

# Тематический выпуск (окончание)<sup>1</sup>

© 2020 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (A.Borisov@frccsc.ru)  
(Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра  
“Информатика и управление” РАН, Москва;  
Московский авиационный институт)

## АЛГОРИТМ РОБАСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ СЧИТАЮЩИМ НАБЛЮДЕНИЯМ<sup>2</sup>

Представлен алгоритм оценивания состояния марковских скачкообразных процессов по наблюдениям векторного процесса со считающими компонентами. Особенностью класса изучаемых систем наблюдения является то, что частота скачков поступающих наблюдений значительно превосходит интенсивность смены состояний оцениваемого процесса. Это свойство дает возможность в алгоритме фильтрации обрабатывать поступающие наблюдения с использованием их диффузионной аппроксимации. Предлагаемые в статье оценки обладают свойством устойчивости по отношению к неточному знанию распределения наблюдаемого процесса. Для иллюстрации робастных качеств оценок представлено решение прикладной задачи мониторинга состояния RTP-соединения по наблюдениям потока пакетов, регистрируемых на узле-получателе.

*Ключевые слова:* марковский скачкообразный процесс, мультивариантный точечный процесс, диффузионная аппроксимация, алгоритм робастной фильтрации.

DOI: 10.31857/S0005231020040017

### 1. Введение

Создание высокоточных эффективных алгоритмов оценивания состояний марковских скачкообразных процессов (МСП) по скачкообразным наблюдениям при наличии различных комплексов доступной априорной информации о системе наблюдения всегда было востребованным при решении практических задач оценивания, управления и оптимизации в технических системах, медицине и финансах.

Задачи фильтрации скачкообразных процессов, оптимальной в среднем квадратическом смысле (СК-оптимальной), решаются с помощью аппарата стохастического анализа. В классической монографии [1, гл. 18 и 19] получено решение задачи фильтрации состояния скалярного точечного процесса по таким же наблюдениям. В [2] представлен фундаментальный результат — решена общая задача оптимальной фильтрации семимартингала по наблюдениям семимартингала. Для решения прикладных задач оценивания и управ-

<sup>1</sup> Первые три статьи являются окончанием тематического выпуска, посвященного Р.Ш. Липцеру (№3, 2020).

<sup>2</sup> Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-07-00187 А).

ления указанные результаты нуждались в выделении таких практически значимых классов систем наблюдения, для которых оптимальные оценки описывались бы конечной системой уравнений. В [3] получено решение задачи оптимальной фильтрации состояний МСП по наблюдениям векторного мультивариантного точечного процесса, а в [4] предложены варианты возможного применения данных результатов в мониторинге состояния информационно-телекоммуникационных устройств и соединений.

Помимо своей очевидной теоретической пользы, оптимальные оценки фильтрации обладают сложностью численной реализации, связанной как со свойствами самой оценки, так и с особенностями решаемых прикладных задач. Во-первых, уравнения, описывающие оптимальную оценку, могут быть неустойчивыми и могут нуждаться в специальных методах численного решения. Во-вторых, качество оптимальных оценок является чувствительным к отклонениям истинного распределения процессов в системе наблюдения от своего номинала: полученные в этом случае оценки могут иметь осциллирующий, высокочастотный и высокоамплитудный характер. Более того, в ряде практических задач априорная информация о распределениях может отсутствовать, за исключением некоторых моментных характеристик, полученных путем их предварительного статистического оценивания по части наблюдений. Поэтому представляется важным разработать алгоритмы субоптимальной фильтрации, которые обеспечивали бы приемлемую точность оценок, с одной стороны, и обладали бы устойчивостью по отношению к неточному знанию априорных характеристик системы наблюдения — с другой.

На практике в ряде задач интенсивность смены состояний МСП много меньше частоты поступления наблюдений. Такая ситуация характерна, например, для электронных бирж [5, 6], на которых из-за большого числа участников частота поступления трейдерских приказов крайне высока (от десятых долей Гц до десятков герц), в то время как смена сценария развития рынка происходит достаточно редко (десятитысячные — сотысячные доли герца). Данное свойство системы наблюдения позволяет строить не только оптимальные процедуры слежения за функцией волатильности по наблюдениям случайного потока сделок [7], но и их устойчивые версии, основанные на диффузионной аппроксимации наблюдаемых процессов [8].

Другая область, в которой возникают подобные явления, включает в себя различные комплексы и сети массового обслуживания, в том числе и телекоммуникационные. Для систем подобного рода характерны большая размерность вектора состояния и наличие высокочастотных потоков событий, связанных с поступлением/обработкой заявок и сменой состояний. Эти особенности дают возможность строить жидкостные и диффузионные аппроксимации процессов в подобных комплексах [9, 10], значительно облегчающие их анализ [11–13]. В этих же системах могут присутствовать частично наблюдаемые разнотемповые потоки событий, и жидкостная и/или диффузионная аппроксимация правомерна только для высокочастотной составляющей. Например, при пакетной передаче данных по гетерогенному (проводному–беспроводному) каналу связи на узлах отправителя/получателя наблюдению доступны высокочастотные потоки собственно пакетов, а также подтверждений их успешной передачи. В то же время изменения состояния канала, свя-

занные с временной перегрузкой его проводного участка или потерей несущего сигнала на беспроводном участке, происходят относительно редко. Для подобных каналов с помощью жидкостной и/или диффузионной аппроксимации можно проводить не только анализ их характеристик [14, 15], но и решать задачи оценивания состояний и параметров.

Цель данной статьи — построение алгоритма фильтрации состояний МСП по наблюдениям процесса со считающими компонентами, устойчивого по отношению к неточному знанию распределения наблюдений. Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлен класс исследуемых систем наблюдения. Имеющиеся считающие наблюдения эквивалентны некоторому мультивариантному точечному процессу с конечным множеством состояний. Отличительной чертой рассматриваемых систем является линейная зависимость интенсивностей скачков от ненаблюдаемого МСП. Решение задачи оптимальной фильтрации [3] определяется некоторой стохастической системой со скачкообразными процессами в правой части.

В разделе 3 определены связанные с изучаемой системой наблюдения обобщенные процессы восстановления (renewal-reward processes). На основе центральной предельной теоремы представлена диффузионная аппроксимация распределений этих вспомогательных процессов. В разделе указаны условия применимости данной аппроксимации для описания распределения наблюдаемого процесса. Предлагаемый робастный алгоритм заключается в следующем. Исходные наблюдения предварительно семплируются, т.е. дискретизируются по времени с дополнительным линейным преобразованием. Затем, опираясь на правомерность использования диффузионной аппроксимации, преобразованные таким образом наблюдения обрабатываются уже какращения некоторого непрерывного диффузионного процесса.

Раздел 4 посвящен решению прикладной задачи разработки аппаратно-независимого монитора состояния гетерогенного RTP-канала по потоку пакетов, регистрируемых на узле-получателе. Состояние канала недоступно прямому наблюдению, и о нем можно судить косвенно по случайному потоку поступающих пакетов, допускающему одновременное получение “пачек” пакетов случайного объема. Комплекс численных экспериментов демонстрирует правомерность применения диффузионной аппроксимации в данной практической задаче и позволяет провести сравнительный численный анализ качества оптимальной и робастной оценок в зависимости от объема априорной информации о распределении наблюдаемого процесса. Заключительные замечания и перспективы дальнейших исследований приведены в разделе 5.

## 2. Постановка задачи оптимальной фильтрации и ее решение

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$  задан ненаблюдаемый МСП  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$

$$(1) \quad X_0 = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + M_t^X, \quad X_0 \sim p_0,$$

где  $X_t \in \mathbb{S}^N$  — состояние процесса ( $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\} \subset \mathbb{R}^N$  — множество единичных вектор-столбцов пространства  $\mathbb{R}^N$ );  $\Lambda$  — матрица интенсивностей МСП,  $p_0$  — его начальное распределение;  $\{M_t^X\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  —  $\mathcal{F}_t$ -согласованный мартингал,  $M_t^X \in \mathbb{R}^N$ .

Наблюдению доступен процесс  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  со считающими компонентами ( $Y_t \in \mathbb{Z}_+^M$ )

$$(2) \quad Y_t = \int_0^t \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{I}_{(\tau_{n-1}, \tau_n]}(s) \phi(s - \tau_{n-1}) X_{s-} \Phi(\tau_{n-1}, ds) + M_t^Y.$$

Здесь и далее  $\int_a^b \dots \triangleq \int_{(a,b]} \dots$  для любых  $-\infty < a < b < +\infty$ ;  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$  — возрастающая последовательность случайных моментов скачков наблюдений  $Y_t$ ,  $\tau_0 \equiv 0$ ; каждый скачок  $Y_t$  является случайным с конечным множеством возможных значений:  $r_n \triangleq \Delta Y_{\tau_n} \in \mathbb{S}^M$ , где  $\mathbb{S}^M \triangleq \{f_1, \dots, f_M\} \subset \mathbb{R}^M$  — множество единичных вектор-столбцов  $\mathbb{R}^M$ ;  $\phi(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^{M \times N}$  — неслучайный матричнозначный процесс,  $\Phi(u, dv)$  — неотрицательная неслучайная  $\sigma$ -конечная мера на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , параметризованная  $u \in \mathbb{R}_+$ ;  $M_t^Y$  —  $\mathcal{F}_t$ -согласованный чисто разрывный мартингал.

Обозначим через  $\mathcal{O}_t \triangleq \sigma\{Y_s : 0 \leq s \leq t\}$  поток  $\sigma$ -алгебр, порожденный процессом наблюдений  $Y_t$ .

Относительно системы наблюдения (1), (2) сделаны следующие *предположения*:

- а. Все траектории процессов  $X_t$  и  $Y_t$  непрерывны справа. Поток  $\{\mathcal{F}_t\}$  порожден только процессами  $X_t$  и  $Y_t$ , т.е.  $\mathcal{F}_t \equiv \sigma\{X_s, Y_s : 0 \leq s \leq t\}$  для любого  $t \geq 0$ ;
- б. Мартингалы в (1) и (2) сильно ортогональны, т.е. для любого  $t \geq 0$

$$[M^X, M^Y]_t \triangleq \sum_{s: s \leq t} \Delta M_s^X (\Delta M_s^Y)^\top \equiv 0 \quad \text{P-п.н. (почти наверное);}$$

- в. Все компоненты  $\phi_{ij}(t)$  матричнозначного процесса  $\phi(t)$  являются неотрицательными. Мера  $\Phi(u, dv)$  такова, что  $\Phi(u, [0, v]) \equiv 0$  и  $\Phi(v, [0, u]) \equiv \Phi(0, [0, u - v])$  для любых  $0 \leq v \leq u$ . Она допускает разложение  $\Phi(u, \cdot) = \Phi^c(u, \cdot) + \Phi^d(u, \cdot)$ , где  $\Phi^c$  — абсолютно непрерывная по мере Лебега, а  $\Phi^d$  — дискретная (считающая) составляющая;  $\Phi^d$  содержит лишь конечное множество скачков. Для процесса  $\phi$  и меры  $\Phi$  при любых  $e_i \in \mathbb{S}^N$  и  $t \geq 0$  выполняются условия

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{1}\phi(t)e_j > 0, \\ \mathbf{1}\phi(t)e_j \Phi(0, \{t\}) \leq 1, \\ \exp \left[ - \int_0^{+\infty} \mathbf{1}\phi(s)e_j \Phi^c(0, ds) \right] \prod_{s_k > 0} \left( 1 - \mathbf{1}\phi(s_k)e_j \Phi^d(0, \{s_k\}) \right) \equiv 0, \end{cases}$$

где  $\mathbf{1}$  — вектор-строка подходящей размерности.

Задача СК-оптимальной фильтрации состояния МСП  $X_t$  по имеющимся наблюдениям  $Y$  заключается в построении такой  $\mathcal{O}_t$ -согласованной оценки  $\widehat{X}_t$ , что

$$\mathbb{E} \left\{ \|\widehat{X}_t - X_t\|^2 \right\} \leq \mathbb{E} \left\{ \|\overline{X}_t - X_t\|^2 \right\}$$

для любой другой  $\mathcal{O}_t$ -согласованной оценки  $\overline{X}_t$ .

Представленные выше условия обеспечивают корректность мартингального представления векторного процесса со считающими компонентами (2), непрерывность справа потока  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathcal{O}_t\}$  и, в итоге, возможность использовать результаты решения общей задачи оптимальной нелинейной фильтрации [1, 2]. Детали верификации этих условий для рассматриваемого в статье класса систем наблюдения приведены в [3].

Известно, что оптимум СК-критерию доставляет условное математическое ожидание (УМО) оцениваемого состояния по имеющимся наблюдениям  $\widehat{X}_t \triangleq \mathbb{E} \{X_t | \mathcal{O}_t\}$ . Задача сводится к определению уравнений, задающих искомое УМО и численных методов их решения.

Наблюдаемому процессу со считающими компонентами  $Y_t$  может быть поставлен в соответствие мультивариантный точечный процесс, определенный последовательностью пар  $\{(\tau_n, r_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Пусть  $\mathfrak{D}_n \triangleq \sigma\{(\tau_k, r_k), k \leq n\}$  — неубывающая последовательность  $\sigma$ -алгебр, порожденная первыми  $n$  скачками процесса  $Y_t$ . Ограничения (3) имеют следующую интерпретацию. Пара  $(\phi, \Phi)$  характеризует “мгновенные” характеристики совместного распределения моментов  $\tau_n$  и скачков  $r_n$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \tau_{n-1} < s, \tau_n \in [s, s + ds), r_n = f_i | \mathcal{F}_s^X \vee \mathfrak{D}_{n-1} \vee \{\tau_n \geq s\} \right\} = \\ = f_i^\top \phi(s - \tau_{n-1}) X_{s-} \Phi(\tau_{n-1}, ds). \end{aligned}$$

Из этого равенства следует неотрицательность пары  $(\phi, \Phi)$ . Первое неравенство в (3) регуляризует обращение в нуль произведения в правой части последнего равенства: оно может происходить только из-за равенства нулю меры  $\Phi$ . Данное ограничение вполне стандартно: например, пуассоновский процесс корректно определен лишь в случае, когда его интенсивность строго положительна. Остальные условия (3) гарантируют, что длины интервалов  $\tau_n - \tau_{n-1}$  между скачками в процессе наблюдений  $Y_t$  являются *обычными* (нерасширенными) случайными величинами. Действительно, из [3, лемма 1] следует, что условное распределение момента скачка  $\tau_n$  относительно  $\mathfrak{D}_{n-1} \vee \mathcal{F}^X$  имеет вид

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \tau_n \leq t | \mathfrak{D}_{n-1} \vee \mathcal{F}^X \right\} = \\ & = \mathbf{I}(t - \tau_{n-1}) \left( 1 - \exp \left( - \int_{\tau_{n-1}}^t \mathbf{1} \phi(s - \tau_{n-1}) X_{s-} \Phi^c(\tau_{n-1}, ds) \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{s_k < t - \tau_{n-1}} \left( 1 - \mathbf{1} \phi(s_k - \tau_{n-1}) X_{s_k-} \Phi^d(\tau_{n-1}, \{s_k\}) \right) \right). \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что второе и третье условия (3) совместно обеспечивают для данной функции распределения выполнение базовых свойств: неотрицательности, монотонного неубывания и нормировки.

Введем в рассмотрение  $\mathcal{O}_t$ -согласованные процесс

$$(4) \quad \psi(t) \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{I}_{(\tau_{n-1}, \tau_n]}(t) \phi(t - \tau_{n-1})$$

и меру

$$(5) \quad \Psi(dt) \equiv \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{I}_{(\tau_{n-1}, \tau_n]}(t) \Phi(\tau_{n-1}, dt).$$

Оценка оптимальной фильтрации является сильным решением стохастической системы [3]

$$(6) \quad \begin{aligned} \widehat{X}_t = p_0 + \int_0^t \Lambda^\top \widehat{X}_s ds + \\ + \int_0^t k(s-) \psi^\top(s) \left( (\Delta Y_s^\top \psi(s) \widehat{X}_{s-})^+ dY_s - \mathbf{1}^\top \Psi(ds) \right) + \\ + \int_0^t \mathbf{I}_{\{1\}}(\mathbf{1} \psi(s) \widehat{X}_{s-} \Psi(\{s\})) (I - \Psi(\{s\}) \text{diag}(\mathbf{1} \psi(s))) \widehat{X}_{s-} \mathbf{1} dY_s, \end{aligned}$$

где  $\Delta Y_t \triangleq (Y_t - Y_{t-})$  — функция скачков наблюдений,  $k(t) \triangleq \text{diag}(\widehat{X}_t) - \widehat{X}_t \widehat{X}_t^\top = \text{cov}(\widehat{X}_t, \widehat{X}_t | \mathcal{O}_t)$  — условная ковариация оценки  $\widehat{X}_t$ , а  $(\cdot)^+$  — операция псевдообращения.

### 3. Алгоритм робастной фильтрации, основанный на диффузионной аппроксимации наблюдений

Рассмотрим вспомогательные  $M$ -мерные процессы со считающими компонентами

$$(7) \quad Y_t^j = \int_0^t \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{I}_{(\tau_{n-1}^j, \tau_n^j]}(s) \phi(s - \tau_{n-1}^j) e_j \Phi(\tau_{n-1}^j, ds) + M_t^j, \quad j = \overline{1, N},$$

где  $M_t^j$  — некоторые мартингалы. Все  $\{Y_t^j\}$  являются однородными процессами восстановления, а распределение времени между их скачками и распределение скачков описываются следующими функциями (доказательство см. в [3]):

$$F_j(t) \triangleq \mathbf{P} \left\{ \tau_1^j \leq t \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \exp \left( - \int_0^t \mathbf{1} \phi(s) e_j \Phi^c(0, ds) \right) \prod_{s_k < t} \left( 1 - \mathbf{1} \phi(s_k) e_j \Phi^d(0, \{s_k\}) \right), \\
&F_{ij}(t) \triangleq \mathbb{P} \left\{ \tau_1^j \leq t, Y_{\tau_1^j}^j = f_i \right\} = \\
&= \int_0^t f_i^\top \phi(s) e_j \exp \left( - \int_0^s \mathbf{1} \phi(u) e_j \Phi^c(0, du) \right) \prod_{u_k < t} \left( 1 - \mathbf{1} \phi(u_k) e_j \Phi^d(0, \{u_k\}) \right) \Phi(0, ds).
\end{aligned}$$

Анализируя формулу для  $F_j$ , легко видеть, что условия (3) являются достаточно необременительными: в качестве распределения длины интервалов времени между скачками  $Y^j$  они допускают любые регулярные распределения на положительной полуоси, содержащие конечное число скачков.

Применим к данным процессам центральную предельную теорему для обобщенных процессов восстановления (ЦПТОПВ) [16]. Так как скачки процессов  $Y^j$  являются случайными величинами с конечным множеством возможных значений  $\mathbb{S}^M$ , то для них существуют моменты любого порядка: в частности,  $m_j^Y \triangleq \mathbb{E} \left\{ Y_{\tau_1^j}^j \right\}$  и  $K_j^Y \triangleq \text{cov}(Y_{\tau_1^j}^j, Y_{\tau_1^j}^j) = \text{diag}(m_j^Y) - m_j^Y (m_j^Y)^\top$ . Дополнительно предполагается, что для любых  $j = \overline{1, N}$  величины  $\tau_1^j$  имеют моменты до второго включительно:  $m_j^\tau \triangleq \mathbb{E} \left\{ \tau_1^j \right\}$ ,  $\sigma_j^\tau \triangleq \sqrt{\text{D} \left\{ \tau_1^j \right\}}$ .

Рассмотрим  $N$  вспомогательных случайных векторов  $\gamma_j \triangleq Y_{\tau_1^j}^j - \frac{\tau_1^j}{m_j^\tau} m_j^Y$ ,  $j = \overline{1, N}$ . Они являются центрированными с ковариационными матрицами

$$\begin{aligned}
K_j^\gamma &\triangleq \text{cov}(\gamma_j, \gamma_j) = \\
&= \text{diag}(m_j^Y) - \left( 1 - \left( \frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau} \right)^2 \right) m_j^Y (m_j^Y)^\top - \\
&- \frac{1}{m_j^\tau} \left( \text{cov} \left( Y_{\tau_1^j}^j, \tau_1^j \right) (m_j^Y)^\top + m_j^Y \text{cov} \left( \tau_1^j, Y_{\tau_1^j}^j \right) \right).
\end{aligned}$$

Подберем для всех  $K_j^\gamma$  такую общую  $(L \times M)$ -мерную матрицу  $Z$  ( $L \leq M$ ), что преобразованные матрицы  $ZK_j^\gamma Z^\top$  невырождены для всех  $j = \overline{1, N}$ . Тогда по ЦПТОПВ [16] при  $t \rightarrow \infty$  имеет место слабая сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{t}} Z \left( Y_t^j - \frac{t}{m_j^\tau} m_j^Y \right) \xrightarrow{\text{Law}} \mathcal{N} \left( 0, \frac{1}{m_j^\tau} ZK_j^\gamma Z^\top \right).$$

Легко видеть, что (7) похожи на наблюдаемый процесс (2): распределение  $Y_t$  совпадает с распределением  $Y_t^j$  при условии  $X_t(\omega) \equiv e_j$ . Поэтому диффузионная аппроксимация распределения процессов (7) будет приближенно выполняться и для исходных наблюдений (2), если считать, что темп смены

состояний МСП  $X_t$  будет много меньше темпа скачков наблюдений. Для этого дополнительно предположим, что для системы (1) и (2) выполнено условие

$$(8) \quad \max_j m_j^\tau \ll \Delta \ll \frac{1}{\max_j |\lambda_{jj}|}$$

для некоторого шага  $\Delta > 0$ . Левое неравенство (8) обеспечивает в силу ЦПТОПВ приближенные равенства

$$(9) \quad Law \left( \frac{1}{\sqrt{\Delta}} Z \left( Y_{n\Delta}^j - Y_{(n-1)\Delta}^j - \frac{\Delta}{m_j^\tau} m_j^Y \right) \right) \approx \mathcal{N} \left( 0, \frac{1}{m_j^\tau} Z K_j^\gamma Z^\top \right), \quad j = \overline{1, N}.$$

Правое неравенство (8) обеспечивает малую вероятность того, что на временном интервале длины  $\Delta$  МСП  $X_t$  совершит хотя бы один скачок:

$$\mathbb{P} \{ X_t \equiv X_{(n-1)\Delta}, t \in [(n-1)\Delta, n\Delta] \} = 1 - \max_j |\lambda_{jj}| \Delta + o(\max_j |\lambda_{jj}| \Delta).$$

Пусть  $\nu_n$  — число скачков состояния  $X$ , произошедших на интервале  $[(n-1)\Delta, n\Delta]$ , тогда в силу неравенства Берри—Эссеена

$$(10) \quad \left\| Law \left( \frac{1}{\sqrt{\Delta}} Z (Y_{n\Delta} - Y_{(n-1)\Delta}) \mid \mathcal{F}^X \right) - \sum_{j=1}^N e_j^\top X_{n\Delta} \mathcal{N} \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{m_j^\tau} Z m_j^Y, \frac{1}{m_j^\tau} Z K_j^\gamma Z^\top \right) \right\|_\infty \leq [1 - \mathbf{I}_{\{0\}}(\nu_n)] (\max_j |\lambda_{jj}| \Delta + o(\Delta)) + \mathbf{I}_{\{0\}}(\nu_n) C \Delta^{-1/2}$$

для некоторой константы  $C$ , зависящей от вторых и третьих моментов приращений  $Y_{n\Delta} - Y_{(n-1)\Delta}$ .

Итак, рассмотрим систему наблюдения в дискретном времени, полученную из (1), (2):

$$(11) \quad \begin{cases} x_n \triangleq X_{n\Delta}, \\ y_n \triangleq \frac{1}{\sqrt{\Delta}} Z (Y_{n\Delta} - Y_{(n-1)\Delta}). \end{cases}$$

Левая часть неравенства (10) обеспечивает ее приближенное описание динамической моделью:

$$(12) \quad \begin{cases} x_n = P^\top x_{n-1} + \varepsilon_n, \\ y_n = \sum_{j=1}^N e_j^\top x_n \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{m_j^\tau} Z m_j^Y + \left( \frac{1}{m_j^\tau} Z K_j^\gamma Z^\top \right)^{1/2} V_n \right), \end{cases}$$



где  $P \triangleq \exp(\Delta\Lambda)$ ,  $\{\varepsilon_n\}$  —  $\mathcal{F}_{n\Delta}^X$ -согласованная мартингал-разность,  $\{V_n\}$  — независимый от  $\{x_n\}$   $L$ -мерный гауссовский стандартный дискретный белый шум.

Предлагаемый алгоритм робастной фильтрации совпадает с алгоритмом оптимальной нелинейной фильтрации [17] состояния системы (12):

а) начальное условие

$$(13) \quad \bar{X}_0 = p_0;$$

б) рекуррентная двухшаговая процедура вычисления в точках  $\{n\Delta\}$ :

$$(14) \quad \bar{X}_{n\Delta} = P^\top \bar{X}_{(n-1)\Delta}$$

— прогноз,

$$(15) \quad \bar{X}_{n\Delta}^j = \frac{\bar{X}_{n\Delta}^j \mathcal{G}(y_n, \mu_j, \varkappa_j)}{\sum_{\ell=1}^N \bar{X}_{n\Delta}^\ell \mathcal{G}(y_n, \mu_\ell, \varkappa_\ell)}, \quad j = \overline{1, N},$$

— коррекция;

в) вычисление оценки во внутренних точках интервалов  $t \in ((n-1)\Delta, n\Delta)$ :

$$(16) \quad \bar{X}_t = \exp((t - (n-1)\Delta)\Lambda^\top) \bar{X}_{(n-1)\Delta}.$$

В данном алгоритме обозначение

$$\mathcal{G}(y, m, K) \triangleq (2\pi)^{-M/2} (\det K)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(y - m)^\top K^{-1}(y - m)\right)$$

относится к гауссовской плотности со средним  $m$  и невырожденной ковариационной матрицей  $K$ , а моментные характеристики  $\mu_j$  и  $\varkappa_j$  в (15) вычисляются по формулам:

$$(17) \quad \mu_j = \frac{\sqrt{\Delta}}{m_j^\gamma} Z m_j^Y, \quad \varkappa_j = \frac{1}{m_j^\gamma} Z K_j^\gamma Z^\top, \quad j = \overline{1, N}.$$

#### 4. Численный пример: мониторинг состояния RTP-канала

Рассмотрим прикладную задачу оперативного оценивания состояния гетерогенного телекоммуникационного канала, функционирующего под управлением протокола RTP, по потоку пакетов, регистрируемому на узле-получателе. Численные эксперименты выполнялись по смоделированным данным, однако параметры воспроизводимого RTP-канала выбирались близкими к характеристикам, вычисленным по реальным данным функционирования VoIP сервиса Linphone в телекоммуникационной сети с “последней милей” 3G [18]. Необходимость в синтетических данных возникла из-за особенностей тестов, демонстрирующих свойства предлагаемого робастного алгоритма. Для сравнительного анализа оценок требуется моделирование потоков пакетов с различными заданными распределениями и знание точного состояния МСП, которое в натуральных экспериментах вряд ли достижимо.

RTT-канал описывается однородным МСП с матрицей интенсивностей переходов  $\Lambda$  и тремя возможными состояниями:

$e_1$  — малая загрузка канала,

$e_2$  — умеренная загрузка канала,

$e_3$  — перегрузка проводного участка или потеря сигнала на беспроводном участке.

Текущее состояние RTT-канала недоступно прямому наблюдению, однако на узле-приемнике имеется статистическая информация в виде входящего потока RTT-пакетов. Его особой чертой является возможность одновременного получения не одного, а целой “пачки” пакетов. Дело в том, что низкоуровневые протоколы, являющиеся базой для RTT, сконструированы таким образом, чтобы обеспечивать в условиях меняющегося качества канала требуемую среднюю скорость передачи. Данная характеристика обеспечивается на узле-передатчике с помощью управляемого буфера передачи. В случае хороших условий передачи размер буфера передатчика мал и отправка происходит интенсивно, но относительно малыми “пачками”. При ухудшении состояния канала размер буфера увеличивается и отправка пакетов происходит менее интенсивно и большими “пачками”.

Распределение потока “пачек” пакетов полностью характеризуется парами  $\{(p^\tau(t|e_j), P^Y(n|e_j))\}_j$ , где  $p^\tau(t|e_j)$  — плотность распределения времени  $\tau$  между получением последовательных “пачек” пакетов при условии, что канал находится в состоянии  $e_j$ , а  $P^Y(n|e_j)$  — распределение размера  $Y$  “пачки” при том же условии. Предполагается, что при известном состоянии канала время  $\tau$  и размер “пачки”  $Y$  независимы между собой.

Практическая задача состоит в конструировании аппаратно-независимого монитора RTT-канала на узле-получателе, т.е. в создании алгоритма оценивания в реальном масштабе времени состояния канала по наблюдениям потока принимаемых пакетов.

Решим эту задачу для разных комплексов априорной информации о распределении потока пакетов:

а) распределения  $\{(p^\tau(t|e_j), P^Y(n|e_j))\}$  известны точно;

б) набор  $\{(p^\tau(t|e_j), P^Y(n|e_j))\}$  неизвестен, но даны предполагаемые распределения  $\{(\tilde{p}^\tau(t|e_j), \tilde{P}^Y(n|e_j))\}$ ;

в) набор  $\{(p^\tau(t|e_j), P^Y(n|e_j))\}$  неизвестен, однако для него даны моментные характеристики

$$m_j^\tau \triangleq E \{\tau|e_j\}, \quad \sigma_j^\tau \triangleq \sqrt{D \{\tau|e_j\}}, \quad m_j^Y \triangleq E \{Y|e_j\} \quad \text{и} \quad \sigma_j^Y \triangleq \sqrt{D \{Y|e_j\}}.$$

Задачи определения параметров системы наблюдения (1), (2) по статистической информации не являются предметом изучения данной статьи, их можно решать, применяя различные процедуры адаптивной идентификации, включая EM-алгоритм [17] и его модификации [19].

Если о потоке пакетов доступен комплекс информации п. а), то для решения задачи оценивания в реальном масштабе времени может быть применен алгоритм оптимальной фильтрации (6), в котором элементы  $\phi_{nj}(t)$  матрицы

интенсивности  $\phi(t)$  в  $\psi$  (4) определены формулой

$$\phi_{nj}(t) = P^Y(n|e_j)p^\tau(t|e_j) \left( \int_t^{+\infty} p^\tau(s|e_j)ds \right)^+,$$

а мера (5)  $\Psi(dt) = dt$ . Здесь  $j = 1, 2, 3$  — номер возможного состояния РТР-соединения,  $n = \overline{1, M}$  — объем “пачек” пакетов.

Если о потоке пакетов доступен комплекс информации п. б), то для решения задачи можно использовать тот же алгоритм (6), подставив в него вместо реальных распределений предполагаемые  $\{(\tilde{p}^\tau(t|e_j), \tilde{P}^Y(n|e_j))\}$ .

Если о потоке пакетов доступен комплекс информации п. в), то для оценивания состояния канала можно использовать предложенный алгоритм робастной фильтрации (13)—(17) после предварительного семплирования наблюдений.

Пусть для системы наблюдения, описывающей функционирование РТР-соединения, выполнено условие (8) для значения шага дискретизации  $\Delta$ . Исходный наблюдаемый процесс  $Y_t = \text{col}(Y_t^1, \dots, Y_t^M)$  содержит в качестве компонент счетчики “пачек” пакетов объема  $n = \overline{1, M}$ : компонента  $Y_t^n$  равна числу “пачек” размера  $n$ , зарегистрированных получателем за время  $[0, t]$ . Тогда в семплированных наблюдениях

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \nu_r^\tau \\ \nu_r^Y \end{bmatrix} \triangleq \Delta^{-1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & M \end{bmatrix} (Y_{r\Delta} - Y_{(r-1)\Delta}),$$

т.е. в качестве первой компоненты  $\nu_r^\tau$  выступает число “пачек”, полученных на интервале  $((r-1)\Delta, r\Delta]$ , умноженное на  $\Delta^{-1/2}$ , а в качестве второй компоненты  $\nu_r^Y$  — масштабированный таким же образом общий объем пакетов, полученных в этих “пачках”. Применение ЦПТОПВ к наблюдениям (18) позволяет вычислить параметры (17) диффузионной аппроксимации в данной задаче:

$$(19) \quad \mu_j = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{m_j^\tau} \\ \frac{\sqrt{\Delta}m_j^Y}{m_j^\tau} \end{bmatrix},$$

$$\varkappa_j = \frac{1}{m_j^\tau} \begin{bmatrix} \left( \frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau} \right)^2 & \left( \frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau} \right)^2 m_j^Y \\ \left( \frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau} \right)^2 m_j^Y & (\sigma_j^Y)^2 + \left( \frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau} \right)^2 (m_j^Y)^2 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3.$$

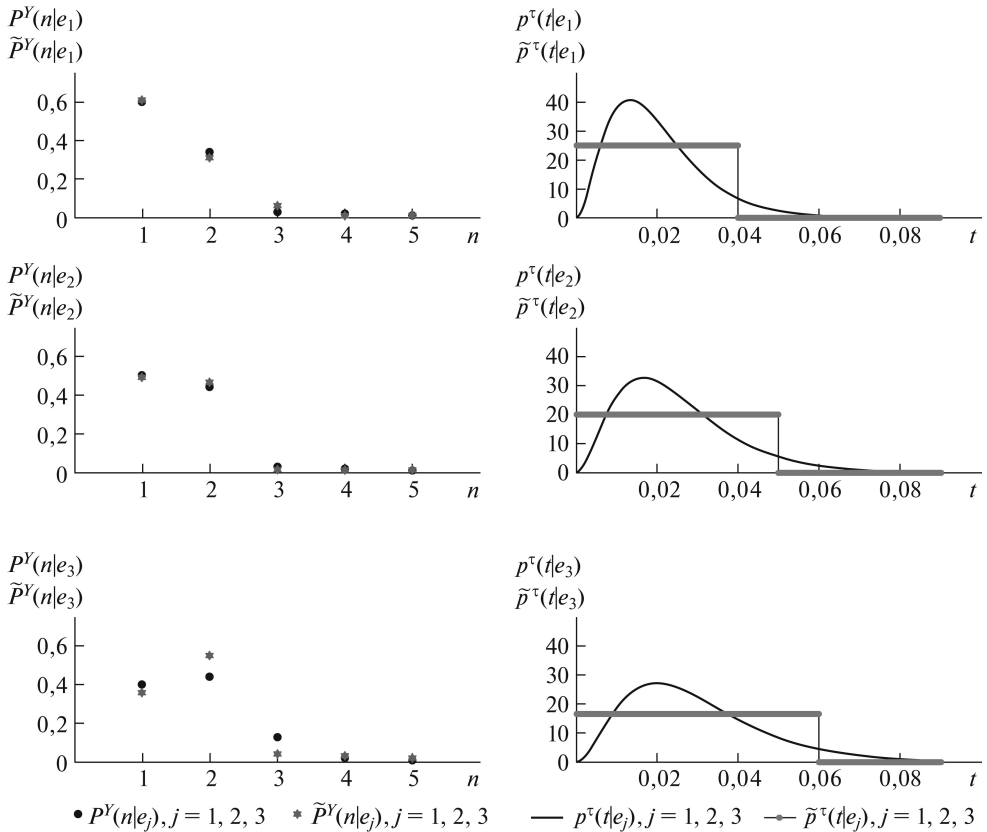


Рис. 1. Истинные ( $p^\tau(t|e_j), P^Y(n|e_j)$ ) и предполагаемые ( $\tilde{p}^\tau(t|e_j), \tilde{P}^Y(n|e_j)$ ) распределения пары “время между получением — число пакетов в пачке” (в зависимости от состояния  $e_j$  канала).

Комплекс численных экспериментов проводился для системы наблюдения с параметрами:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0,002171 & 0,001964 & 0,000207 \\ 0,002442 & -0,003161 & 0,000719 \\ 0,001665 & 0,000666 & -0,002331 \end{bmatrix}, \quad p_0 = \begin{bmatrix} 0,5039 \\ 0,3449 \\ 0,1512 \end{bmatrix}, \quad M = 5, \quad \Delta = 1,5.$$

Наборы истинных ( $p^\tau(t|e_j), P^Y(n|e_j)$ ) и предполагаемых ( $\tilde{p}^\tau(t|e_j), \tilde{P}^Y(n|e_j)$ ) условных распределений представлены в табл. 1 и 2, а их графики — на рис. 1. Параметры распределений подобраны таким образом, чтобы моментные характеристики истинных и предполагаемых распределений совпадали для  $j = 1, 2, 3$ :  $\hat{m}_j^\tau \equiv m_j^\tau$ ,  $\hat{\sigma}_j^\tau \equiv \sigma_j^\tau$ ,  $\hat{m}_j^Y \equiv m_j^Y$  и  $\hat{\sigma}_j^Y \equiv \sigma_j^Y$ .

Для демонстрации качества используемой диффузионной аппроксимации были смоделированы отрезки длительностью  $T = 100000$  секунд потоков RTP-пакетов с истинным и предполагаемым распределениями. По получившимся семплированным наблюдениям  $\{(\sqrt{\Delta}\tilde{\nu}_r^\tau, \sqrt{\Delta}\nu_r^Y)\}$  и  $\{(\sqrt{\Delta}\tilde{\nu}_r^\tau, \sqrt{\Delta}\tilde{\nu}_r^Y)\}$  для обоих потоков были построены соответствующие гистограммы  $\pi^\tau(x)$ ,

$\pi^Y(x)$ ,  $\tilde{\pi}^\tau(x)$  и  $\tilde{\pi}^Y(x)$ . Так как начальное условие  $p_0$  подобрано в данном эксперименте стационарным для матрицы  $\Lambda$ , то если временной шаг  $\Delta$  достаточен для правомерности применения ЦПТОПВ, можно ожидать, что гистограммы в парах  $(\pi^\tau(x), \tilde{\pi}^\tau(x))$  и  $(\pi^Y(x), \tilde{\pi}^Y(x))$  будут схожи между собой и близки к следующим теоретическим плотностям — трехкомпонентным смесям гауссовских распределений:

$$q^\tau(x) = \sum_{j=1}^3 p_0^j \mathcal{G} \left( x, \frac{\Delta}{m_j^\tau}, \frac{\Delta}{m_j^\tau} \left( \frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau} \right)^2 \right),$$

$$q^Y(x) = \sum_{j=1}^3 p_0^j \mathcal{G} \left( x, \frac{\Delta m_j^Y}{m_j^\tau}, \frac{\Delta}{m_j^\tau} \left[ (\sigma_j^\tau)^2 + \left( \frac{\sigma_j^\tau}{m_j^\tau} \right)^2 (m_j^Y)^2 \right] \right).$$

Перечисленные выше гистограммы, теоретические плотности  $q^\tau(x)$  и  $q^Y(x)$  и отдельные гауссовские “моды”  $q_j^\tau(x)$  и  $q_j^Y(x)$  — слагаемые в двух последних суммах, представлены на рис. 2. Конечно, формальные статистические тесты на проверку принадлежности выборок, по которым построены гистограммы, единой генеральной совокупности из предлагаемых теоретических распределений, дадут отрицательный результат при любом осмысленном выборе уровня доверительной вероятности. Тем не менее следует отметить несомненное визуальное сходство графиков в тройках  $(\pi^\tau(x), \tilde{\pi}^\tau(x), q^\tau(x))$  и

**Таблица 1.** Распределения времени между “пачками”

		Распределение	Параметр 1	Параметр 2
Истинное распределение $p^\tau(t e_j)$	$e_1$	Гамма	3	$\frac{1}{150}$
	$e_2$	Гамма	3	$\frac{1}{120}$
	$e_3$	Гамма	3	$\frac{1}{100}$
Предполагаемое распределение $\tilde{p}^\tau(t e_j)$		Распределение	Параметр 1	Параметр 2
	$e_1$	Равномерное	0	0,04
	$e_2$	Равномерное	0	0,05
	$e_3$	Равномерное	0	0,06

**Таблица 2.** Распределения объема “пачек”

		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
Истинное распределение $P^Y(n e_j)$	$e_1$	0,6	0,34	0,03	0,02	0,01
	$e_2$	0,5	0,44	0,03	0,02	0,01
	$e_3$	0,4	0,44	0,13	0,02	0,01
Предполагаемое распределение $\tilde{P}^Y(n e_j)$		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
	$e_1$	0,61	0,31	0,06	0,01	0,01
	$e_2$	0,49	0,465	0,015	0,015	0,015
	$e_3$	0,36	0,55	0,04	0,03	0,02

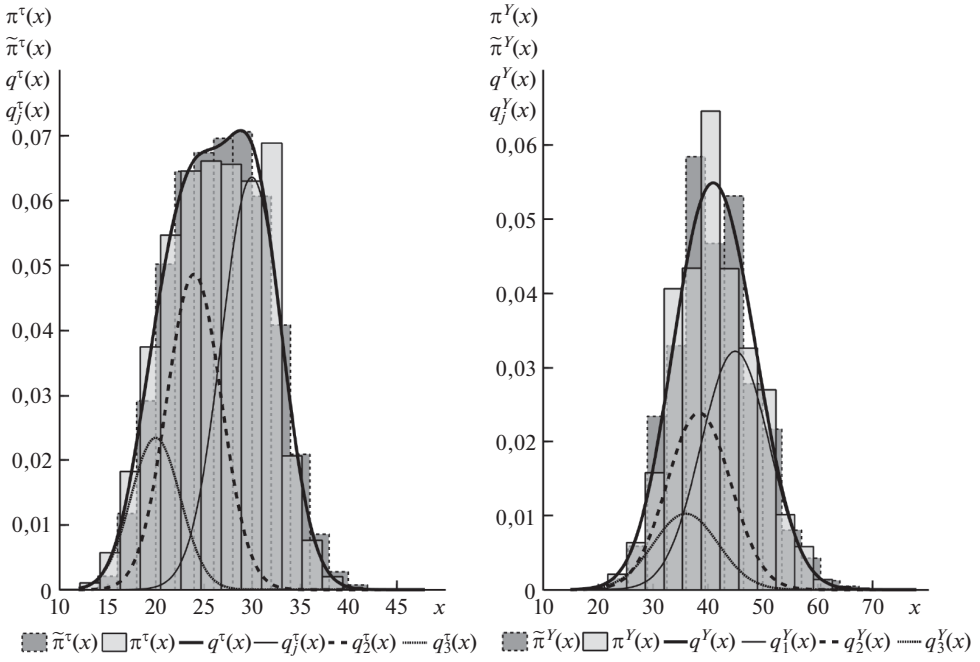


Рис. 2. Гистограммы  $\pi^Y(x)$ ,  $\pi^\tau(x)$  и  $\tilde{\pi}^Y(x)$ ,  $\tilde{\pi}^\tau(x)$ , построенные по семплированным наблюдениям с истинным и предполагаемым распределением, в сравнении с теоретическими плотностями  $q^Y(x)$ ,  $q^\tau(x)$  и отдельными гауссовским модами  $q_j^Y(x)$ ,  $q_j^\tau(x)$ .

( $\pi^Y(x)$ ,  $\tilde{\pi}^Y(x)$ ,  $q^Y(x)$ ), что позволяет сделать положительный вывод о возможности применения к имеющимся наблюдениям диффузионной аппроксимации.

На рис. 3 представлена часть семплированных наблюдений, соответствующих потоку RTP-пакетов с истинным распределением, в сравнении с текущим состоянием соединения  $X_t$ , полученная на отрезке времени  $[0; 1000 \text{ с}]$ . По данным наблюдениям вычислены три оценки фильтрации:

оценка  $\hat{X}_t$  построена по комплексу п. а) априорной информации о потоке пакетов: оптимальная нелинейная оценка,

оценка  $\tilde{X}_t$  построена по комплексу п. б) априорной информации о потоке пакетов: оценка, вычисленная по формулам оптимальной нелинейной фильтрации и набору предполагаемых распределений,

оценка  $\bar{X}_t$  построена по комплексу п. в) априорной информации о потоке пакетов: оценка, вычисленная с помощью предлагаемого робастного алгоритма.

Графики этих оценок приведены на рис. 4 в сравнении с истинным состоянием  $X_t$ . Из рис. 4 видно, что точность робастной оценки  $\bar{X}_t$  мало проигрывает в сравнении с точностью оптимальной оценки  $\hat{X}_t$ . В то же время оценка  $\tilde{X}_t$ , вычисленная по оптимальному алгоритму, но предполагаемым распределениям, отличающимся от истинных, демонстрирует осциллирую-

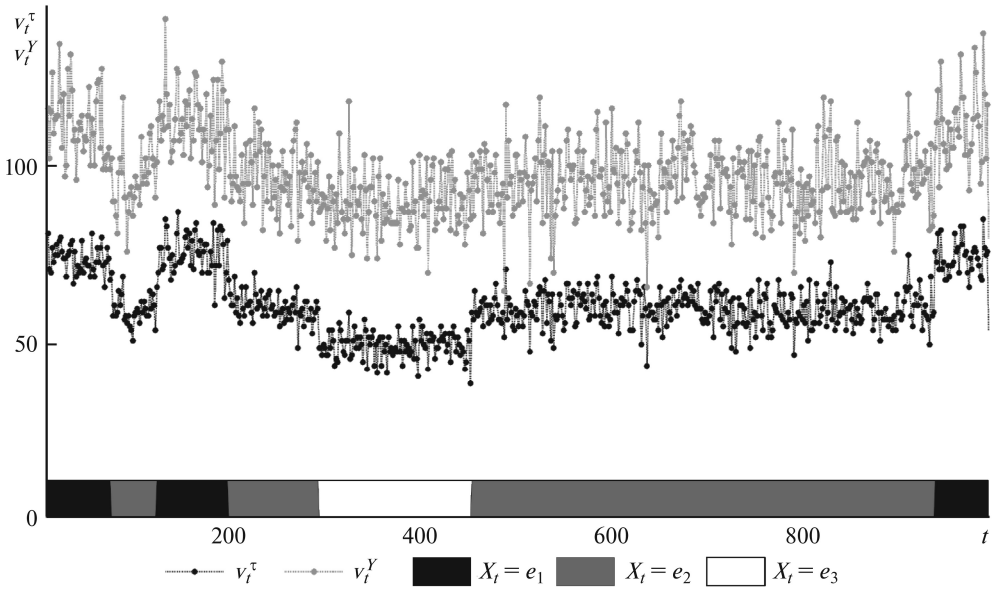


Рис. 3. Семплированные наблюдения “суммарное число пакетов — число пакетов” ( $v_t^Y, v_t^T$ ), подготовленные для робастной фильтрации, на фоне состояния  $X_t$ .

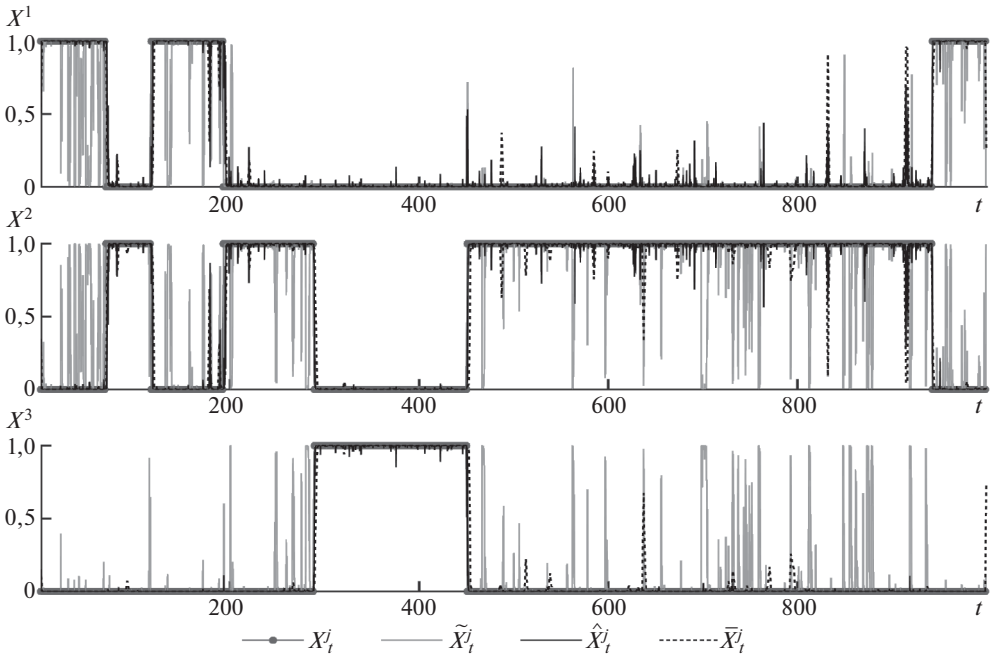


Рис. 4. Истинное состояние  $X_t$ , оценки  $\bar{X}_t$  робастной фильтрации, оптимальной фильтрации с истинными  $\hat{X}_t$  и предполагаемыми  $\tilde{X}_t$  распределениями.

щий характер и сильно проигрывает двум упомянутым выше оценкам. По траекториям процесса и наблюдений длиной  $T = 100000$  сек были вычислены выборочные средние следующих показателей точности:

$$E \left\{ \|\widehat{X}_t - X_t\|^2 \right\} = 0,018, \quad E \left\{ \|\overline{X}_t - X_t\|^2 \right\} = 0,0396 \quad \text{и} \quad E \left\{ \|\widetilde{X}_t - X_t\|^2 \right\} = 0,1273.$$

При этом теоретически можно вычислить средний квадрат самого МСП:

$$E \left\{ \|X_t - p_0\|^2 \right\} = 1 - \|p_0\|^2 = 0,3957.$$

Таким образом, дисперсия ошибки оценки робастной фильтрации превышает оптимальный параметр более чем в 2 раза, но оценка, вычисленная по оптимальному алгоритму, но предполагаемым распределениям — более чем в 7 раз. При этом отношение “мощность оцениваемого сигнала / мощность оставшегося шума” у оценок  $\widehat{X}_t$ ,  $\overline{X}_t$  и  $\widetilde{X}_t$  составляют соответственно 21,98, 9,99 и 3,11.

Представленные результаты иллюстрируют весьма высокую точность предлагаемого алгоритма робастной фильтрации: по своему качеству он очень близок к оптимальному. При этом его реализация менее ресурсоемкая. На шаге дискретизации  $\Delta$  алгоритм “прогноз—коррекция” выполняется единожды, причем матрица  $P$  вычислена для всех шагов один раз заранее. В то же время анализируя правую часть рис. 2, можно сделать вывод, что уравнение оптимальной фильтрации на одном шаге дискретизации  $\Delta$  численно решается от 12 до 45 раз: такое число “пачек” пакетов поступает на узел-получатель за время  $\Delta$ .

## 5. Заключение

В статье представлен новый алгоритм робастной фильтрации состояний МСП по многомерным считающим наблюдениям. Предлагаемый алгоритм разработан для такого класса моделей наблюдения, в которых интенсивность поступления наблюдений много больше интенсивности смены оцениваемого состояния. Это условие позволяет использовать вместо точного описания процесса наблюдений его диффузионную аппроксимацию и значительно упростить процедуру вычисления оценок фильтрации. При незначительных потерях в качестве оценивания по сравнению с оптимальным робастные оценки являются устойчивыми к априорной неопределенности распределения процесса наблюдений, в отличие от оптимальных. Это свойство продемонстрировано на численном примере мониторинга состояния RTP-соединения по наблюдениям высокочастотного потока пакетов на узле-получателе.

Исследования в области создания устойчивых алгоритмов оценивания состояний МСП по считающим наблюдениям нельзя считать законченными: их планируется продолжать по следующим направлениям. Во-первых, предлагаемый робастный алгоритм может быть дополнительно оптимизирован за счет выбора подходящей матрицы преобразования наблюдений  $Z$ . В теоретической части данной статьи к  $Z$  предъявляется только условие, обеспечивающее невырожденность ковариационных матриц диффузионных аппроксимаций распределения семплированных наблюдений. В численном примере



конкретный вид матрицы  $Z$  был выбран исходя из физической подоплеки наблюдений: в результате преобразования в качестве наблюдений выступали пары “число полученных “пачек” пакетов — общее число пакетов в пачках”, но этот выбор явно не единственный.

Во-вторых, представляется интересным получить количественные характеристики потери точности при переходе к диффузионной аппроксимации наблюдений. В-третьих, важными могли бы являться результаты исследований устойчивости робастного алгоритма фильтрации по отношению к неточному знанию моментных характеристик как наблюдений, так и самого состояния. В-четвертых, интерес представляет развитие предлагаемого робастного подхода для решения задачи идентификации параметров соответствующих систем наблюдения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liptser R., Shiriyayev A.* Statistics of Random Processes. II: Applications. N.Y.: Springer-Verlag, 2001.
2. *Луицер Р., Ширяев А.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
3. *Борисов А.* Применение алгоритмов оптимальной фильтрации для решения задачи мониторинга доступности удаленного сервера // Информатика и ее применения. 2014. V. 8. № 3. С. 34–50.
4. *Борисов А.* Применение методов оптимальной фильтрации для оперативного оценивания состояний сетей массового обслуживания // АиТ. 2016. № 2. С. 115–141.  
*Borisov A.* Application of Optimal Filtering Methods for On-line of Queueing Network States // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 2. P. 277–296.
5. *Cont R., Stoikov S., Talreja R.* A Stochastic Model for Order Book Dynamics // Oper. Res. 2010. V. 58. No. 3. P. 549–563.
6. *Cont R., Larrard A.* Price Dynamics in a Markovian Limit Order Market // SIAM J. Financial Math. 2013. V. 4. No. 1. P. 1–25.
7. *Cvitanic J., Liptser R., Rozovskii B.* A Filtering Approach to Tracking Volatility from Prices Observed at Random Times // Ann. Appl. Probab. 2006. V. 16. P. 1633–1652.
8. *Liptser R., Zeitouni O.* Robust Diffusion Approximation for Nonlinear Filtering // J. Math. Syst. Est. Control. 1998. V. 8. No. 1. P. 1–22.
9. *Whitt W.* Stochastic-Process Limits. An Introduction to Stochastic-Process Limits and their Application to Queues. N.Y.: Springer, 2002.
10. *Kushner H.* Heavy Traffic Analysis of Controlled Queueing and Communication Networks. N.Y.: Springer, 2001.
11. *Коган Я., Луицер Р., Смородинский А.* Гауссовская диффузионная аппроксимация марковских замкнутых моделей сетей связи ЭВМ // Пробл. передачи информации. 1986. V. 22. № 1. С. 49–65.
12. *Kogan Y., Liptser R., Shenfeld M.* State-Dependent Beneš Buffer Model with Fast Loading Output Rates // Ann. Appl. Probab. 1995. V. 5. No. 1. P. 97–120.
13. *Кричагина Е., Луицер Р., Пухальский А.* Диффузионная аппроксимация для систем с входным потоком, зависящим от очереди, и произвольным обслуживанием // Теория вероятностей и ее применения. 1988. V. 33. № 1. С. 124–135.

14. *Misra V., Gong W., Towsley D.* Fluid-Based Analysis of Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. 2000. V. 30. No. 4. P. 151–160.
15. *Domanska J., Domanski A., Czachorski T., Klamka J.* Fluid Flow Approximation of Time-Limited TCP/UDP/XCP Streams // B. Pol. Acad. Sci. Tech. 2014. V. 62. No. 2. P. 217–225.
16. *Smith W.* Regenerative stochastic processes // Proc. Royal Society of London. Ser. A. Mathematical and Physical Sciences. 1955. V. 232. No. 1188. P. 6–31.
17. *Elliott R., Aggoun L., Moore J.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer, 2008.
18. *Борисов А., Босов А., Миллер Г.* Моделирование и мониторинг состояния VoIP-соединения // Информатика и ее применения. 2016. V. 10. № 2. С. 2–13.
19. *Королев В.* EM-алгоритм, его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор. М.: ИПИ РАН, 2007.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.*

Поступила в редакцию 17.06.2019

После доработки 16.08.2019

Принята к публикации 26.09.2019