Автоматика и телемеханика, № 3, 2020

© 2020 г. Е.Я. РУБИНОВИЧ, д-р техн. наук (rubinvch@ipu.rssi.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О ПРОГРАММНОСТИ ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ НАБЛЮДЕНИЯМИ ЗА ПОДВИЖНОЙ ЦЕЛЬЮ[1]

В непрерывном времени рассматривается гауссовская линейно-квадратичная задача управления по неполным данным стохастическим объектом (целью) со стороны подвижного наблюдателя с нелинейной динамикой. Специфика постановки состоит в том, что уравнение стохастической динамики объекта наблюдения и собственно уравнения наблюдений зависят от вектора текущего состояния наблюдателя. Цель управления наблюдателем — выбор рациональной траектории его движения в смысле минимизации математического ожидания некоторого платежного функционала (платы). В подобного рода задачах оптимальное управление наблюдениями (в рассматриваемом случае — траекторией наблюдателя) обычно ищут в классе программных управлений, т.е. как функцию времени и начальных условий. Возникает естественный вопрос: что даст расширение класса программных управлений наблюдателем до класса позиционных, т.е. до класса управлений, зависящих не только от времени и начальных условий, но и от реализаций наблюдений и траектории наблюдателя к данному моменту времени. Рассматриваются два содержательных частных случая общей постановки задачи, при которых подобное расширение не улучшает качества управления. Приводятся примеры и доказательство теоремы.

Ключевые слова: гауссовская линейно-квадратичная задача управления по неполным данным, подвижный наблюдатель, управление наблюдениями.

DOI: 10.31857/S0005231020030095

1. Введение

Под управлением наблюдениями понимается управление процессом сбора информации. Как правило, получаемая информация извлекается из показаний разного рода датчиков, сенсоров, приемных устройств и каналов связи. Эти данные кроме полезного сигнала почти всегда содержат и шумовые составляющие, т.е. разного рода помехи. Выделение полезных сигналов из зашумленных называется фильтрацией, а оптимизация этого процесса — оптимальной фильтрацией. Для лучшей работы оптимальных фильтров, т.е. для более точного оценивания полезного сигнала или его функций, и применяют управление наблюдениями. Кроме того, собственно наблюдения могут иметь некоторую стоимость, связанную, например, с расходом энергоресурса. Оптимизация процесса наблюдения дает возможность, с одной стороны, собрать

[1] Опубликовать данные результаты в непрерывном времени автору рекомендовал Р.Ш. Липцер.

более “качественную” информацию, т.е. получить для последующей обработки более информативные данные, а с другой стороны — минимизировать стоимость наблюдений. Первые публикации по управлению наблюдениями появились в конце 60-х гг. XX в. [1–6]. Управление дискретно-непрерывными наблюдениями за процессами диффузионного типа впервые рассмотрено в [7], где была, в частности, показана возможность применения принципа максимума Л.С. Понтрягина в таких задачах и исследована его достаточность.

В [8] предложен метод решения задачи управления наблюдениями с обобщенными управлениями, позволяющий преобразовать такую задачу к задаче оптимизации с обычными ограниченными управлениями. Подобная ситуация может возникать, если точностные характеристики наблюдаемого процесса зависят от управлений и координат управляемого процесса, как, например, в задачах с подвижным наблюдателем [9].

Еще одно направление в управлении наблюдениями связано с задачами планирования эксперимента. Так, в [10] изучаются оптимальные стратегии размещения приемников и синхронизации движения для мобильных сенсорных сетей в приложении к задачам отслеживания целей с помощью датчиков дальности. Исследуются определители информационной матрицы Фишера в 2D и 3D случаях. Предлагаются алгоритмы координации движения, которые формируют сеть мобильных датчиков.

Численное моделирование иллюстрирует, как предлагаемые алгоритмы приводят к улучшению производительности расширенного фильтра Калмана в сценарии отслеживания целей.

Доступное для инженеров изложение теории управления наблюдениями с обширной библиографией представлено, например, в [11, 12].

Отличие рассматриваемой гауссовской линейно-квадратичной задачи (Linear Quadratic Gaussian — LQG problem) управления по неполным данным стохастическим объектом от классической постановки состоит в том, что уравнение стохастической динамики объекта наблюдения (ОН) и собственно уравнения наблюдений зависят от вектора текущего состояния подвижного наблюдателя.

Цель управления наблюдателем — выбор рациональной траектории его движения в смысле минимизации математического ожидания некоторого платежного функционала (платы).

В качестве платежного функционала рассматривается интегрально-терминальный функционал типа Больца с квадратичным интеграндом по управлению и фазовым координатам ОН и аддитивной терминальной частью, зависящей от точности оценки вектора состояния ОН, а также от состояний наблюдателя и ОН в заданный терминальный момент T.

В момент T допускается выполнение некоторых гладких терминальных условий, функционально связывающих состояние наблюдателя и точность оценивания вектора состояния ОН.

Традиционно оптимальное управление наблюдениями ищут как функцию времени и начальных условий, т.е. в классе программных управлений [1–6, 11, 12]. При этом вопрос о целесообразности расширения этого класса до класса позиционных управлений, зависящих от вектора текущего состояния ОН, остается открытым.

В статье исследуются два содержательных частных случая общей постановки задачи в непрерывном времени, при которых расширение класса программных управлений наблюдателем до класса позиционных не улучшает качества управления. Приводятся примеры и доказательство соответствующих теорем. В дискретном времени подобная постановка исследовалась в [9].

Статью предлагается рассматривать как дополнительный параграф к [11], поскольку рассмотрению вопроса программности управления наблюдениями в [11] посвящено несколько разделов. В частности, в [11] доказана программность управления составом измерений в классических LQG задачах как в дискретном, так и в непрерывном времени. Наиболее полная, известная автору, постановка подобной задачи в дискретно-непрерывном времени анонсирована в [14], однако приводимые там формулировки и доказательства рассчитаны больше на специалистов-математиков, а не на инженеров.

Актуальность и практическая значимость траекторного управления наблюдениями продемонстрирована, например, в [15, 16], где показано, что за счет выбора рациональных траекторий движения беспилотных летательных аппаратов или автономных необитаемых подводных аппаратов ошибка оценки элементов движения цели (ЭДЦ) может быть уменьшена на порядок. Физически такое значительное улучшение точности оценок ЭДЦ связано с проблемой наблюдаемости цели [17]. Оказывается, что за счет "правильного" маневра наблюдателя можно резко улучшить наблюдаемость мобильной или стационарной цели.

2. Постановка задачи

Пусть эволюция вектора состояния управляемого объекта наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением в форме Ито [11, 13]

$$d\theta_t = \big[a_0(t,x_t)v_t + a_1(t,x_t)\theta_t\big]dt + b(t,x_t)dw_1(t). \tag{2.1}$$

Наблюдению доступен вектор ξ_t, допускающий стохастический дифференциал

$$d\xi_t = \big[A_0(t,x_t) + A_1(t,x_t)\theta_t\big]dt + B(t,x_t)dw_2(t), \qquad \xi_0 = 0, \tag{2.2}$$

а вектор x_t состояния наблюдателя подчинен уравнению

$$\dot{x}_t = f(t,x_t,u_t). \tag{2.3}$$

Здесь и далее $t \in [0,T]$, T и x_0 заданы, а каждый из векторов θ_t, v_t, u_t, ξ_t, x_t, $w_1(t)$, $w_2(t)$ имеет произвольный конечный размер. Размеры матриц-коэффициентов в (2.1) и (2.2) соответствуют данным векторам. Входящие в (2.1) и (2.2) независимые стандартные винеровские процессы $w_1(t)$ и $w_2(t)$ не зависят от гауссовского вектора θ_0 с заданными $\mathbf{E}\,\theta_0 = m_0$ и $\operatorname{cov}(\theta_0,\theta_0) = \gamma_0$, где $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания. Управление u_t наблюдателя стеснено ограничением

$$u_t \in U \subset \mathbf{R}^r, \tag{2.4}$$

где U — некоторый r-мерный компакт. Предполагается, что функция $f(\cdot)$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x_t и u_t. Требуется так выбрать управление $v_t = v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ объектом и управление $u_t = u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ наблюдателем, чтобы минимизировать критерий (плату)

$$J = \mathbf{E}\left\{ g_{1T}(\theta_T, x_T, \gamma_T) + \int\limits_0^T g_t(\theta_t, v_t)dt \right\}, \tag{2.5}$$

где

$$g_{1T}(\theta_T, x_T, \gamma_T) = G(T, x_T, \gamma_T) + \theta_T^* h \theta_T,$$
$$g_t(\theta_t, v_t) = \theta_t^* H(t)\theta_t + v_t^* R(t) v_t.$$

Здесь $*$ — символ транспонирования. Заданные матрица h и борелевские по t матричные функции $H(t)$ и $R(t)$ предполагаются симметрическими и неотрицательно определенными соответствующих размеров, причем элементы матрицы $R^{-1}(t)$ равномерно ограничены. В момент T допустимо выполнение терминального условия

$$\Phi(T, x_T, \gamma_T) = 0, \tag{2.6}$$

где

$$\gamma_T = \mathbf{E}\big\{ \big[\theta_T - \mathbf{E}(\theta_T/x_0^T, \xi_0^T)\big] \big[\theta_T - \mathbf{E}(\theta_T/x_0^T, \xi_0^T)\big]^* / x_0^T, \xi_0^T \big\}.$$

Здесь через $\mathbf{E}(\cdot/x_0^T, \xi_0^T)$ обозначено условное математическое ожидание при условии $\mathcal{F}_T^{x\xi}$, где $\mathcal{F}_T^{x\xi} = \sigma\{\omega : x_s, \xi_s, \, s \leqslant T\}$ — σ-алгебра, порожденная траекториями $x_0^T = \{x_s, \, s \leqslant T\}$ и $\xi_0^T = \{\xi_s, \, s \leqslant T\}$. Функции $G(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов. Запись $v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ и $u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ свидетельствует о том, что компоненты управлений являются функционалами времени t, реализации наблюдений $\xi_0^t = \{\xi_s, \, s \leqslant t\}$ и реализовавшейся траектории наблюдателя $x_0^t = \{x_s, \, s \leqslant t\}$.

3. Вспомогательные предложения

Решению задачи предпошлем вспомогательные *предложения*, доказательства которых можно найти в [13].

1°. *Пусть* $S(t, x_t)$ — *любая из матриц-коэффициентов в* (2.1), (2.2), *тогда достаточными условиями для существования*

$$m_t = \mathbf{E}(\theta_t/x_0^t, \xi_0^t), \quad \gamma_t = \mathbf{E}\{(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^*/x_0^t, \xi_0^t\}$$

будут поэлементное выполнение неравенства

$$\mathbf{E}[S(t,x_t)S^*(t,x_t)] < \infty \tag{3.1}$$

и требование равномерной по t ограниченности матриц $S(t,x_t)$, т.е. поэлементно

$$|S_{ij}(t,x_t)| < \text{const}, \tag{3.2}$$

где x_t — любое из множества t-достижимости траектории x_0^t.

Определение. *$\mathcal{F}_t^{x\xi}$-измеримые функционалы $v(t,x_0^t,\xi_0^t)$ и $u(t,x_0^t,\xi_0^t)$ будем называть допустимыми управлениями, если $u(t,x_0^t,\xi_0^t)$ удовлетворяет ограничению (2.4), компоненты $v_j(\cdot)$ вектора $v(t,x_0^t,\xi_0^t)$ удовлетворяют неравенству*

$$\mathbf{E}\int_0^T \sum_j \left[v_j(t,x_0^t,\xi_0^t)\right]^4 dt < \infty$$

и подстановка $v(t,x_0^t,\xi_0^t)$ и $u(t,x_0^t,\xi_0^t)$ в (2.1), (2.2) не нарушает условий (3.1), (3.2).

В дальнейшем будем рассматривать только допустимые управления.

2°. *Имеет место следующее равенство условных математических ожиданий*

$$\mathbf{E}(\cdot/x_0^t,\xi_0^t) = \mathbf{E}(\cdot/x_t,\xi_0^t) = \mathbf{E}(\cdot/\xi_0^t). \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) следует из измеримости при любом t случайной величины x_t относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t^\xi$, другими словами $\mathcal{F}_t^{x\xi} = \mathcal{F}_t^\xi$.

3°. *Поскольку управления $v(t,x_0^t,\xi_0^t)$ и $u(t,x_0^t,\xi_0^t)$ являются $\mathcal{F}_t^\xi$-измеримыми функционалами, то система (2.1), (2.2) находится в рамках условно-гауссовской схемы [11, 13], а именно: условные распределения вероятностей*

$$\begin{gathered} P(\theta_t \leqslant \alpha,\, \xi_t \leqslant \beta,\, x_t \leqslant \delta/x_0^t,\xi_0^t) = P(\cdot/\xi_0^t), \\ P(\theta_t \leqslant \alpha/x_0^t,\xi_0^t) = P(\theta_t \leqslant \alpha/\xi_0^t) \end{gathered} \tag{3.4}$$

являются гауссовскими, причем параметры

$$m_t = \mathbf{E}(\theta_t/\xi_0^t), \quad \gamma_t = \mathbf{E}\big\{(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^*/\xi_0^t\big\}$$

распределения (3.4) подчинены стохастическим дифференциальным уравнениям условно-гауссовской фильтрации [11, 13] (здесь и далее аргументы в матричных коэффициентах опущены)

$$dm_t = [a_0 v_t + a_1 m_t]dt + \gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1}[d\xi_t - (A_0 + A_1 m_t)dt], \tag{3.5}$$

$$\dot\gamma_t = a_1\gamma_t + \gamma_t a_1^* + bb^* - \gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_t, \tag{3.6}$$

где $m_0 = \mathbf{E}\theta_0$, $\gamma_0 = cov(\theta_0,\theta_0)$ — заданы.

4°. *Следствием п. 3° является выполнение равенства*

$$\mathbf{E}\left\{g_t\big(\theta_t, \xi_t, x_t, v(t, x_0^t, \xi_0^t), u(t, x_0^t, \xi_0^t)\big)/\xi_0^t\right\} = \bar{g}_t(m_t, \gamma_t, \xi_t, v_t, u_t),$$

где $g_t(\cdot)$ и $\bar{g}_t(\cdot)$ — борелевские функции по совокупности переменных.

5°. *В предположении п. 1°, случайный процесс*

$$\bar{w}_t = \int\limits_0^t B^{-1}[d\xi_s - (A_0 + A_1 m_s)ds] \tag{3.7}$$

— винеровский. В связи с этим процессы ξ_t и m_t допускают представление

$$d\xi_t = [A_0 + A_1 m_t]dt + Bd\bar{w}_t, \tag{3.8}$$

$$dm_t = [a_0 v_t + a_1 m_t]dt + \gamma_t A_1^*[B^*]^{-1}d\bar{w}_t. \tag{3.9}$$

4. Основные результаты

Как и в дискретном времени, рассмотрим два случая [9].

Случай I. Коэффициенты a_0 и a_1 в уравнении (2.1) не зависят от x_t, т.е.

$$d\theta_t = [a_0(t)v_t + a_1(t)\theta_t]dt + b(t, x_t)dw_1(t). \tag{4.1}$$

Случай II. В уравнении (2.1) отсутствует управление v_t, т.е.

$$d\theta_t = [a_0(t, x_t) + a_1(t, x_t)\theta_t]dt + b(t, x_t)dw_1(t), \tag{4.2}$$

а критерий (2.5) имеет терминальный вид

$$J = \mathbf{E}G(T, x_T, \gamma_T). \tag{4.3}$$

Решение задачи в случае I. Воспользовавшись свойством условных математических ожиданий [11, 13], перепишем критерий (2.5) в виде

$$J = \mathbf{E}\Big\{\mathbf{E}[G(T, x_T, \gamma_T) + \theta_T^* h\theta_T/\xi_0^t]\Big\} + \mathbf{E}\int\limits_0^T \Big\{\mathbf{E}[\theta_t^* H(t)\theta_t/\xi_0^t] + v_t^* R(t)v_t\Big\}dt =$$

$$= \mathbf{E}\left\{G(T, x_T, \gamma_T) + m_T^* h m_T + \mathbf{tr}\, h^{1/2}\gamma_T h^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^T [m_t^* H(t)m_t + \mathbf{tr} H^{1/2}(t)\gamma_t H^{1/2}(t) + v_t^* R(t)v_t]dt\right\}$$

(здесь $\mathbf{tr}$ — оператор следа матрицы) или

$$J = \mathbf{E}\left\{ \bar{g}_{1T}(m_T, \gamma_T, x_T) + \int\limits_0^T \bar{g}_t(m_t, \gamma_t, v_t)dt \right\}, \tag{4.4}$$

где обозначено

$$\bar{g}_{1T}(m_T, \gamma_T, x_T) = G(T, x_T, \gamma_T) + m_T^* h\, m_T + \mathbf{tr} h^{1/2}\gamma_T h^{1/2},$$
$$\bar{g}_t(m_t, \gamma_t, v_t) = m_t^* H(t) m_t + \mathbf{tr} H^{1/2}(t)\gamma_t H^{1/2}(t) + v_t^* R(t) v_t.$$

Задачу минимизации критерия (4.4) разобьем на два этапа. На первом этапе проведем минимизацию критерия (4.4) по управлению $v_t = v(t, x_0^t, \xi_0^t)$ объекта при произвольном программном управлении $u_t = u(t)$ наблюдателя. На втором этапе покажем, что оптимальное управление наблюдателем, по сути, программно, т.е. расширение класса управлений наблюдателем до класса функционалов $u(t, x_0^t, \xi_0^t)$ не улучшает качества управления. Далее сформулируем задачу оптимального управления, из решения которой находится управление наблюдателем.

Итак, начнем с первого этапа. Зафиксируем произвольное программное управление $\hat{u}_t = \hat{u}(t)$ наблюдателем. При этом траектория x_0^t наблюдателя будет также программной, т.е. матричные коэффициенты в уравнениях (4.1) и (2.3) будут детерминированными. Условная ковариация γ_t (см. (3.6)) тоже будет детерминированной функцией времени. Критерий (4.4), рассматриваемый как функционал $J(u, v)$ от управлений, при фиксированном программном управлении $\hat{u}_t = \hat{u}(t)$ превращается в функционал

$$J(\hat{u}, v) = \hat{J}(v). \tag{4.5}$$

Решение задачи минимизации критерия (4.5) известно [11, 13] и имеет вид

$$\tilde{v}(t, \xi_0^t) = -L(t)\tilde{m}_t, \tag{4.6}$$

где

$$L(t) = R^{-1} a_0^*(t) q(t).$$

Знак тильда над m_t в (4.6) означает, что условное математическое ожидание m_t вычисляется при воздействии управления (4.6), т.е. $\tilde{m}_t$ удовлетворяет уравнению (см. (3.7)–(3.9))

$$d\tilde{m}_t = [a_1(t) - a_0(t)L(t)]\tilde{m}_t dt + \gamma_t A_1^* [B^*]^{-1} d\tilde{w}_t, \tag{4.7}$$

где

$$\tilde{w}_t = \int\limits_0^t B^{-1}[d\tilde{\xi}_s - (A_0 + A_1\tilde{m}_s)]ds, \tag{4.8}$$

$$(4.9) \qquad d\tilde{\xi}_t = [A_0 + A_1\tilde{m}_t]dt + Bd\tilde{w}_t.$$

Здесь $\tilde{\xi}_t$ — отвечающий управлению (4.6) процесс наблюдений. Симметрическая, неотрицательно определенная матрица $q(t)$ в (4.6) удовлетворяет уравнению Риккати

$$(4.10) \quad -\dot{q}(t) = a_1^*(t)q(t) + q(t)a_1(t) + H(t)v - q(t)a_0(t)R^{-1}(t)a_0^*(t)q(t), \quad q(T) = h.$$

Приведем доказательство этого результата. Для задачи с фиксированным $\hat{u}_t = \hat{u}(t)$ определим функцию Беллмана $V_t(m)$. Уравнение Беллмана для $V_t(m)$ имеет вид

$$(4.11) \qquad \min_{v_t}\left\{\mathcal{L}^v V_t(m) + \bar{g}_t(m, \gamma_t, v_t)\right\} = 0$$

с граничным условием

$$(4.12) \qquad V_T(m) = \bar{g}_{1T}(m, \gamma_T, x_T),$$

где оператор

$$\mathcal{L}^v = \frac{\partial}{\partial t} + \left[a_0 v_t + a_1 m\right]^* \frac{\partial}{\partial m} + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_t \frac{\partial^2}{\partial m^2}\right\}.$$

Решение уравнений (4.11), (4.12) будем искать в виде

$$(4.13) \qquad V_t(m) = m^* q(t) m + Q_t,$$

где $q(t)$ — симметрическая, неотрицательно определенная матрица, непрерывная и дифференцируемая по t. Функция Q_t также непрерывная и дифференцируемая по t.

Подстановка (4.13) в (4.11) дает (аргумент t в $q(t)$ опущен)

$$\min_{v_t}\Bigg\{m^*\dot{q}m + \frac{\partial Q_t}{\partial t} + \left[a_0 v_t + a_1 m\right]^* qm + m^* q\left[a_0 v_t + a_1 m\right] +$$
$$+ \mathbf{tr}\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_t q + m^* H(t) m + \mathbf{tr}H^{1/2}(t)\gamma_t H^{1/2}(t) + v_t^* R(t) v_t\Bigg\} = 0$$

или, группируя члены, получаем

$$m^*\left[\dot{q} + a_1^* q + q a_1 + H\right]m + \frac{\partial Q_t}{\partial t} + \mathbf{tr}\Big\{\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_t q + H^{1/2}\gamma_t H^{1/2}\Big\} +$$
$$(4.14) \qquad + \min_{v_t}\left\{v_t^* a_0^* q m + m^* q a_0 v_t + v_t^* R v_t\right\} = 0.$$

В (4.14) минимум квадратичной по v_t формы достигается при

$$(4.15) \qquad \tilde{v}_t = -L(t)m,$$

где обозначено

$$(4.16) \qquad L(t) = R^{-1}(t)a_0^*(t)q(t).$$

Подставляя (4.15), (4.16) в (4.14), находим

$$m^*\big[\dot q + a_1^* q + q a_1 + H\big] m + \frac{\partial Q_t}{\partial t} + \mathbf{tr}\Big\{\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1} A_1 \gamma_t q + H^{1/2}\gamma_t H^{1/2}\Big\} - \\ - 2m^* q a_0 [R^{-1}]^* a_0^* q m + m^* q a_0 [R^{-1}]^* R R^{-1} a_0^* q m$$

или (в силу $[R^{-1}]^* = R^{-1}$)

$$\begin{aligned} &m^*\big[\dot q + a_1^* q + q a_1 + H - q a_0 R^{-1} a_0^* q\big] m + \frac{\partial Q_t}{\partial t} + \\ &+ \mathbf{tr}\Big\{\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1} A_1 \gamma_t q + H^{1/2}\gamma_t H^{1/2}\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Для обеспечения равенства (4.17) и граничного условия (4.12) выберем $q(t)$ и Q_t следующим образом. Потребуем, чтобы $q(t)$ удовлетворяло уравнению (4.10), а Q_t равнялось

$$\begin{aligned} Q_t &= G(T, x_T, \gamma_T) + \mathbf{tr}\, h^{1/2}\gamma_T h^{1/2} + \\ &+ \int_t^T \mathbf{tr}\Big\{H^{1/2}(s)\gamma_s H^{1/2}(s) + \gamma_s A_1^*[BB^*]^{-1} A_1 \gamma_s q(s)\Big\}\, ds. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Подставляя теперь управление $\tilde v_t$ из (4.15) в уравнения (3.7)–(3.9), отмечая знаком $\sim$ (тильда) переменные, отвечающие закону управления (4.15), получим уравнения (4.7)–(4.9). Для доказательства оптимальности управления $\tilde v_t$ вычислим $\mathbf{E}V_0(m_0)$. Для этого продифференцируем по Ито функцию

$$V_t(\tilde m_t) = \tilde m_t^* q(t) \tilde m_t + Q_t \tag{4.19}$$

в силу системы (4.7). Получаем

$$V_T(\tilde m_T) = V_0(m_0) + \int_0^T \frac{\partial V_t}{\partial t}\, dt + \int_0^T \frac{\partial V_t}{\partial m_t}\, d\tilde m_t + \\ + \frac{1}{2}\int_0^T \mathbf{tr}\left\{\big[\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1} A_1 \gamma_t\big] \frac{\partial^2 V_t}{\partial m_t^2}\right\} dt.$$

Беря в последнем выражении математическое ожидание от обеих частей, находим

$$\mathbf{E}V_0(m_0) = \mathbf{E}\left\{V_T(\tilde m_T) - \int_0^T \mathcal{L}^{\tilde v} V_t(\tilde m_t) dt\right\}, \tag{4.20}$$

где

$$\mathcal{L}^{\tilde v} = \frac{\partial}{\partial t} + 2\big[\big(a_1(t) - a_0(t)L(t)\big)\tilde m_t\big]^* \frac{\partial}{\partial m_t} + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\left\{\big[\gamma_t A_1^*[BB^*]^{-1} A_1 \gamma_t\big] \frac{\partial^2}{\partial m_t^2}\right\}.$$

Далее, согласно (4.11)

$$\mathcal{L}^{\tilde{v}} V_t(\tilde{m}_t) + \bar{g}_t\big(\tilde{m}_t, \gamma_t, \tilde{v}_t\big) = 0, \tag{4.21}$$

т.е.

$$-\mathcal{L}^{\tilde{v}} V_t(\tilde{m}_t) = \tilde{m}_t^* H(t)\tilde{m}_t + \mathbf{tr} H^{1/2}\gamma_t H^{1/2} + \tilde{v}_t^* R(t)\tilde{v}_t.$$

Заметим попутно, что в равенстве (4.21) можно убедиться и непосредственно, вычисляя $\mathcal{L}^{\tilde{v}} V_t(\tilde{m}_t)$, где $V_t(\tilde{m}_t)$ из (4.19). Следовательно (4.20) запишется в виде

$$\mathbf{E}V_0(m_0) = \mathbf{E}\left\{ V_T(\tilde{m}_T) + \int\limits_0^T \big[\tilde{m}_t^* H(t)\tilde{m}_t + \mathbf{tr} H^{1/2}(t)\gamma_t H^{1/2}(t) + \tilde{v}_t^* R(t)\tilde{v}_t\big]\, dt \right\},$$

где

$$V_T(\tilde{m}_T) = \bar{g}_{1T}(\tilde{m}_T, \gamma_T, x_T) = G(T, x_T, \gamma_T) + \tilde{m}_T^* h \tilde{m}_T + \mathbf{tr}\, h^{1/2}\gamma_T h^{1/2}.$$

Итак, получили, что

$$\mathbf{E}V_0(m_0) = \mathbf{E}\left\{ \bar{g}_{1T}(\tilde{m}_T, \gamma_T, x_T) + \int\limits_0^T \bar{g}_t(\tilde{m}_t, \gamma_t, x_t)\, dx_t \right\} = J(\hat{u}(t), \tilde{v}_t). \tag{4.22}$$

Покажем, что если при фиксированном $\hat{u}_t = \hat{u}(t)$ взять произвольное допустимое управление $v_t = v(t, \xi_0^t)$, то значение платежного функционала (критерия) будет не меньше $J(\hat{u}(t), \tilde{v}_t)$, т.е. что

$$J\big(\hat{u}(t), \tilde{v}_t\big) \leqslant J\big(\hat{u}(t), v(t, \xi_0^t)\big)$$

или

$$\hat{J}(\tilde{v}_t) \leqslant \hat{J}\big(v(t, \xi_0^t)\big).$$

Действительно, при произвольном $v_t = v(t, \xi_0^t)$ согласно (4.11) имеем

$$\mathcal{L}^{v} V_t(m_t) + \bar{g}_t(m_t, \gamma_t, v_t) \geqslant 0, \tag{4.23}$$

где m_t удовлетворяет уравнениям (3.9) и (3.5), $v_t = v(t, \xi_0^t)$. Применение формулы Ито к функции $V_t(m_t)$ в силу (3.9) дает

$$V_T(m_T) = V_0(m_0) + \int\limits_0^T \frac{\partial V_t}{\partial t}\, dt + \int\limits_0^T \frac{\partial V_t}{\partial m_t}\, dm_t +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^T \mathbf{tr}\left\{ \big[\gamma_t A_1^* [BB^*]^{-1} A_1 \gamma_t\big] \frac{\partial^2 V_t}{\partial m_t^2} \right\} dt.$$

Беря математическое ожидание от обеих частей последнего равенства, с учетом (4.23) получаем

$$\mathbf{E}\,V_0(m_0)=\mathbf{E}\left\{V_T(m_T)-\int\limits_0^T\mathcal{L}^v V_t(m_t)\,dt\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{E}\left\{V_T(m_T)+\int\limits_0^T\bar g_t(m_t,\gamma_t,v_t)\,dt\right\}=$$

$$=J\big(\hat u(t),v(t,\xi_0^T)\big)=\hat J\big(v(t,\xi_0^t)\big),$$

но в силу (4.22) $\mathbf{E}V_0(m_0)=J\big(\hat u(t),\tilde v_t\big)$, значит,

$$J\big(\hat u(t),\tilde v_t\big)\leqslant J\big(\hat u(t),v(t,\xi_0^t)\big),$$

что и завершает доказательство.

Итак, при программном управлении $u_t=u(t)$ управление $\tilde v_t$ объектом оптимально. Пусть теперь $\tilde u_t=\tilde u(t)$ — оптимальное программное управление наблюдениями, отвечающее управлению $\tilde v_t$ объекта. Далее покажем, что всегда справедливо неравенство

$$J\big(\tilde u(t),\tilde v_t\big)\leqslant J\big(u(t,\xi_0^t,x_0^t),v(t,\xi_0^t,x_0^t)\big). \tag{4.24}$$

Для этого прежде всего заметим, что согласно (4.22)

$$\begin{aligned}J\big(u(t),\tilde v_t\big)&=\mathbf{E}V_0(m_0)=\mathbf{E}\big\{m_0^*q(0)m_0+Q_0\big\}=\\ &=\mathbf{E}\Bigg\{m_0^*q(0)m_0+G(T,x_T,\gamma_T)+\mathbf{tr}\,h^{1/2}\gamma_Th^{1/2}+\\ &\quad+\int\limits_0^T\mathbf{tr}\big[H^{1/2}(s)\gamma_sH^{1/2}(s)+\gamma_sA_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_sq(s)\big]\,ds\Bigg\}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Теперь рассмотрим вспомогательную задачу минимизации критерия

$$\begin{aligned}I\big(u(t)\big)&=m_0^*q(0)m_0+G(T,x_T,\gamma_T)+\mathbf{tr}h^{1/2}\gamma_Th^{1/2}+\\ &+\int\limits_0^T\mathbf{tr}\big[H^{1/2}(s)\gamma_sH^{1/2}(s)+\gamma_sA_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_sq(s)\big]\,ds\end{aligned}\tag{4.26}$$

при связях (2.3), (3.6) и ограничениях (2.4), (2.6). Критерий (4.26) отличается от (4.25) отсутствием знака математического ожидания. Имеет место теорема.

Т е о р е м а. *Если среди допустимых управлений $u(t,\xi_0^t,x_0^t)$ существует детерминированное $\tilde{\tilde u}(t)$, удовлетворяющее неравенству*

$$I\big(\tilde{\tilde u}(t)\big)\leqslant I\big(u(t,\xi_0^t,x_0^t)\big),$$

то неравенство (4.24) *оказывается справедливым, причем $\tilde{\tilde u}(t)=\tilde u(t)$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторые допустимые произвольные управления $u(t,\xi_0^t,x_0^t)$ и $v(t,\xi_0^t,x_0^t)$ и пусть $\xi=(\xi_0^t)_{t\geqslant 0}$ и $x=(x_0^t)_{t\geqslant 0}$ — отвечающие этим управлениям наблюдения и траектория наблюдателя. При фиксированных функциональных зависимостях $u(t,\xi_0^t,x_0^t)$ и $v(t,\xi_0^t,x_0^t)$ определим функционал $I\big(u(t,\xi_0^t,x_0^t)\big)$ по формуле (4.26), где γ_t — решение уравнения (3.6), в котором коэффициенты b,B и A_1 зависят как от t, так и от x_t, отвечающее, в свою очередь, управлению $u(t,\xi_0^t,x_0^t)$, т.е. $\gamma_t=\gamma(t,\xi_0^t)$. В силу предположения теоремы

$$I\big(\tilde{\tilde{u}}(t)\big)\leqslant I\big(u(t,\xi_0^t,x_0^t)\big),$$

поэтому

$$\mathbf{E}I\big(\tilde{\tilde{u}}(t)\big)=I\big(\tilde{\tilde{u}}(t)\big)\leqslant \mathbf{E}I\big(u(t,\xi_0^t,x_0^t)\big).$$

Но согласно (4.25) в силу детерминированности $\tilde{\tilde{u}}(t)$

$$J\big(\tilde{\tilde{u}}(t),\tilde{v}_t\big)=I\big(\tilde{\tilde{u}}(t)\big)=\mathbf{E}I\big(\tilde{\tilde{u}}(t)\big).$$

Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\mathbf{E}I\big(u(t,\xi_0^t,x_0^t)\big)\leqslant J\big(u(t,\xi_0^t,x_0^t),v(t,\xi_0^t,x_0^t)\big). \tag{4.27}$$

С этой целью рассмотрим функцию Беллмана $V_t\big(m,\xi_0^T,x_0^T\big)$. Уравнение Беллмана будет аналогично (4.11), с той лишь разницей, что γ_t и v_t в (4.11), (4.12) будут функционалами от ξ_0^t и x_0^t, т.е. $\gamma_t=\gamma\big(t,\xi_0^t,x_0^t\big)$, $v_t=v\big(t,\xi_0^t,x_0^t\big)$. При этом в силу зависимости $u_t=u\big(t,\xi_0^t,x_0^t\big)$ коэффициенты b, B и A_1 также оказываются функционалами от ξ_0^t и x_0^t. Уравнение Беллмана имеет вид

$$\min_v\big\{\mathcal{L}^v V_t\big(m,\xi_0^T,x_0^T\big)+\bar{g}\big(m,\gamma(t,\xi_0^t,x_0^t),v(t,\xi_0^t,x_0^t)\big)\big\}=0. \tag{4.28}$$

Решение уравнения (4.28) будем искать в виде

$$V_t\big(m,\xi_0^T,x_0^T\big)=m^*q(t)m+Q_t\big(\xi_0^T,x_0^T\big),$$

где $q(t)$ удовлетворяет (4.10), а $Q_t\big(\xi_0^T,x_0^T\big)$ удовлетворяет (4.18) при $\gamma_t=\gamma\big(t,\xi_0^t,x_0^t\big)$. Минимум в (4.28) достигается на управлении (4.15), а именно: $\tilde{v}_t=-L(t)m$. Теперь продифференцируем по Ито функцию $V_t\big(m_t,\xi_0^T,x_0^T\big)$ в силу системы (3.9), где m_t отвечает некоторым управлениям $u(t,\xi_0^t,x_0^t)$ и $v(t,\xi_0^t,x_0^t)$. Получаем

$$\mathbf{E}V_0\big(m_0,\xi_0^T,x_0^T\big)=\mathbf{E}\left\{V_T\big(m_T,\xi_0^T,x_0^T\big)-\int_0^T\mathcal{L}^v V_t\big(m_t,\xi_0^T,x_0^T\big)dt\right\}. \tag{4.29}$$

Если $v\big(t,\xi_0^t,x_0^t\big)\neq -L(t)m$, то согласно (4.28)

$$\mathcal{L}^v V_t\big(m,\xi_0^T,x_0^T\big)+\bar{g}_t\big(m,\gamma(t,\xi_0^t,x_0^t),v(t,\xi_0^t,x_0^t)\big)\geqslant 0. \tag{4.30}$$

В частности, (4.30) верно и для $m = m_t$, отвечающему $u(t,\xi_0^t,x_0^t)$ и $v(t,\xi_0^t,x_0^t)$. Значит, из (4.29) и (4.30) вытекает, что

$$\mathbf{E}V_0\bigl(m_0,\xi_0^T,x_0^T\bigr) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}\left\{V_T\bigl(m_T,\xi_0^T,x_0^T\bigr) + \int_0^T \bar g_t\bigl(m_t,\gamma(t,\xi_0^t,x_0^t),v(t,\xi_0^t,x_0^t)\bigr)dt\right\} = \tag{4.31}$$

$$= \mathbf{E}\left\{\bar g_{1T}\bigl(m_T,\gamma(T,\xi_0^T,x_0^T),x(T,\xi_0^T,x_0^T)\bigr) + \int_0^T \bar g_t\bigl(m_t,\gamma(t,\xi_0^t,x_0^t),v(t,\xi_0^t,x_0^t)\bigr)dt\right\}.$$

Но в неравенстве (4.31) левая часть равна

$$\mathbf{E}V_0\bigl(m_0,\xi_0^T,x_0^T\bigr) = \mathbf{E}\bigl\{m_0^*q(0)m_0 + Q_0\bigl(\xi_0^T,x_0^T\bigr)\bigr\} =$$

$$= \mathbf{E}\left\{m_0^*q(0)m_0 + G\bigl(T,x(T,\xi_0^T,x_0^T),\gamma(T,\xi_0^T,x_0^T)\bigr) + \mathbf{tr}\,h^{1/2}\gamma(T,\xi_0^T,x_0^T)h^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^T \mathbf{tr}\bigl[H^{1/2}\gamma_s H^{1/2} + \gamma_s A_1^*[BB^*]^{-1}A_1\gamma_s q(s)\bigr]ds\right\} = \mathbf{E}I\bigl(u(t,\xi_0^t,x_0^t)\bigr),$$

где $\gamma_s = \gamma(s,\xi_0^s,x_0^s)$. В свою очередь правая часть в (4.31) равна $J\bigl(u(t,\xi_0^t,x_0^t),v(t,\xi_0^t,x_0^t)\bigr)$. Итак, имеет место неравенство

$$\mathbf{E}I\bigl(u(t,\xi_0^t,x_0^t)\bigr) \leqslant J\bigl(u(t,\xi_0^t,x_0^t),v(t,\xi_0^t,x_0^t)\bigr),$$

т.е. выполнено (4.27). Наконец, по условию теоремы $I\bigl(\tilde{\tilde u}\bigr) \leqslant I\bigl(\tilde u\bigr)$, а из определения $\tilde u$ следует обратное неравенство $I\bigl(\tilde u\bigr) \leqslant I\bigl(\tilde{\tilde u}\bigr)$. Откуда $\tilde{\tilde u}(t) = \tilde u(t)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай II, где динамика объекта описывается уравнением (4.2), а критерий имеет вид (4.3). Отметим прежде всего, что критерий (4.3) зависит лишь от переменных x_t и γ_t (при $t = T$), подчиненных уравнениям (2.3), (3.6). Далее, как и в случае I, рассмотрим вспомогательную детерминированную задачу оптимального управления системой (2.3), (3.6) с ограничением (2.4), терминальным условием (2.6) и критерием

$$I\bigl(u(t)\bigr) = G\bigl(T,x_T,\gamma_T\bigr),$$

отличающимся от (4.3) отсутствием знака математического ожидания. Решение вспомогательной задачи определит оптимальное программное управление $\tilde u_t = \tilde u(t)$, на котором

$$\tilde I = \inf_u I\bigl(u(t)\bigr) = I\bigl(\tilde u(t)\bigr) \leqslant I\bigl(u(t)\bigr).$$

Теперь рассмотрим произвольное допустимое управление $u(t,\xi_0^t,x_0^t)$. На этом управлении будет, очевидно, выполняться неравенство

$$\tilde I = I\bigl(\tilde u(t)\bigr) \leqslant I\bigl(u(t,\xi_0^t,x_0^t)\bigr). \tag{4.32}$$

Беря в (4.32) математическое ожидание от обеих частей, получаем

$$\tilde{I} = I\big(\tilde{u}(t)\big) = \mathbf{E}\tilde{I} \leqslant \mathbf{E}I\big(u(t, \xi_0^t, x_0^t)\big) = J\big(u(t, \xi_0^t, x_0^t)\big).$$

Из последнего неравенства видно, что нижняя грань $\tilde{I}$ функционала $J\big(u(t, \xi_0^t, x_0^t)\big)$ исходной задачи достигается, например, при программном управлении $\tilde{u}(t)$.

5. Пример

В качестве примера приведем задачу преследования, аналогичную рассмотренной в [9] в дискретном времени. Пусть преследователь P и цель E движутся по прямой в одном направлении, причем E движется равномерно со своей максимально возможной скоростью. Уравнение движения цели E (ненаблюдаемый процесс)

$$d\theta(t) = a_1\theta(t)dt, \quad t \in [0, T], \quad T - \text{задано}. \tag{5.1}$$

Здесь $\theta(t) = \big(\theta_1(t), \theta_2(t)\big)$ — двумерный вектор-столбец состояния цели, где $\theta_1(t)$ — координата, $\theta_2(t)$ — скорость. Матрица a_1 имеет вид

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Начальное условие $\theta(0)$ — гауссовский вектор с заданными средним значением $\theta_0 > 0$ (неравенство покомпонентное) и ковариационной матрицей $\gamma = \operatorname{diag}\{\alpha, \beta\}$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — известные числа.

Динамика преследователя (мобильного наблюдателя) описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = X_2(t), & X_1(0) = 0, \\ \dot{X}_2(t) = u(t) - \mu X_2(t), & X_2(0) = 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Здесь $u(t)$ — управление преследователя, подчиненное ограничению

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \bar{u}, \tag{5.4}$$

μ — заданная константа.

Наблюдению доступна текущая дистанция до цели с некоторой аддитивной помехой

$$d\xi(t) = \theta_2(t)dt - X_2(t)dt + B_t dW_t, \tag{5.5}$$

где W_t — стандартный винеровский процесс, играющий роль генератора помехи в наблюдениях, а

$$B_t = b_0 - b_1 X_1(t) + b_2 X_2(t) \tag{5.6}$$

Таблица 1. Параметры моделирования

$\bar{u}$	μ	b_0	b_1	b_2	α_0	β_0	κ_0
0,7	18	0,2	0,12	0,2	1,0	0,2	0

Таблица 2. Результаты моделирования

ν	1,0	1,5	2,0
J_*	0,6817	–8,7716	–18,2359
J_0	1,8750	1,8750	1,8750
J_1	1,8229	1,6243	1,4257
u_{opt}	1100000000	1110000000	1111000000

— "интенсивность" помехи, линейно зависящая от скорости преследователя $X_2(t)$ и его текущей координаты $X_1(t)$, $b_i > 0$, $i = 0, 1, 2$. Другими словами, с ростом скорости преследования помеха в наблюдениях растет, а с уменьшением расстояния до цели — убывает. Преследователю необходимо, с одной стороны, максимально сблизиться с целью за время преследования T, а с другой — реализовать процесс сближения так, чтобы к моменту T поточнее определить элементы движения цели. По этой причине в качестве критерия рассмотрим функционал [9]

$$J = -\nu X_1(T) + \mathbf{tr}\,\gamma_T \to \min_u, \tag{5.7}$$

где $\nu > 0$ — заданная константа, а γ_T — терминальное значение ковариационной матрицы ошибок оценивания γ_t.

Система (5.1)–(5.6) находится в рамках условно-гауссовской схемы фильтрации [11, 13], поэтому элементы $\gamma_{ij}(t)$, $i, j = \{1, 2\}$, ковариационной матрицы γ_t подчинены следующим уравнениям (для упрощения обозначений положим далее $\alpha_t = \gamma_{11}(t)$, $\beta_t = \gamma_{22}(t)$, $\kappa_t = \gamma_{12}(t) = \gamma_{21}(t)$):

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_t = -\kappa_t^2 B_t^{-2} + 2\kappa_t, \\ \dot{\kappa}_t = -\kappa_t \beta_t B_t^{-2} + \beta_t, \\ \dot{\beta}_t = -\beta_t^2 B_t^{-2}. \end{cases} \tag{5.8}$$

Соотношения (5.3)–(5.8) задают терминальную задачу оптимального управления, которая удовлетворяет принципу максимума Л.С. Понтрягина.

Решение данной задачи при $T = 10$ и исходных параметрах из табл. 1 приведено в табл. 2.

В табл. 2 строки J_*, J_0 и J_1 отвечают значениям критериев соответственно при оптимальном управлении, управлениях $u \equiv 0$ и $u \equiv \bar{u}$. Реализации оптимального управления как функции времени символически изображены последовательностями нулей и единиц с одинаковыми временны́ми интервалами между символами, где единица соответствует $u(t) \equiv \bar{u}$, а ноль — $u(t) \equiv 0$.

6. Заключение

В непрерывном времени в LQG задаче стохастического управления по неполным данным для двух содержательных случаев приведено доказательство программности траекторного управления наблюдениями со стороны подвижного наблюдателя, динамика которого описывается нелинейным дифференциальным уравнением. Идеологически статья примыкает к исследованиям [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Athans M., Shweppe F.* Optimal Waveform Design via Control Theoretical concepts // Inform. and Control. 1967. V. 10. No. 4. P. 335–337.
2. *Яшин А.И.* Фильтрация нестационарных процессов с учетом стоимости наблюдений // АиТ. 1969. № 2. С. 40–42.

   Yashin A.I. Filtration of Non-Stationary Processes with Taking into Account Observation Cost // Autom. Remote Control. 1969. V. 30. No. 2. P. 195–197.
3. *Яшин А.И.* О выборе оптимального процесса наблюдения // Изв. АН СССР. ТК. 1969. № 2. С. 121–123.
4. *Черноусько Ф.Л.* Об оптимизации процесса наблюдения // ПММ. 1969. Т. 33. С. 101–111.
5. *Соляник А.И., Черноусько Ф.Л.* Оптимизация процесса наблюдения при случайных возмущениях // ПММ. 1969. Т. 33. С. 720–729.
6. *Кац И.Я., Куржанский А.Б.* О некоторых задачах наблюдения и управления в случайных обстоятельствах // АиТ. 1970. № 12. С. 15–25.

   Kats I.Ya., Kurzhansky A.B. Concerning Certain Problems of Observation and Control under Random Circumstances // Autom. Remote Control. 1970. P. 1913–1923.
7. *Миллер Б.М.* Оптимальное управление наблюдениями при фильтрации процессов диффузионного типа. I, II // АиТ. 1985. Т. 46. № 2. С. 79–86; 1985. № 6. С. 77–87.

   Miller B.M. Optimal Control of Observations in Filtering Diffusional Processes. I, II // Autom. Remote Control. 1985. V. 46. No. 2. 207–214; No. 6. P. 745–754;
8. *Миллер Б.М.* Обобщенная оптимизация в задачах управления наблюдениями // АиТ. 1991. Т. 52. № 10. С. 83–92.

   Miller B.M. Generalized Optimization in Problems of Obsevation Control // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 10. P. 83–92.
9. *Рубинович Е.Я.* Траекторное управление наблюдениями в дискретных стохастических задачах оптимизации // АиТ. 1980. № 3. С. 93–102.

   Rubinovich E.Ya. Trajectory-Wise Control of Observations in Digital Stochastic Problems // Autom. Remote Control. 1980. V. 41. No. 3. P. 365–372.
10. *Martineza S., Bullob F.* Optimal Sensor Placement and Motion Coordination for Target Tracking // Automatica. 2006. V. 42. P. 661–668.
11. *Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А., Серебровский А.П.* Управление наблюдениями в автоматических системах. М.: Наука, 1986.
12. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдения и управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1989.
13. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
14. *Butov A.A., Kuznetsov N.A., et al.* Generalized Observation Control in Problems of Stochastical Optimization // Proc. 8th IFAC World Congr. Kyoto, Japan. 1981.

15. *Андреев К.В., Рубинович Е.Я.* Траекторное управление наблюдателем за мобильной целью по угломерной информации // АиТ. 2015. № 1. С. 134–162.

Andreev K.V., Rubinovich E.Ya. Moving observer trajectory control by angular measurements in tracking problem // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 1. P. 106–129.

16. *Андреев К.В., Рубинович Е.Я.* Управление БПЛА с учетом карты рельефа местности при угловых наблюдениях за подвижной целью // Изв. ЮФУ. Техн. науки. 2015. № 1. С. 185–195.

17. *Nardone S.C., Aidala V.J.* Observability Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis // IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst. 1981. V. AES-17. No. 2. P. 162–166.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 20.06.20190

После доработки 06.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019