального управления, и оно широко используется во многих практических приложениях, в первую очередь в робототехнике [10–13].

Обзор результатов по стохастическому управлению с итеративным обучением представлен в [14, 15]. Классическая стохастическая модель обычно включает случайные возмущения, действующие на объект, и шумы измерений. Эти факторы снижают точность процесса итеративного обучения.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00528\_а).

Несмотря на очевидную важность задачи стохастического УИО в рамках указанной классической модели, ей посвящено небольшое число работ. В обзоре [14] 2014 г. процитировано 104 работы, из которых 17 относятся к классическому направлению, 9 работ связано с исследованием управления с итеративным обучением в условиях случайной потери информационных пакетов в канале связи между измеряемым выходом и входом, остальные цитируемые работы не содержат стохастических постановок и носят вводный характер. В обзоре [15] 2018 г. дополнительно процитировано 25 новых публикаций, из которых стохастические задачи рассматриваются в 19 работах, где в основном исследуются уже упомянутые задачи в условиях потери информационных пакетов (random packet losses, data dropouts).

Анализ этих обзоров и самостоятельный анализ литературы показал, что конструктивные методы синтеза стохастического управления с итеративным обучением в рамках классической постановки предложены в [16–22] для линейных систем с дискретным временем, другие работы учитывают только дополнительные к классической постановке случайные факторы, что никак не заменяет и не исключает развитие классического направления. В [16–21] предложены алгоритмы двух типов. В [16, 17] предложен так называемый алгоритм D-типа, использующий для построения алгоритма управления с итеративным обучением аналог производной ошибки обучения, в [18] дополнительно предложен алгоритм P-типа, непосредственно использующий ошибку обучения, этот алгоритм затем был расширен и усовершенствован в [19], в [20, 21] рассмотрены некоторые специальные вопросы, связанные со сходимостью и оптимизацией этих алгоритмов.

Анализ алгоритмов [16–18], проведенный в [23], показал, что они обладают следующими недостатками:

- алгоритм УИО не использует фильтрацию измеряемого сигнала, что приводит к большим значениям дисперсии ошибки обучения, более того, в алгоритмах D-типа, использующих аналог производной зашумленного сигнала, происходит дополнительное увеличение этой дисперсии, а также другие негативные эффекты;

- при малых значениях дисперсий начального состояния процесс обучения сходится недопустимо медленно;

- алгоритм обладает чрезмерной вычислительной сложностью.

В [23] предложен новый алгоритм УИО, на основе метода векторных функций Ляпунова и теории диссипативности повторяющихся процессов, использующий оценки состояния, получаемые с помощью фильтра Калмана. В этом алгоритме удалось устранить указанные недостатки. В [22] для дискретных линейных систем с постоянными параметрами предложен алгоритм на основе совместного применения метода супервектора [9] и фильтра Калмана. За счет фильтрации в нем частично устранен первый из перечисленных недостатков. Однако метод супервектора существенно повышает размерность вычислительных соотношений относительно размерности системы и поэтому сохраняется последний из перечисленных недостатков.

В классе непрерывных моделей, которыми, как правило, описываются исходные объекты управления, задача стохастического управления с итератив-

ным обучением, как это следует из обзоров [14, 15] и самостоятельного анализа публикаций, в литературе не рассматривалась.

В настоящее время существенное внимание уделяется задачам, в которых УИО группой объектов осуществляется через некоторую информационную сеть [24–30]. Задача стохастического УИО в сетевой постановке рассматривалась лишь с учетом потерь пакетов при информационном обмене. Таких работ относительно немного. Укажем недавние [31–35] и списки литературы в них. Существенно, что шумы, действующие на объект, и шумы измерений при этом не учитывались.

В данной работе рассматривается мультиагентная система, в которой каждый из агентов описывается дискретной линейной моделью, учитывающей как внешние случайные возмущения, действующие на объект, так и шумы в измерениях. Предлагаются сетевые версии УИО на основе подхода, разработанного в [16], и подхода, разработанного в [23, 30]. Эти версии затем сравниваются на примере управления группой манипуляторов.

## 2. Сетевое управление с итеративным обучением на основе минимизации отклонений от эталонной модели

### 2.1. Описание сетевой системы и постановка задачи

Рассмотрим группу из  $N$  динамических систем (агентов). Каждая система функционирует в повторяющемся режиме с одним и тем же постоянным периодом повторения  $T$ , всякий раз возвращаясь в начальное состояние. Динамика  $i$ -го агента на  $k$ -м повторении описывается следующей дискретной моделью в пространстве состояний:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} x_k^{(i)}(t+1) &= Ax_k^{(i)}(t) + Bu_k^{(i)}(t) + w_k^{(i)}(t), \\ y_k^{(i)}(t) &= Cx_k^{(i)}(t), \\ y_{v,k}^{(i)}(t) &= y_k^{(i)}(t) + v_k^{(i)}(t), \\ t &= 0, 1, \dots, T, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где  $x_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  — вектор состояния,  $u_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  — вектор управления,  $w_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  — вектор возмущений, действующих на объект,  $y_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  — вектор выходных переменных (вектор профиля повторения), недоступный наблюдению,  $y_{v,k}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  — вектор наблюдаемых (измеряемых) выходных переменных,  $v_k^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  — вектор шумов измерений,  $A, B, C$  — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Граничные условия  $x_k^{(i)}(0)$  и  $u_0^{(i)}(t)$  будем считать известными для каждого агента.

Предполагается, что возмущения, действующие на объект  $w_k^{(i)}(t)$ , и шумы измерений  $v_k^{(i)}(t)$  представляют собой независимые гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями, ковариационная матрица  $S_w^{(i)} = \mathbb{E} \left[ w_k^{(i)}(t) w_k^{(i)}(t)^T \right]$  является неотрицательно определенной, а ковариационная матрица  $S_v^{(i)} = \mathbb{E} \left[ v_k^{(i)}(t) v_k^{(i)}(t)^T \right]$  — положительно определенной, где

$E$  — оператор математического ожидания, шумы  $v_k^{(i)}(t)$  и  $w_k^{(i)}(t)$  независимы. Кроме того, для любых двух различных агентов  $i$  и  $j$   $E[w_k^{(i)}(t)w_k^{(j)}(t)^T] = 0$ ,  $E[v_k^{(i)}(t)v_k^{(j)}(t)^T] = 0$ ,  $E[w_k^{(i)}(t)v_k^{(j)}(t)^T] = 0$  и  $E[v_k^{(i)}(t)w_k^{(j)}(t)^T] = 0$ . Связи между агентами представим в виде направленного графа  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , где  $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$  — вершины этого графа,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  — его ребра. Возможность получения агентом  $j$  информации от  $i$ -го агента задается ребром, направленным от вершины  $i$  к  $j$  и обозначаемым упорядоченной парой  $(i, j) \in \mathcal{E}$ . Множество соседних вершин  $i$ -го агента обозначим как  $N_i = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ . Элементы матрицы смежности  $D(\mathcal{G}) = [d_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  задаются следующим образом:  $d_{ij} > 0$ , если  $(j, i) \in \mathcal{E}$ ,  $d_{ij} = 0$  в противном случае,  $d_{ii} = 0$ . Значения ненулевых  $d_{ij}$  в общем случае различные и отражают значимость тех или иных связей. В простейшем случае они равны единице. Матрица Лапласа графа  $\mathcal{G}$  задается выражением [36]

$$L(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N d_{1j} & -d_{12} & \cdots & -d_{1N} \\ -d_{21} & \sum_{j=1}^N d_{2j} & \cdots & -d_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{N1} & -d_{N2} & \cdots & \sum_{j=1}^N d_{Nj} \end{bmatrix}.$$

Обозначим желаемую траекторию как  $y_{ref}(t)$  и введем вектор отклонения измеренного выходного сигнала  $i$ -го агента на  $k$ -м повторении от желаемой траектории (далее вектор ошибки обучения)

$$e_{v,k}^{(i)}(t) = y_{ref}(t) - y_{v,k}^{(i)}(t).$$

В рамках задачи сетевого управления агента, имеющего доступ к желаемой траектории  $y_{ref}(t)$ , будем называть лидером, а остальных — ведомыми системами. Возможность получения агентами информации о желаемой траектории задается матрицей

$$G = \text{diag}[g_i], \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $g_i = 1$ , если информация о желаемой траектории доступна  $i$ -му агенту,  $g_i = 0$  в противном случае. Запишем уравнения (2.1) в компактном виде. Для этого введем расширенные векторы

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \begin{bmatrix} x_k^{(1)}(t)^T & \cdots & x_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, & u_k(t) &= \begin{bmatrix} u_k^{(1)}(t)^T & \cdots & u_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \\ w_k(t) &= \begin{bmatrix} w_k^{(1)}(t)^T & \cdots & w_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, & y_k(t) &= \begin{bmatrix} y_k^{(1)}(t)^T & \cdots & y_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \\ y_{v,k}(t) &= \begin{bmatrix} y_{v,k}^{(1)}(t)^T & \cdots & y_{v,k}^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, & v_k(t) &= \begin{bmatrix} v_k^{(1)}(t)^T & \cdots & v_k^{(N)}(t)^T \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

тогда система (2.1) примет вид

$$\begin{aligned}x_k(t+1) &= A_N x_k(t) + B_N u_k(t) + w_k(t), \\y_k(t) &= C_N x_k(t), \\y_{v,k}(t) &= y_k(t) + v_k(t), \\t &\in [0, T], \quad k = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

где  $A_N = I_N \otimes A$ ,  $B_N = I_N \otimes B$ ,  $C_N = I_N \otimes C$ . Граничные условия задаются соотношениями

$$x_k(0) = \left[ x_k^{(1)}(0)^T \quad \dots \quad x_k^{(N)}(0)^T \right]^T, \quad u_0(t) = \left[ u_0^{(1)}(t)^T \quad \dots \quad u_0^{(N)}(t)^T \right]^T.$$

Протокол, следуя [16], будем формировать в виде

$$(2.2) \quad \begin{aligned}u_{k+1}^{(i)}(t) &= u_k^{(i)}(t) + K_{1,k}(t) g_i \left[ e_{v,k}^{(i)}(t+1) - e_{v,k}^{(i)}(t) \right] + \\&+ K_{2,k}(t) \sum_{j \in N_i} d_{ij} \left[ \left( e_{v,k}^{(i)}(t+1) - e_{v,k}^{(i)}(t) \right) - \left( e_{v,k}^{(j)}(t+1) - e_{v,k}^{(j)}(t) \right) \right],\end{aligned}$$

где  $K_{1,k}(t)$  и  $K_{2,k}(t)$  — матрицы усиления,  $g_i$  — диагональные элементы матрицы  $G$ ,  $d_{ij}$  — элементы матрицы смежности  $D$ . Введем расширенный вектор ошибки обучения измеренного выходного сигнала

$$e_{v,k}(t) = \left[ e_{v,k}^{(1)}(t)^T \quad \dots \quad e_{v,k}^{(N)}(t)^T \right]^T,$$

тогда протокол (2.2) будет иметь вид

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \bar{K}_k(t) (e_{v,k}(t+1) - e_{v,k}(t)),$$

где  $\bar{K}_k(t) = G \otimes K_{1,k}(t) + L \otimes K_{2,k}(t)$ . Следуя [16], предположим, что желаемая траектория  $y_{ref}(t)$  является выходным сигналом системы вида

$$(2.3) \quad \begin{aligned}x_{ref}(t+1) &= A x_{ref}(t) + B u_{ref}(t), \\y_{ref}(t) &= C x_{ref}(t), \quad t \in [0, T]\end{aligned}$$

и для любой желаемой траектории и соответствующего начального условия  $x_{ref}(0)$  существует единственное управление  $u_{ref}(t)$ , генерирующее эту траекторию, т.е. желаемая траектория однозначно реализуема. При сделанном предположении задача сводится к нахождению управления (2.2), которое минимизирует дисперсии отклонения переменных состояния и управления агентов от переменных  $x_{ref}$  и  $u_{ref}$  соответственно. Систему (2.3) можно, таким образом, рассматривать как эталонную модель.

## 2.2. Решение задачи

Введем векторы ошибок состояния и управления  $i$ -го агента на  $k$ -й итерации относительно эталонной модели (2.3):

$$(2.4) \quad \delta x_k^{(i)}(t) = x_{ref}(t) - x_k^{(i)}(t), \quad \delta u_k^{(i)}(t) = u_{ref}(t) - u_k^{(i)}(t).$$

Ковариационные матрицы векторов ошибок состояния и управления  $i$ -го и  $j$ -го агентов запишутся в виде

$$(2.5) \quad P_{x,k}^{(i,j)}(t) = E \left[ \delta x_k^{(i)}(t) \delta x_k^{(j)}(t)^T \right], \quad P_{u,k}^{(i,j)}(t) = E \left[ \delta u_k^{(i)}(t) \delta u_k^{(j)}(t)^T \right].$$

Соотношение (2.4) также запишем в компактном виде с использованием расширенных векторов ошибок состояния и управления:

$$\delta x_k(t) = x_{ref,N}(t) - x_k(t), \quad \delta u_k(t) = u_{ref,N}(t) - u_k(t),$$

где

$$\begin{aligned} \delta x_k(t) &= \left[ \delta x_k^{(1)}(t)^T \quad \dots \quad \delta x_k^{(N)}(t)^T \right]^T, \\ \delta u_k(t) &= \left[ \delta u_k^{(1)}(t)^T \quad \dots \quad \delta u_k^{(N)}(t)^T \right]^T, \\ x_{ref,N}(t) &= J_{N,1} \otimes x_{ref}(t), \quad u_{ref,N}(t) = J_{N,1} \otimes u_{ref}(t), \end{aligned}$$

где  $J_{N,1}$  — вектор столбец из единиц. Начальные ошибки даются выражениями

$$\begin{aligned} \delta x_k(0) &= \left[ \delta x_k^{(1)}(0)^T \dots \delta x_k^{(N)}(0)^T \right]^T, \\ \delta u_0(t) &= \left[ \delta u_0^{(1)}(t)^T \dots \delta u_0^{(N)}(t)^T \right]^T. \end{aligned}$$

Представим ковариационные матрицы (2.5) в блочной форме:

$$\begin{aligned} P_{x,k}(t) &= \begin{bmatrix} P_{x,k}^{(1,1)}(t) & \dots & P_{x,k}^{(1,N)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{x,k}^{(N,1)}(t) & \dots & P_{x,k}^{(N,N)}(t) \end{bmatrix}, \\ P_{u,k}(t) &= \begin{bmatrix} P_{u,k}^{(1,1)}(t) & \dots & P_{u,k}^{(1,N)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{u,k}^{(N,1)}(t) & \dots & P_{u,k}^{(N,N)}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку в силу принятых допущений начальная ошибка состояния  $\delta x_k^{(i)}(0)$  и начальная ошибка управления  $\delta u_0^{(i)}(t)$  являются гауссовскими белыми шумами с нулевыми математическими ожиданиями, причем ковариационная

матрица  $S_w^{(i)} = E \left[ w_k^{(i)}(t) w_k^{(i)}(t)^T \right]$  является неотрицательно определенной, а ковариационная матрица  $S_v^{(i)} = E \left[ v_k^{(i)}(t) v_k^{(i)}(t)^T \right]$  — положительно определенной, то  $P_{x,k}^{(i,i)}(0) = E_k \left[ \delta x_k^{(i)}(0) \delta x_k^{(i)}(0)^T \right]$  — неотрицательно определенная матрица, а  $P_{u,0}^{(i,i)}(t) = E \left[ \delta u_0^{(i)}(t) \delta u_0^{(i)}(t)^T \right]$  — положительно определенная матрица. Кроме того,  $\delta x_k^{(i)}(0)$  не коррелирована с  $\delta u_0^{(i)}(t)$ ,  $w_k^{(i)}(0)$  и  $v_k^{(i)}(0)$ . Для двух различных агентов  $i$  и  $j$   $\delta x_k^{(i)}(0)$  и  $\delta u_0^{(i)}(t)$  не коррелированы с  $\delta x_k^{(j)}(0)$ ,  $\delta u_0^{(j)}(t)$ ,  $w_k^{(j)}(0)$  и  $v_k^{(j)}(0)$ . В соответствии с этим ковариационные матрицы расширенных векторов запишутся в виде

$$S_w = E \left[ w_k(t) w_k(t)^T \right] = \begin{bmatrix} S_w^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_w^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$S_v = E \left[ v_k(t) v_k(t)^T \right] = \begin{bmatrix} S_v^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & S_v^{(N)} \end{bmatrix},$$

$$P_{x,k}(0) = E_k \left[ \delta x_k(0) \delta x_k(0)^T \right] = \begin{bmatrix} P_{x,k}^{(1,1)}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_{x,k}^{(N,N)}(0) \end{bmatrix},$$

$$P_{u,0}(t) = E \left[ \delta u_0(t) \delta u_0(t)^T \right] = \begin{bmatrix} P_{u,0}^{(1,1)}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & P_{u,0}^{(N,N)}(t) \end{bmatrix}.$$

Отметим также, что  $\delta x_k(0)$  не коррелирована с  $\delta u_0(t)$ ,  $w_k(0)$  и  $v_k(0)$ . Ошибка вектора состояния в момент  $t + 1$  и ошибка управления на шаге  $k + 1$  соответственно определяются соотношениями

$$(2.6) \quad \delta x_k(t+1) = A_N \delta x_k(t) + B_N \delta u_k(t) - w_k(t),$$

$$(2.7) \quad \delta u_{k+1}(t) = (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N) \delta u_k + \bar{K}_k(t) (C_N - C_N A_N) \delta x_k(t) + \bar{K}_k(t) (C_N w_k(t) + v_k(t+1) - v_k(t)).$$

Соотношения (2.6) и (2.7) можно объединить в виде двумерной модели Рессера [37]

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} \delta u_{k+1}(t) \\ \delta x_k(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \bar{K}_k(t) C_N B_N & \bar{K}_k(t) (C_N - C_N A_N) \\ B_N & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_k(t) \\ \delta x_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_k(t) C_N & \bar{K}_k(t) \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k(t) \\ v_k(t+1) - v_k(t) \end{bmatrix}.$$

Обозначим:

$$X^+ = \begin{bmatrix} \delta u_{k+1}(t) \\ \delta x_k(t+1) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \delta u_k(t) \\ \delta x_k(t) \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} w_k(t) \\ v_k(t+1) - v_k(t) \end{bmatrix},$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - \bar{K}_k(t) C_N B_N & \bar{K}_k(t) (C_N - C_N A_N) \\ B_N & A_N \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{K}_k(t) C_N & \bar{K}_k(t) \\ -I & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем (2.8) в компактном виде

$$X^+ = \Phi X + \Gamma Z.$$

Ковариационная матрица ошибки отклонения от эталонной модели  $P^+ = E[X^+ X^{+T}]$  запишется в виде

$$(2.9) \quad \begin{aligned} P^+ &= E[(\Phi X + \Gamma Z)(\Phi X + \Gamma Z)^T] = \\ &= \Phi E[XX^T] \Phi^T + \Phi E[XZ^T] \Gamma^T + \Gamma E[ZX^T] \Phi^T + \Gamma E[ZZ^T] \Gamma^T. \end{aligned}$$

Дисперсия ошибки отклонения от эталонной модели представляет собой след  $P^+$ . Поэтому матрицы усиления  $K_{1,k}(t)$  и  $K_{2,k}(t)$  будем искать из условия минимизации следа матрицы  $P^+$ . Поскольку начальное состояние ошибки  $\delta x_k(0)$  не коррелировано с возмущениями  $w_k(t)$  и  $v_k(t)$ , то  $E[\delta u_k(t) w_k(t)^T] = 0$  и  $E[\delta x_k(t) (v_k(t+1) - v_k(t))^T] = 0$ . Таким образом,  $E[XZ^T] = E[ZX^T] = 0$ . Тогда

$$(2.10) \quad P^+ = \Phi E[XX^T] \Phi^T + \Gamma E[ZZ^T] \Gamma^T,$$

где

$$E[XX^T] = \begin{bmatrix} P_{u,k}(t) & P_{ux,k}(t) \\ P_{ux,k}(t)^T & P_{x,k}(t) \end{bmatrix} = P, \quad E[ZZ^T] = \begin{bmatrix} S_w & 0 \\ 0 & 2S_v \end{bmatrix}.$$

В [16] для случая одного агента было доказано, что  $P_{ux,k}(t) = 0$ . Это свойство остается справедливым в рассматриваемом случае и доказывается по аналогии с [16]. Выразим слагаемые в правой части (2.10) в виде

$$\begin{aligned} &\Phi E[XX^T] \Phi^T = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{11} P_{u,k}(t) \Phi_{11}^T + \Phi_{12} P_{x,k}(t) \Phi_{12}^T & \Phi_{11} P_{u,k}(t) \Phi_{21}^T + \Phi_{12} P_{x,k}(t) \Phi_{22}^T \\ \Phi_{21} P_{u,k}(t) \Phi_{11}^T + \Phi_{22} P_{x,k}(t) \Phi_{12}^T & \Phi_{21} P_{u,k}(t) \Phi_{21}^T + \Phi_{22} P_{x,k}(t) \Phi_{22}^T \end{bmatrix}, \\ &\Gamma E[ZZ^T] \Gamma^T = \begin{bmatrix} \bar{K}_k(t) (C_N S_w C_N^T + 2S_v) \bar{K}_k(t)^T & -\bar{K}_k(t) C_N S_w \\ -S_w C_N^T \bar{K}_k(t)^T & S_w \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



С учетом этих соотношений след матрицы  $P^+$  можно записать как

$$\begin{aligned}
 \text{tr}[P^+] &= \text{tr} \left[ \Phi_{11} P_{u,k}(t) \Phi_{11}^T + \Phi_{12} P_{x,k}(t) \Phi_{12}^T + \Phi_{21} P_{u,k}(t) \Phi_{21}^T + \right. \\
 &+ \left. \Phi_{22} P_{x,k}(t) \Phi_{22}^T + \bar{K}_k(t) C_N S_w C_N^T \bar{K}_k(t)^T + 2\bar{K}_k(t) S_v \bar{K}_k(t)^T + S_w \right] = \\
 (2.11) \quad &= \text{tr} \left[ (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N) P_{u,k}(t) (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N)^T + \right. \\
 &+ \bar{K}_k(t) (C_N - C_N A_N) P_{x,k}(t) (C_N - C_N A_N)^T \bar{K}_k(t)^T + \\
 &+ \left. \bar{K}_k(t) (C_N S_w C_N^T + 2S_v) \bar{K}_k(t) + B_N P_{u,k} B_N^T + A_N P_{x,k} A_N^T + S_w \right].
 \end{aligned}$$

Матрицы усиления  $K_{1,k}(t)$  и  $K_{2,k}(t)$ , минимизирующие след  $P^+$ , определяются соотношением

$$(2.12) \quad K_k(t) = \begin{bmatrix} K_{1,k}(t) & K_{2,k}(t) \end{bmatrix} = H_k(t) M_k(t)^{-1},$$

где

$$\begin{aligned}
 M_k(t) &= \begin{bmatrix} M_{11,k}(t) & M_{12,k}(t) \\ M_{12,k}^T(t) & M_{22,k}(t) \end{bmatrix}, \quad H_k(t) = \begin{bmatrix} H_{1,k}(t) & H_{2,k}(t) \end{bmatrix}, \\
 M_{11,k}(t) &= \sum_{i=1}^N g_i^2 C B P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N g_i^2 (C - CA) P_{x,k}^{(i,i)}(t) (C - CA)^T + \sum_{i=1}^N g_i^2 \left( C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right), \\
 M_{12,k}(t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(j,i)}(t) (C - CA)^T + \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left( C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right), \\
 (2.13) \quad M_{21,k}(t) &= M_{12,k}^T(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(j,i)}(t) B^T C^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(j,i)}(t) (C - CA)^T + \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left( C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right), \\
 M_{22}(t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} C B P_{u,k}^{(m,j)}(t) B^T C^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} (C - CA) P_{x,k}^{(m,j)}(t) (C - CA)^T + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij}^2 \left( C S_w^{(j)} C^T + 2S_v^{(j)} \right),
 \end{aligned}$$

$$H_{1,k}(t) = \sum_{i=1}^N g_i P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T, \quad H_{2,k}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij} P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T.$$

Детали вычислений даны в Приложении.

Ковариационные матрицы ошибок вектора состояния и вектора входных переменных определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} P_{x,k}(t+1) &= E \left[ \delta x_k(t+1) \delta x_k(t+1)^T \right] = \\ &= A_N P_{x,k}(t) A_N^T + B_N P_{u,k}(t) B_N^T + S_w, \\ P_{u,k+1}(t) &= E \left[ \delta u_{k+1}(t) \delta u_{k+1}(t)^T \right] = \\ &= (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N) P_{u,k}(t) (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N)^T + \\ &+ \bar{K}_k(t) \left( (C_N - C_N A_N) P_{x,k}(t) (C_N - C_N A_N)^T + C_N S_w C_N^T + 2S_v \right) \bar{K}_k(t)^T. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $y_{ref}(t)$ ,  $u_0(t)$ ,  $x_k(0)$ ,  $P_{u,0}(t)$ ,  $P_{x,k}(0)$ ,  $S_w$  и  $S_v$  известны и задано время функционирования системы, определяемое продолжительностью одного повторения  $T$  и числом повторений  $k_{fin}$ , сетевой алгоритм на основе минимизации отклонений от эталонной модели можно представить в следующем виде.

*Алгоритм 1.*

1. Задать  $k = 0$ .
2. Для  $t \in [0, T]$  вычислить:

$$\begin{aligned} x_k(t+1) &= A_N x_k(t) + B_N u_k(t) + w_k(t), \\ y_{v,k}(t) &= C_N x_k(t) + v_k(t), \\ e_{v,k}(t) &= y_{ref,N}(t) - y_{v,k}(t), \\ P_{x,k}(t+1) &= A_N P_{x,k}(t) A_N^T + B_N P_{u,k}(t) B_N^T + S_w, \\ K_k(t) &= H_k(t) M_k(t)^{-1}, \\ y_{v,k}(t+1) &= C_N x_k(t+1) + v_k(t+1), \\ e_{v,k}(t+1) &= y_{ref,N}(t+1) - y_{v,k}(t+1), \\ u_{k+1}(t) &= u_k(t) + \bar{K}_k(t) (e_{v,k}(t+1) - e_{v,k}(t)), \\ P_{u,k+1}(t) &= (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N) P_{u,k}(t) (I - \bar{K}_k(t) C_N B_N)^T + \\ &+ \bar{K}_k(t) \left( (C_N - C_N A_N) P_{x,k}(t) (C_N - C_N A_N)^T + C_N S_w C_N^T + 2S_v \right) \bar{K}_k(t)^T. \end{aligned}$$

3. Увеличить  $k$  на единицу.

4. Если  $k < k_{fin}$ , то вернуться к шагу 2, иначе вычисления закончить.

Сходимость алгоритма доказывается по аналогии с [16] и в данной работе в силу ограниченного объема не приводится.

### 3. Сетевое управление с итеративным обучением на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова

Как можно было заметить, сетевой алгоритм полученный в предыдущем разделе, обладает следующими недостатками. Во-первых, в данном алгоритме в вычислениях непосредственно используются сигналы, измеряемые с шумами без применения фильтра, во-вторых, в протоколе (2.2) используется дискретный аналог производной от ошибки обучения, что, как известно, приводит к эффекту усиления возмущений. В данном разделе приведем подход к УИО стохастическими сетевыми системами, основанный на дивергентном методе векторной функции Ляпунова, в котором попытаемся устранить указанные недостатки.

#### 3.1. Постановка задачи

Постановка задачи предполагает непосредственное использование желаемой траектории без рассмотрения вспомогательной системы (2.3). Введем в рассмотрение ошибку обучения  $i$ -го агента относительно желаемой траектории:

$$e_k^{(i)}(t) = y_{ref}(t) - y_k^{(i)}(t).$$

Задача заключается в нахождении управления (протокола)  $u_k^{(i)}(t)$ , обеспечивающего для всех значений  $t \in T$  сходимость ошибки обучения:

$$(3.1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E \|e_{k+1}^{(i)}(t)\| = e_\infty,$$

при этом величина под знаком предела в левой части (3.1) должна убывать при  $k \rightarrow \infty$  не медленнее некоторой убывающей геометрической прогрессии и, кроме того,  $\lim_{k \rightarrow \infty} E \|u_k^{(i)}(t) - u_\infty(t)\| = 0$ , а  $\lim_{k \rightarrow \infty} E [\|e_k^{(i)}(t)\|^2]$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} E [\|u_k^{(i)}(t) - u_\infty(t)\|^2]$  ограничены. Здесь  $u_\infty(t)$  — ограниченная переменная, часто называемая обученным управлением,  $e_\infty$  — ограниченная величина, характеризующая предельное среднее значение ошибки обучения. Протокол для системы (2.1) будем формировать в виде

$$(3.2) \quad u_{k+1}^{(i)}(t) = u_k^{(i)}(t) + \Delta u_{k+1}^{(i)}(t),$$

где  $\Delta u_{k+1}^{(i)}(t)$  — корректирующая добавка к управлению  $i$ -й системы на  $k$ -й итерации, которую зададим соотношением

$$(3.3) \quad \Delta u_{k+1}^{(i)}(t) = K_1 \left[ \hat{x}_{k+1}^{(i)}(t) - \hat{x}_k^{(i)}(t) \right] + K_2 \left[ \sum_{j \in N_i} d_{ij} \left( \hat{y}_k^{(j)}(t+1) - \hat{y}_k^{(i)}(t+1) \right) + g_i \left( y_{ref}(t+1) - \hat{y}_k^{(i)}(t+1) \right) \right],$$

где  $K_1$  и  $K_2$  — матрицы протокола, а  $\hat{x}_k^{(i)}(t)$  и  $\hat{y}_k^{(i)}(t)$  — соответственно оценка вектора состояния и оценка выходного сигнала  $i$ -го агента, полученные с помощью фильтра Калмана

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^{(i)}(t+1) &= A\hat{x}_k^{(i)}(t) + Bu_k^{(i)}(t) + F^{(i)} \left[ y_{v,k}^{(i)}(t) - C\hat{x}_k^{(i)}(t) \right], \\ \hat{y}_k^{(i)}(t) &= C\hat{x}_k^{(i)}(t), \quad \hat{x}_k(0) = Fy_{v,k}^{(i)}(0),\end{aligned}$$

где  $F^{(i)} = AS^{(i)}C^T \left[ CS^{(i)}C^T + S_v^{(i)} \right]^{-1}$ , а  $S^{(i)}$  является решением алгебраического уравнения Риккати

$$S^{(i)} = AS^{(i)}A^T - AS^{(i)}C^T \left[ CS^{(i)}C^T + S_v^{(i)} \right]^{-1} CS^{(i)}A^T + S_w^{(i)}.$$

Ошибка оценивания определяется выражением

$$\tilde{x}_k^{(i)}(t) = x_k^{(i)}(t) - \hat{x}_k^{(i)}(t).$$

*Замечание 1.* В отличие от управления с обратной связью для управления с итеративным обучением синтезу подлежит корректирующая поправка  $\Delta u_{k+1}(t)$ , которая может синтезироваться как обычное управление с обратной связью для вводимой в рассмотрение вспомогательной 2D-системы относительно приращений переменных. Этот подход будет использован далее. В связи с этим возникает естественный вопрос о непосредственном построении управления с обратной связью, решающего поставленную задачу, который обсуждался в [6] и более детально в [38–40]. Управления, формируемые по протоколам (3.2), (3.3), и (2.2) относятся к так называемым не причинным управлениям, характерным признаком которых является то, что  $u_{k+1}(p)$  зависит от  $e_k(h)$  или  $\hat{e}_k(h)$ , где  $h > p$ . Непричинные законы управления с упреждением реагируют на повторяющиеся помехи. За исключением особых случаев, не существует эквивалентного регулятора с обратной связью, который может обеспечить такое же качество управления, как и не причинное управление с итеративным обучением, поскольку управление с обратной связью реагирует на текущие ошибки и не обладает свойством упреждения. Очевидным недостатком управления, формируемого по протоколу (2.2), является то, что в нем используются приращения выходного сигнала с шумом измерения. Это приводит к дополнительному увеличению дисперсии ошибки обучения, что убедительно подтверждает приводимый далее пример.

### 3.2. Построение 2D-модели

Введем вспомогательные переменные, имеющие смысл приращений оценки и ошибки оценивания за один шаг по переменной  $k$ ,

$$(3.4) \quad \hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) = \hat{x}_{k+1}^{(i)}(t) - \hat{x}_k^{(i)}(t), \quad \tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) = \tilde{x}_{k+1}^{(i)}(t) - \tilde{x}_k^{(i)}(t)$$

и ошибку обучения относительно оценки выходного сигнала

$$(3.5) \quad \hat{e}_k^{(i)}(t) = y_{ref}(t) - \hat{y}_k^{(i)}(t).$$

Перепишем (3.4) и (3.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) &= (A - F^{(i)}C)\tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + \Delta w_{k+1}^{(i)}(t-1) - F^{(i)}\Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1), \\
 \hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) &= F^{(i)}C\tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + A\hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + B\Delta u_{k+1}^{(i)}(t-1) + \\
 (3.6) \quad &+ F^{(i)}\Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1), \\
 \hat{e}_{k+1}^{(i)}(t) &= -CF^{(i)}C\tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) - CA\hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + \hat{e}_k^{(i)}(t) - \\
 &- CB\Delta u_{k+1}^{(i)}(t-1) - CF^{(i)}\Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1),
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta w_{k+1}^{(i)}(t-1) = w_{k+1}^{(i)}(t-1) - w_k^{(i)}(t-1), \quad \Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1) = v_{k+1}^{(i)}(t-1) - v_k^{(i)}(t-1).$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) &= \left[ \tilde{\eta}_{k+1}^{(i)}(t)^\top \quad \hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t)^\top \right]^\top, \quad \bar{u}_{k+1}^{(i)}(t) = \Delta u_{k+1}^{(i)}(t-1), \\
 \bar{w}_{k+1}^{(i)}(t) &= \left[ \Delta w_{k+1}^{(i)}(t-1)^\top \quad \Delta v_{k+1}^{(i)}(t-1)^\top \right]^\top,
 \end{aligned}$$

и запишем (3.6) в стандартной форме дискретного повторяющегося процесса, представляющего собой одну из разновидностей 2D-моделей [37]:

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad \bar{\eta}_{k+1}^{(i)}(t+1) &= A_{11}^{(i)}\bar{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + A_{12}\hat{e}_k^{(i)}(t) + B_1\bar{u}_{k+1}^{(i)}(t) + D_1^{(i)}\bar{w}_{k+1}^{(i)}(t), \\
 \hat{e}_{k+1}^{(i)}(t) &= A_{21}^{(i)}\bar{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + A_{22}\hat{e}_k^{(i)}(t) + B_2\bar{u}_{k+1}^{(i)}(t) + D_2^{(i)}\bar{w}_{k+1}^{(i)}(t),
 \end{aligned}$$

где  $A_{11}^{(i)} = \begin{bmatrix} A - F^{(i)}C & 0 \\ F^{(i)}C & A \end{bmatrix}$ ,  $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}$ ,  $D_1^{(i)} = \begin{bmatrix} I & -F^{(i)} \\ 0 & F^{(i)} \end{bmatrix}$ ,  $A_{12} = 0$ ,  $A_{22} = I$ ,  $A_{21}^{(i)} = [-CF^{(i)}C \quad -CA]$ ,  $B_2 = -CB$ ,  $D_2^{(i)} = [0 \quad -CF^{(i)}]$ .

Выразим корректирующую поправку (3.3) в момент  $t-1$  в терминах переменных  $\hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t)$  и  $\hat{e}_k^{(i)}(t)$ :

$$(3.8) \quad \Delta u_{k+1}^{(i)}(t-1) = K_1\hat{\eta}_{k+1}^{(i)}(t) + K_2 \left[ \sum_{j \in N_i} d_{ij} \left( \hat{e}_k^{(i)}(t) - \hat{e}_k^{(j)}(t) \right) + g_i \hat{e}_k^{(i)}(t) \right].$$

Тогда, вводя расширенные векторы

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}_k(t) &= \left[ \bar{\eta}_k^{(1)}(t)^\top \quad \dots \quad \bar{\eta}_k^{(N)}(t)^\top \right]^\top, \\
 \hat{e}_k(t) &= \left[ \hat{e}_k^{(1)}(t)^\top \quad \dots \quad \hat{e}_k^{(N)}(t)^\top \right]^\top, \\
 \bar{w}_k(t) &= \left[ \bar{w}_k^{(1)}(t)^\top \quad \dots \quad \bar{w}_k^{(N)}(t)^\top \right]^\top,
 \end{aligned}$$

окончательно запишем сетевую 2D-модель в виде

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \bar{\eta}_{k+1}(t+1) &= \Phi_{11}\bar{\eta}_{k+1}(t) + \Phi_{12}\hat{e}_k(t) + D_1\bar{w}_{k+1}(t), \\ \hat{e}_{k+1}(t) &= \Phi_{21}\bar{\eta}_{k+1}(t) + \Phi_{22}\hat{e}_k(t) + D_2\bar{w}_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где  $\Phi_{11} = \text{diag}[(A_{11}^{(1)} + B_1K_1H) \dots (A_{11}^{(N)} + B_1K_1H)]$ ,  $\Phi_{12} = (L + G) \otimes BK_2$ ,  $\Phi_{21} = \text{diag}[(A_{21}^{(1)} + B_2K_1H) \dots (A_{21}^{(N)} + B_2K_1H)]$ ,  $\Phi_{22} = I_N \otimes I_r - (L + G) \otimes CBK_2$ ,  $D_1 = \text{diag}[D_1^{(1)} \dots D_1^{(N)}]$ ,  $D_2 = \text{diag}[D_2^{(1)} \dots D_2^{(N)}]$ ,  $H = [0 \ I]$ .

### 3.3. Решение задачи

Для решения воспользуемся дивергентным методом векторных функций Ляпунова [23]. Введем следующее определение устойчивости.

*Определение 1.* Дискретный повторяющийся процесс (3.9) называется устойчивым по второму моменту вдоль повторений, если для всех  $t \in [0, T]$

$$(3.10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E [|\bar{\eta}_k(t)|^2 + |\hat{e}_k(t)|^2] \leq \Lambda < \infty,$$

где  $\Lambda$  не зависит от  $T$ .

Введем в рассмотрение векторную функцию Ляпунова

$$(3.11) \quad V(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_1(\xi) \\ V_2(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n_x}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^{n_y},$$

где  $V_1(\xi) > 0$ ,  $\xi \neq 0$ ,  $V_2(\epsilon) > 0$ ,  $\epsilon \neq 0$ ,  $V_1(0) = 0$ ,  $V_2(0) = 0$ .

Стохастический аналог дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (3.9) запишется в виде

$$\begin{aligned} DV(\xi, \epsilon) &= E[V_1(\bar{\eta}_{k+1}(t+1)) | \bar{\eta}_{k+1}(t) = \xi, \hat{e}_k(t) = \epsilon] - V_1(\xi) \\ &+ E[V_2(\hat{e}_{k+1}(t)) | \bar{\eta}_{k+1}(t) = \xi, \hat{e}_k(t) = \epsilon] - V_2(\epsilon). \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

*Теорема 1* [23]. Предположим что существуют функция  $V(\xi, \epsilon)$  вида (3.11) и положительные постоянные  $c_1, c_2, c_3$  и  $\lambda$ , удовлетворяющие следующим неравенствам вдоль траекторий системы (3.9):

$$\begin{aligned} c_1\|\xi\|^2 &\leq V_1(\xi) \leq c_2\|\xi\|^2, \\ c_1\|\epsilon\|^2 &\leq V_2(\epsilon) \leq c_2\|\epsilon\|^2, \\ DV(\xi, \epsilon) &\leq \lambda - c_3(\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2). \end{aligned}$$

Тогда повторяющийся процесс (3.9) является устойчивым по второму моменту вдоль повторений. При этом величина под знаком предела в левой части (3.10) убывает при  $k \rightarrow \infty$  не медленнее некоторой убывающей геометрической прогрессии.

В силу очевидного соотношения  $(E[|\hat{e}_k(t)|])^2 \leq E[|\hat{e}_k(t)|^2]$  и того факта, что по определению  $e_k^{(i)}(t) = \hat{e}_k^{(i)}(t) + C\tilde{x}_k^{(i)}(t)$ , при условиях теоремы 1 будет выполнено условие сходимости ошибки обучения (3.1), и задача сводится к построению векторной функции Ляпунова (3.11). Поскольку система (3.9) линейна, подходящим может служить выбор компонент этой функции в виде квадратичных форм

$$(3.12) \quad V_1(\bar{\eta}_{k+1}(t)) = \bar{\eta}_{k+1}^T(t) \bar{P}_1 \bar{\eta}_{k+1}(t), \quad V_2(\hat{e}_k(t)) = \hat{e}_k^T(t) \bar{P}_2 \hat{e}_k(t),$$

где  $\bar{P}_1 = I_N \otimes P_1$ ,  $\bar{P}_2 = I_N \otimes P_2$ . Вычисляя дивергенцию функции (3.11) с учетом (3.12), получим

$$(3.13) \quad DV(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix}^T (\Phi^T P \Phi - P) \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix} + 2(\text{tr}[\bar{P}_1 S_1] + \text{tr}[\bar{P}_2 S_2]),$$

где

$$P = \text{diag} [\bar{P}_1 \quad \bar{P}_2], \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \text{diag}[S_1^{(1)} \dots S_1^{(N)}], \quad S_2 = \text{diag}[S_2^{(1)} \dots S_2^{(N)}],$$

$$S_1^{(i)} = \begin{bmatrix} S_w^{(i)} & F^{(i)} S_v^{(i)} F^{(i)T} \\ 0 & F^{(i)} S_v^{(i)} F^{(i)T} \end{bmatrix}, \quad S_2^{(i)} = C F^{(i)} S_v^{(i)} F^{(i)T} C^T.$$

В соответствии с (3.13) условия теоремы 1 будут заведомо выполнены, если потребовать выполнение следующих матричных неравенств:

$$(3.14) \quad \Phi^T P \Phi - P + Q + K^T \bar{R} K \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

где  $Q = \text{diag} [\bar{Q}_1 \quad \bar{Q}_2]$ ,  $\bar{R} = I_N \otimes R$ ,  $K = [\bar{K}_1 \quad \bar{K}_2]$ ,  $\bar{K}_1 = I_N \otimes K_1 H$ ,  $\bar{K}_2 = I_N \otimes K_2$ . Матрицы  $Q$  и  $R$  здесь являются аналогами весовых матриц в задаче о линейно-квадратичном регуляторе. Соответствующим выбором этих матриц можно изменять скорость сходимости процесса обучения. Относительно переменных  $P$  и  $K$  неравенства (3.14) являются нелинейными. Сведем их к линейным с помощью эквивалентных преобразований и введения вспомогательных переменных. С этой целью перепишем (3.14) в виде

$$(3.15) \quad \begin{bmatrix} P & \Phi^T & I & K^T \\ \Phi & P^{-1} & 0 & 0 \\ I & 0 & Q^{-1} & 0 \\ K & 0 & 0 & \bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Обозначим  $X = \text{diag} [\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2] = P^{-1}$ ,  $\bar{X}_1 = I_N \otimes X_1$ ,  $\bar{X}_2 = I_N \otimes X_2$  и введем переменные  $Y_1 = K_1 Z$ ,  $Y_2 = K_2 X_2$  и переменную  $Z$  как решение линейного матричного уравнения  $H X_1 = Z H$ . Тогда, умножая (3.15) слева и справа на матрицу  $\text{diag}[X \quad I \quad I \quad I]$ , после несложных дополнительных преобразований

получим следующую систему линейных матричных неравенств относительно  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ :

$$(3.16) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{\Phi}_1 X + \bar{\Phi}_2 Y \bar{H} \bar{\Phi}_3)^T & X & \bar{H}^T Y^T \\ \bar{\Phi}_1 X + \bar{\Phi}_2 Y \bar{H} \bar{\Phi}_3 & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ Y \bar{H} & 0 & 0 & \bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\ X_1 \succ 0, \quad X_2 \succ 0, \quad H X_1 = Z H,$$

где

$$Y = [\bar{Y}_1 \quad \bar{Y}_2], \quad \bar{Y}_1 = I_N \otimes Y_1, \quad \bar{Y}_2 = I_N \otimes Y_2, \\ \bar{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \text{diag}[A_{11}^{(1)} \dots A_{11}^{(N)}] & 0 \\ \text{diag}[A_{21}^{(1)} \dots A_{21}^{(N)}] & I_N \otimes I_r \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} I_N \otimes B_1 \\ I_N \otimes B_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} I_N \otimes I_{2n} & 0 \\ 0 & (L + G) \otimes I_r \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} I_N \otimes H & 0 \\ 0 & I_N \otimes I_r \end{bmatrix}.$$

Матрицы  $K_1$  и  $K_2$  определяются из выражений

$$(3.17) \quad K_1 = Y_1 Z^{-1}, \quad K_2 = Y_2 X_2^{-1}.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

*Теорема 2. Протокол (3.2), (3.3) обеспечивает сходимость ошибки обучения в сетевой системе (2.1) в смысле условия (3.1), если система линейных матричных неравенств (3.16) разрешима. Матрицы протокола  $K_1$  и  $K_2$  определяются выражениями (3.17).*

#### 4. Пример

Рассмотрим группу из трех одинаковых манипуляторов с гибким поворотным звеном (агентов), перемещающимся в горизонтальной плоскости с постоянным периодом повторения. Динамика каждого агента в пространстве состояний описывается уравнениями [41]:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c [u(t) + w_c(t)], \\ y(t) &= C x(t) + v_c(t), \end{aligned}$$

где  $x = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$ ,  $\theta$  — угол поворота сервопривода,  $\alpha$  — угол отклонения гибкого звена манипулятора,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s (J_l + J_{eq})}{J_{eq} J_l} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$



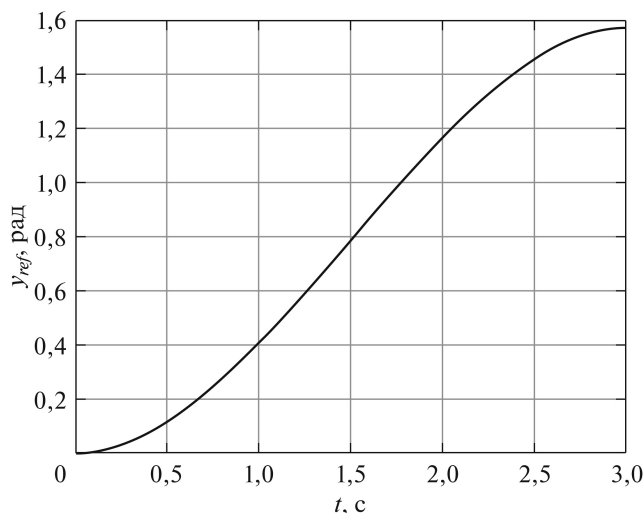


Рис. 1. Желаемая траектория.

$B_{eq}$  — коэффициент вязкого трения сервопривода,  $K_s$  — жесткость гибкого звена,  $J_l$  — момент инерции гибкого звена относительно центра масс,  $J_{eq}$  — момент инерции сервопривода,  $w_c(t)$  и  $v_c(t)$  — гауссовские белые шумы с интенсивностями  $W_c$  и  $V_c$ . Предполагая, что управление формируется компьютером с периодом дискретности  $T_s$ , перейдем к эквивалентной дискретной модели, в которой учтем, что система функционирует в повторяющемся режиме:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x_k[(p+1)T_s] &= Ax_k[pT_s] + Bu_k[pT_s] + w_k[pT_s], \\ y_k[pT_s] &= Cx_k[pT_s] + v_k[pT_s], \quad k = 0, 1, \dots, \quad p = 0, 1, \dots, T, \end{aligned}$$

где  $A = \exp(A_c T_s)$ ,  $B = \int_0^{T_s} \exp(A_c \tau) B_c d\tau$ ,  $w(pT_s)$  — дискретный гауссовский белый шум с ковариационной матрицей  $S_w = \int_0^{T_s} \exp(A_c \tau) B_c W_c B_c^T \exp(A_c^T \tau) d\tau$ ,  $v(pT_s)$  — дискретный гауссовский белый шум с дисперсией  $S_v = V_c / T_s$ . Модель (4.2) соответствует (2.1) для  $t = pT_s$ . Для расчетов и моделирования были приняты следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} B_{eq} &= 0,004 \text{ Н} \cdot \text{м}/(\text{рад}/\text{с}), \quad K_s = 1,3 \text{ Н} \cdot \text{м}/\text{рад}, \\ J_l &= 0,0038 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_{eq} = 2,08 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad T_s = 0,01 \text{ с}. \end{aligned}$$

Продолжительность цикла повторения 3 с, что при выбранном периоде дискретности соответствует  $T = 300$ , и число повторений  $k_{fin} = 100$ . Желаемая траектория движения звена описывается уравнением

$$y_{ref}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, \quad t \in [0, T],$$

график этой траектории представлен на рис. 1. Рассмотрим случай, когда информация об этой траектории доступна лишь одному из агентов (лидеру), остальные последовательно получают информацию один от другого (ведомые). Ограничимся анализом скорости сходимости процессов обучения, для

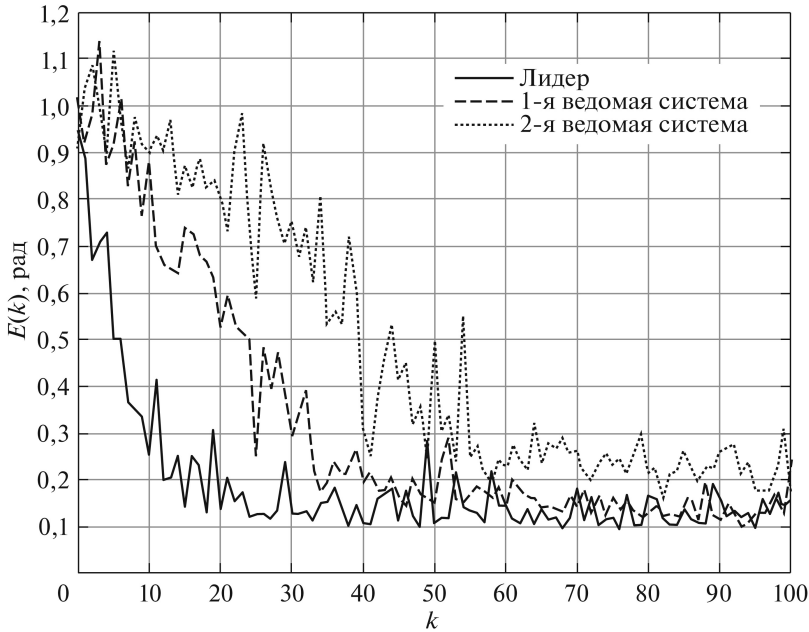


Рис. 2. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения для алгоритма 1.

этого введем выборочное среднеквадратическое отклонение ошибки обучения

$$(4.3) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{p=0}^T \|\hat{e}_k(p)\|^2}.$$

В этом случае для простоты будем считать, что интенсивности шумов, действующих на агентов, и шумов измерений одинаковы, т.е.  $W_c^{(i)} = W_c = 10^{-6}$ ,  $V_c^{(i)} = V_c = 10^{-4}$ . Применим алгоритм 1. В этом алгоритме нет параметров, кроме начальных условий, за счет которых можно изменять скорость сходимости процессов обучения. Случайной выборкой в классе диагональных матриц было получено, что наилучшую скорость сходимости обеспечивает выбор  $P_{u,0}(t) = 10^{-1}$ ,  $P_{x,k}(0) = 10^{-1}I_n$ . Траектории изменения выборочных среднеквадратических отклонений ошибки обучения представлены на рис. 2.

Результаты применения алгоритма на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова при выборе весовых матриц в виде

$$Q_1 = \text{diag}[10^{-4} \ 10^3 \ 10^2 \ 10^{-4} \ 10^{-4} \ 10^3 \ 10^2 \ 10^{-4}], \quad Q_2 = 10^6, \quad R = 10$$

представлены на рис. 3. При этом

$$K_1 = [-28,1215 \ -1,2892 \ -0,3488 \ -0,0063], \quad K_2 = 14,2217.$$

Выбор весовых матриц основан на анализе физического смысла переменных состояния: величина отклонения от желаемой траектории, угол отклонения гибкого звена и угловая скорость сервомотора должны оказывать наибольшее влияние на скорость процесса обучения. На рис. 4-6 траектории изменения

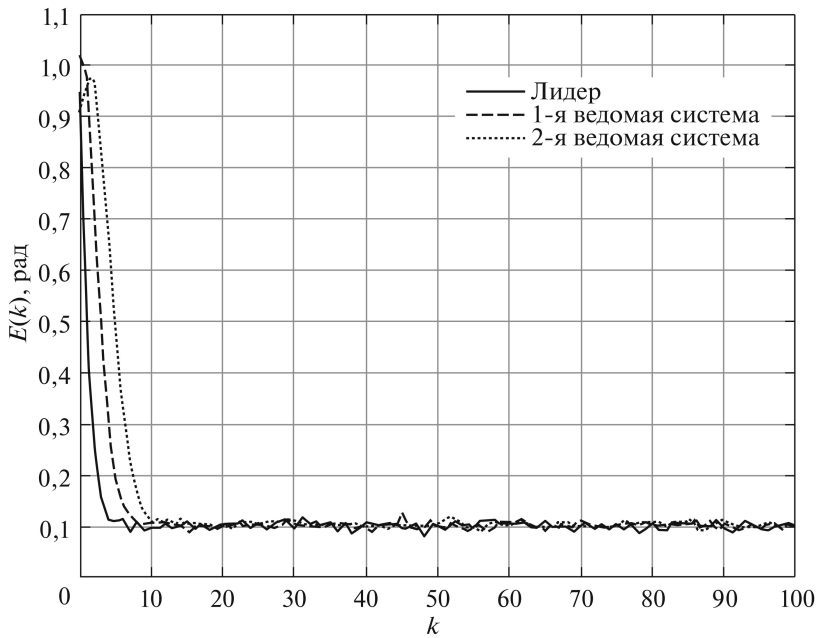


Рис. 3. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения для дивергентного метода ВФЛ.

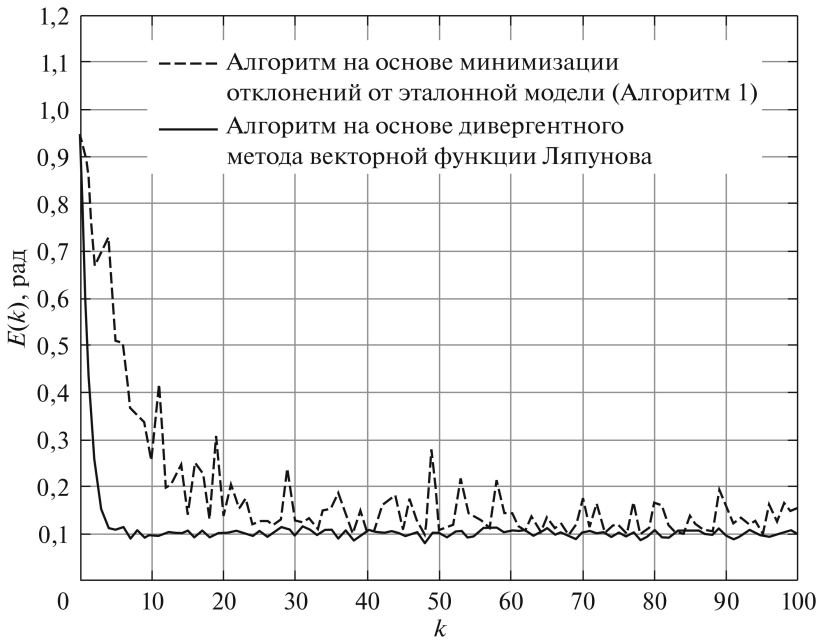


Рис. 4. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения лидера для двух методов.



Рис. 5. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения первого ведомого агента для двух методов.

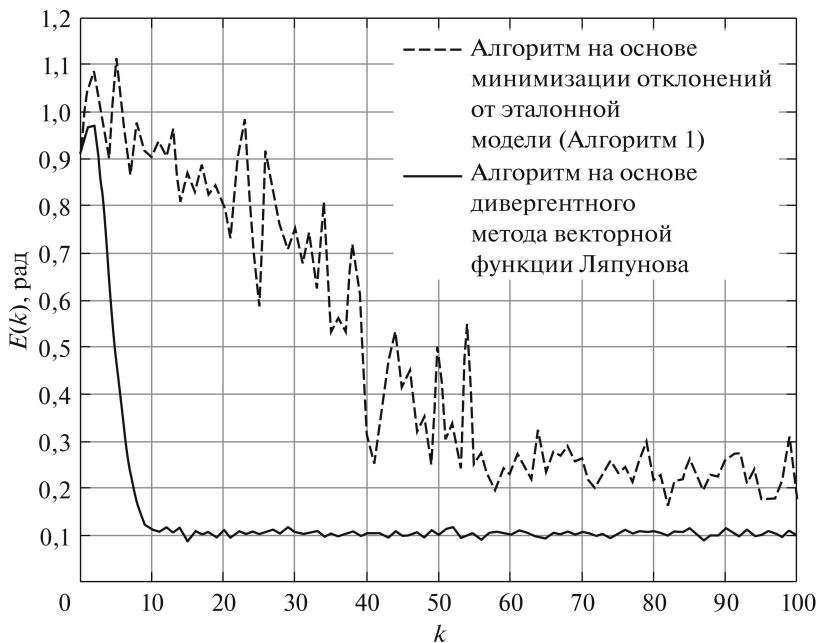


Рис. 6. Выборочные среднеквадратичные отклонения ошибки обучения второго ведомого агента для двух методов.

выборочных среднеквадратических отклонений ошибки обучения для двух методов представлены в сравнении.

Приведенный пример подтверждает недостатки алгоритма УИО на основе минимизации отклонений от эталонной модели. При использовании этого алгоритма ошибка обучения лидера сходится в среднем в 5–6 раз медленнее, а для последнего ведомого агента более чем в 10 раз медленнее, чем при использовании алгоритма на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова. Кроме того, поскольку в первом случае не используется фильтрация, выборочные траектории среднеквадратической ошибки обучения существенно отличаются от монотонных, особенно для последнего ведомого агента, что является весьма нежелательным эффектом в процессе обучения.

## 5. Заключение

Алгоритмы Р-типа, предложенные в [18, 19], как и алгоритм [16] не используют фильтрацию и, очевидно, не могут существенно улучшить свойства процесса обучения относительно алгоритма из [16]. Кроме того, в алгоритмах, предложенных в [16, 18, 19], скорость сходимости процессов обучения можно изменять лишь изменением начальных значений ковариационных матриц, что приводит к дополнительному разбросу значений выборочных траекторий ошибки обучения. С другой стороны, при использовании фильтра, очевидно существуют ограничения на продолжительность отдельного повторения, определяемого величиной  $T$ . При малых  $T$  на ошибку обучения будет существенно влиять ошибка оценивания. Этот вопрос является предметом отдельного дальнейшего исследования.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы найти матрицы усиления  $K_{1,k}(t)$  и  $K_{2,k}(t)$  минимизирующие след  $P^+$ , вычислим частные производные (2.11) относительно  $K_{1,k}(t)$  и  $K_{2,k}(t)$  и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr} [P^+]}{\partial K_{1,k}(t)} = & -2 \sum_{i=1}^N g_i P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T + 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i^2 C B P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T + \\ & + 2K_{2,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(j,i)}(t) B^T C^T + \\ & + 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i^2 (C - CA) P_{x,k}^{(i,i)}(t) (C - CA)^T + \\ & + 2K_{2,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(j,i)}(t) (C - CA)^T + \\ & + 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i^2 (CS_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)}) + 2K_{2,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} (CS_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{tr} [P^+]}{\partial K_{2,k}(t)} &= -2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij} P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T + \\
&+ 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T + \\
&+ 2K_{2,k}(t) \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} C B P_{u,k}^{(m,j)}(t) B^T C^T + \\
&+ 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(i,j)}(t) (C - CA)^T + \\
&+ 2K_{2,k}(t) \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} (C - CA) P_{x,k}^{(m,j)}(t) (C - CA)^T + \\
&+ 2K_{1,k}(t) \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left( C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right) + 2K_{2,k}(t) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij}^2 \left( C S_w^{(j)} C^T + 2S_v^{(j)} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые в правых частях следующим образом:

$$\begin{aligned}
(\text{II.1}) \quad K_{1,k}(t) &\left( \sum_{i=1}^N g_i^2 C B P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T + \sum_{i=1}^N g_i^2 (C - CA) P_{x,k}^{(i,i)}(t) (C - CA)^T + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^N g_i^2 \left( C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right) \left. \right) + K_{2,k}(t) \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(j,i)}(t) B^T C^T + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(j,i)}(t) (C - CA)^T + \\
&+ \left. \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left( C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right) \right) = \sum_{i=1}^N g_i P_{u,k}^{(i,i)}(t) B^T C^T, \\
&K_{1,k}(t) \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} C B P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T + \right. \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i l_{ij} (C - CA) P_{x,k}^{(i,j)}(t) (C - CA)^T + \left. \sum_{i=1}^N g_i l_{ii} \left( C S_w^{(i)} C^T + 2S_v^{(i)} \right) \right) + \\
&+ K_{2,k}(t) \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} C B P_{u,k}^{(m,j)}(t) B^T C^T + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N l_{ij} l_{im} (C - CA) P_{x,k}^{(m,j)}(t) (C - CA)^T + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij}^2 \left( C S_w^{(j)} C^T + 2 S_v^{(j)} \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N l_{ij} P_{u,k}^{(i,j)}(t) B^T C^T.$$

С учетом этих соотношений и обозначений (2.13) перепишем систему (II.1) в виде

$$K_k(t) M_k(t) = H_k(t),$$

где

$$K_k(t) = \begin{bmatrix} K_{1,k}(t) & K_{2,k}(t) \end{bmatrix},$$

откуда следует (2.12).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Garden M.* Learning Control of Actuators in Control Systems. U.S. Patent 3555252, 1971.
2. *Uchiyama M.* Formulation of High-Speed Motion Pattern of a Mechanical Arm by Trial // Trans. SICE (Soc. Instrum. Contr. Eng.) 1978. V. 14. No. 6. P. 706–712 (in Japanese).
3. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Dynamic Systems by Learning: A New Control Theory for Servomechanism or Mechatronic Systems // Proc. 23rd Conf. Decicion Contr. Las Vegas. NV. 1984. P. 1064–1069.
4. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // J. Robot. Syst. 1984. V. 1. P. 123–140.
5. *Craig J.J.* Adaptive Control of Manipulators through Repeated Trials // Proc. Amer. Contr. Conf. 1984. P. 1566–1573.
6. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // IEEE Control Syst. Magaz. 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
7. *Ahn H.-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Survey and Categorization // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
8. *Wang Y., Gao F., Doyle F.J. III* Survey on Iterative Learning Control, Repetitive Control and Run-to-Run Control // J. Process Control. 2009. V. 19. No. 10. P. 1589–1600.
9. *Ahn H.-S., Moore K.L., Chen Y.Q.* Iterative Learning Control. Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems. London: Springer-Verlag, 2007.
10. *Hoelzle D.J., Alleyne A.G., Johnson A.J.W.* Iterative Learning Control for Robotic Deposition using Machine Vision // Amer. Control Conf., Washington, USA, 2008. P. 4541–4547.
11. *Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P.* Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // Control Engineer. Practice. 2010. V. 18. P. 339–348.
12. *Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burrige J.H., Meadmore K.L.* Iterative Learning Control in Health Care. Electrical Stimulation and Robotic-Assisted Upper-Limb Stroke Rehabilitation // IEEE Control Syst. Magaz. 2012. V. 32. No. 2. P. 18–43.

13. *Sammons P.M., Gegel M.L., Bristow D.A., Landers R.G.* Repetitive Process Control of Additive Manufacturing with Application to Laser Metal Deposition // IEEE Transact. Control Syst. Technol. 2019. V. 27. No. 2. P. 566–575.
14. *Shen D., Wang Y.* Survey on Stochastic Iterative Learning Control // J. Proc. Control. 2014. V. 24. P. 64–77.
15. *Shen D.* A Technical Overview of Recent Progresses on Stochastic Iterative Learning Control // Unmanned Syst. 2018. V. 6. No. 3. P. 147–164.
16. *Saab S.S.* A Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 6. P. 877–887.
17. *Saab S.S.* On a Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 8. P. 1333–1336.
18. *Saab S.S.* Stochastic P-type/D-type Iterative Learning Control Algorithms // Int. J. Control. 2003. V. 76. No. 2. P. 139–148.
19. *Saab S.S.* A Stochastic Iterative Learning Control Algorithm with Application to an Induction Motor // Int. J. Control. 2004. V. 77. No. 2. P. 144–163.
20. *Saab S.S.* Optimal Selection of the Forgetting Matrix into an Iterative Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. V. 50. No. 12. P. 2039–2043.
21. *Saab S.S.* Optimality of First-Order ILC among Higher Order ILC // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. V. 51. No. 8. P. 1332–1336.
22. *Oh S-K, Lee J.M.* Stochastic Iterative Learning Control for Discrete Linear Time-Invariant System with Batch-Varying Reference Trajectories // J. Proc. Control. 2015. V. 36. P. 64–78.
23. *Pakshin P., Emelianova J., Galkowski K., Rogers E.* Iterative Learning Control Design for Discrete Stochastic Linear Systems // Proc. 2019 Eur. Control Conf. June 25–28, 2019, Napoli, Italy, 2019. P. 3776–3771.
24. *Ahn Hyo-Sung, Chen YangQuan.* Iterative Learning Control for Multi-Agent Formation // Proc. ICROS–SICE Int. Joint Conf. Fukuoka Int. Congr. Center. Japan. 2009. P. 3111–3116.
25. *Liu Qing, Bristow D.A.* An Iteration-Domain Filter for Controlling Transient Growth in Iterative Learning Control // Proc. 2010 Amer. Control Conf. Baltimore, MD. 2010. P. 2039–2044.
26. *Liu Yang, Jia Yingmin.* An Iterative Learning Approach to Formation Control of Multi-agent Systems // Syst. Control Lett. 2012. V. 61. P. 148–154.
27. *Yang Shiping, Xu Jian-Xin, Huang Deqing.* Iterative Learning Control for Multi-Agent Systems Consensus Tracking // Proc. 51st IEEE Conf. Decision Control. Maui, Hawaii. 2012. P. 4672–4677.
28. *Yang Shiping, Xu Jian-Xin, Miao Yu.* An Iterative Learning Control Approach for Synchronization of Multi-agent Systems under Iteration-varying Graph // Proc. 52nd IEEE Conf. Decision Control. Florence, Italy. 2013. P. 6682–6687.
29. *Meng Deyuan, Jia Yingmin, Du Junping, Zhang Jun.* On Iterative Learning Algorithms for the Formation Control of Nonlinear Multi-agent Systems // Automatica. 2014. V. 50. P. 291–295.
30. *Пакшин П.В., Емельянова Ю.П., Емельянов М.А.* Синтез управления с итеративным обучением мультиагентными системами на основе 2D-моделей // АИТ. 2018. № 6. С. 99–118.  
*Pakshin P.V., Emelianova J.P., Emelianov M.A.* Iterative Learning Control Design for Multiagent Systems Based on 2D Models // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1040–1056.



31. *Shen D., Wang Y.* ILC for Networked Nonlinear Systems with Unknown Control Direction through Random Lossy Channel // *Syst. Control Lett.* 2015. V. 77. P. 30–39.
32. *Shen D., Wang Y.* Iterative Learning Control for Networked Stochastic Systems with Random Packet Losses // *Int. J. Control.* 2015. V. 88. No. 5. P. 959–968.
33. *Xuhui B., Zhongsheng H., Shangtai J., Ronghu C.* An Iterative Learning Control Design Approach for Networked Control Systems with Data Dropouts // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2016. V. 26. No. 1. P. 91–109.
34. *Liu J., Ruan X.* Networked Iterative Learning Control Design for Discrete-Time Systems with Stochastic Communication delay in Input and Output Channels // *Int. J. Syst. Sci.* 2017. V. 48. No. 9. P. 1844–1855.
35. *Liu J., Ruan X.* Networked Iterative Learning Control Design for Nonlinear Systems with Stochastic Output Packet Dropouts // *Asian J. Control.* 2018. V. 20. No. 3. P. 1077–1087.
36. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton and Oxford: Princeton Univer. Press, 2010. 402 p.
37. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes. V. 349 / *Lect. Notes Control Inform. Sci.* Berlin: Springer-Verlag, 2007.
38. *Goldsmith P.B.* On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control // *Automatica.* 2002. V. 38. No. 4. P. 703–708.
39. *Goldsmith P.B.* Author’s reply to “On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control” // *Automatica.* 2004. V. 40. No. 5. P. 899–900.
40. *Owens D.H., Rogers E.* Comments on “On the Equivalence of Causal LTI Iterative Learning Control and Feedback Control” // *Automatica.* 2004. V. 40. No. 5. P. 895–898.
41. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.

*Статъя представена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.*

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 12.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019