Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

© 2020 г. А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru), С.В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru), А.С. СТЕПАНОВА (nas778810@yandex.ru) (Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет))

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ПОГЛОЩЕНИЯ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА СТАТИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Рассматривается задача о построении доверительного множества поглощения при анализе статических стохастических систем. Под доверительным множеством поглощения понимается множество начальных позиций системы, для которых система в терминальный момент не выйдет за пределы допустимых значений с заданной вероятностью. Устанавливаются свойства доверительного множества поглощения, в частности его выпуклость. На основе доверительного метода предлагается алгоритм построения внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения. Устанавливаются свойства этой аппроксимации. На основе полученных результатов решается задача о прогнозе скорости ветра в районе аэродрома посадки самолетов. Приводятся численные расчеты.

Ключевые слова: стохастическое программирование, доверительное множество поглощения, прогноз скорости ветра.

DOI: 10.31857/S0005231020040029

1. Введение

Многие реальные технические системы описываются в терминах стохастических динамических систем, критерием качества функционирования которых является некоторый статистический критерий [1]. В большинстве случаев в качестве критерия рассматривается математическое ожидание функции потерь. Но во многих прикладных задачах анализа стохастических систем встречаются критерии в виде функции квантили [2, 3]. Функция квантили (или VaR-критерий) характеризует гарантированный по вероятности результат решения задачи. Функция квантили по смыслу — это значение функции потерь, которое не будет превышено с заданной вероятностью. Функция квантили является в некотором смысле обратной к функции вероятности, которая характеризует вероятность достижения системой заданной цели. Этим задачам посвящено много публикаций. Можно привести монографии [2, 3], в которых подробно изучаются свойства функции квантили и предлагаются

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-07-00436 А).

методы ее минимизации. В [4] исследуются свойства функции вероятности и предлагаются методы ее максимизации.

Особое место в задачах анализа стохастических систем по квантильному критерию занимает задача о построении доверительного множества поглощения начальных позиций системы. Речь идет о начальных позициях системы, обеспечивающих в конечный момент времени выполнение ограничений с заданной вероятностью. Такое множество называется [3] доверительным множеством поглощения.

Доверительное множество поглощения в статических стохастических системах можно рассматривать как множество уровня функции вероятности. Свойства множества уровня тесно связаны со свойствами функции вероятности. В частности, при квазивыпуклости функции вероятности множества уровня являются выпуклыми. Свойства квазивыпуклости функции вероятности обсуждаются в [4–7]. Условия выпуклости множеств уровня для досточно больших значений вероятности исследуются в [8]. Утверждения о свойствах квазивыпуклости функции вероятности, как правило, опираются на понятия квазивогнутых и логарифмически вогнутых вероятностных мер [9–12]. Условия связности множества уровня функции вероятности получены в [13], достоинством которой является отсутствие каких-либо ограничений на распределение случайных параметров.

Множество уровня функции вероятности нетрудно построить в тех случаях, когда вероятностные ограничения могут быть заменены на детерминированные. Данный подход известен как метод детерминированного эквивалента [3]. Класс систем, к которым этот метод применим, является достаточно узким. Как правило, для его применения необходима монотонность функции потерь.

В другом частном случае, когда функция потерь представима в виде максимума функций, в которые случайные параметры входят аддитивно, для построения множества уровня функции вероятности может быть применен аппарат p-эффективных точек, введенный в [14]. По сути, p-эффективная точка является многомерным аналогом квантили распределения. Алгоритм, позволяющий получить множество p-эффективных точек дискретного случайного вектора, предложен в [15]. Нетрудно проверить, что в случае дискретного распределения с конечным числом реализаций множество p-эффективных точек конечно, что позволяет получить детерминированное описание множества уровня функции вероятности. С помощью p-эффективных точек также можно получить верхние и нижние оценки целевой функции в задаче оптимизации детерминированной функции при ограничениях на значение функции вероятности [16]. Алгоритм решения данной задачи, основанный на использовании p-эффективных точек, в случае непрерывного распределения предложен в [17]. Обзор методов решения задач с вероятностными ограничениями указанного выше типа, основанных на построении внутренних и внешних аппроксимаций множества уровня функции вероятности, приведен в [18].

Следует отметить способ построения внешней аппроксимации множества уровня функции вероятности, основанный на использовании понятия α-ядра вероятностной меры [3]. При выполнении некоторых условий регулярности с помощью ядра можно получить нижнюю оценку функции квантили, которую можно использовать для построения внешней аппроксимации доверительного множества поглощения. Методы аппроксимации α-ядра предложены в [19, 20].

Таким образом, известные методы позволяют построить доверительное множество поглощения только для весьма узкого класса стохастических систем. Поэтому актуальной является задача построения доверительного множества поглощения для стохастических систем общего вида. В настоящей статье более детально исследовано свойство доверительного множества поглощения для статической стохастической системы. В частности, приводятся условия, когда это множество выпукло. При этом функция потерь имеет достаточно общую структуру. Для построения доверительного множества поглощения предлагается использовать доверительный метод, который впервые был описан в [21] и более детально исследован в [3]. В данном случае доверительный метод позволяет построить внутреннюю аппроксимацию доверительного множества поглощения. Приводятся условия, когда граница доверительного множества поглощения переходит в границу терминального множества. Эффективность полученных результатов демонстрируется на примере, состоящем в построении множества значений скорости ветра в районе аэродрома, при которых скорость ветра по происшествии фиксированного времени не выйдет с заданной вероятностью за пределы допустимых значений, что позволяет осуществить безопасную посадку самолета.

2. Постановка задачи

Предположим, что известна зависимость $z(y, X)$ вектора $z \in \mathbb{R}^l$ терминального состояния системы от вектора начальных позиций $y \in \mathbb{R}^s$ системы и от случайного вектора $X \in \mathbb{R}^n$, влияющего на положение системы. Предполагается, что случайный вектор X имеет известную функцию распределения $F_X(x)$. Пусть вектор терминального состояния z должен удовлетворять заданным ограничениям

$$\Phi(y, X) \triangleq \tilde{\Phi}(z(y, X)) \leqslant \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}^1, \tag{2.1}$$

где функция $\tilde{\Phi}(z)$ описывает эти ограничения. Установим вероятность выполнения терминальных ограничений

$$P_\varphi(y) \triangleq \mathcal{P}\{\Phi(y, X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{2.2}$$

Требуется построить множество значений y, для которых будет выполнено это неравенство

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \triangleq \{y \colon P_\varphi(y) \geqslant \alpha\}. \tag{2.3}$$

Множество (2.3) назовем доверительным множеством поглощения.

3. Свойства доверительного множества поглощения

В [2, 3] рассматривается аналогичная задача, в которой роль функции $\Phi(u,X)$ играет функция потерь, а вместо начальных позиций y рассматриваются стратегии управления $u \in U$. Для этой функции потерь вводятся функция вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathcal{P}\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\} \tag{3.1}$$

и функция квантили

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi\colon P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}. \tag{3.2}$$

Согласно лемме Розенблатта [2, 3]

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \triangleq \{y\colon P_\varphi(y) \geqslant \alpha\} = \{y\colon \varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi\}. \tag{3.3}$$

Таким образом, для построения доверительного множества поглощения можно использовать не только свойства функции вероятности, но и свойства функции квантили.

В упомянутых публикациях приводятся условия, когда функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла, а функция вероятности $P_\varphi(u)$ квазивогнута. Приведем этот результат из [3].

Определение 1 [4]. *Вероятностная мера $\mathcal{P}$ на борелевских подмножествах $\mathbb{R}^n$ называется квазивыпуклой, если для любой пары непустых выпуклых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$\mathcal{P}(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \min\{\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)\}.$$

Здесь сумма множеств и умножение множества на число понимаются в смысле Минковского:

$$(A+B) = \{z : z = x + y,\ x \in A,\ y \in B\},$$
$$\lambda A = \{z : z = \lambda x,\ x \in A\}.$$

Приведем достаточное условие для квазивогнутости вероятностной меры.

Лемма 1 [4]. *Если случайный вектор имеет плотность вероятности $p(x)$ такую, что функция $p^{-\frac{1}{n}}(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$, то соответствующая ей вероятностная мера $\mathcal{P}$ квазивогнута.*

На основании этой леммы легко установить, что многие известные распределения имеют квазивогнутую вероятностную меру: нормальное распределение, экспоненциальное распределение, распределение Коши и т.д.

Напомним и другие определения.

Определение 2 [4]. *Функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$, называется квазивыпуклой на U, если для любых $u_1, u_2 \in U$ и любого $\lambda \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$f(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \leqslant \max\{f(u_1), f(u_2)\}.$$

Определение 3 [4]. *Функция $f(u)$, определенная на выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$, называется квазивогнутой на U, если для любых $u_1, u_2 \in U$ и любого $\lambda \in (0,1)$ выполняется неравенство*

$$f(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \geqslant \min\{f(u_1), f(u_2)\}.$$

Приведем основной результат из [3], касающийся свойств выпуклости функции квантили $\varphi_\alpha(u)$ и функции вероятности $P_\varphi(u)$.

Теорема 1 [3]. *Пусть функция потерь $\Phi(u,x)$ квазивыпукла по совокупности аргументов на $U \times \mathcal{X}$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое подмножество, а $\mathcal{X}$ — выпуклый носитель квазивогнутой вероятностной меры $\mathcal{P}$. Тогда функция вероятности $P_\varphi(u)$ квазивогнута на U для любого $\varphi \in \mathbb{R}^1$, а функция квантили $\varphi_\alpha(u)$ квазивыпукла на U для любого $\alpha \in (0,1)$.*

Из этой теоремы получаем тривиальное следствие для исследования доверительного множества поглощения.

Следствие 1. Пусть функция $\Phi(y,x)$, определяющая множество поглощения, квазивыпукла по совокупности аргументов на $\mathbb{R}^s \times \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — выпуклый носитель квазивогнутой вероятностной меры $\mathcal{P}$. Тогда доверительное множество поглощения $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ выпукло для любых $\varphi \in \mathbb{R}^1, \alpha \in (0,1)$.

Доказательство этого следствия основано на факте, что множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ играет роль множества уровня для квазивогнутой функции вероятности $P_\varphi(y)$, а множество уровня квазивогнутой функции выпукло.

Но остается вопрос: как строить доверительное множество поглощения. Это можно сделать, например, используя прямые методы, т.е. поступить следующим образом. Пусть зафиксировано некоторое конечное множество $Y \subset \mathbb{R}^s$.

Алгоритм 1.

1. Фиксируется точка $y \in Y$.

2. С помощью метода статистических испытаний оценивается вероятность $P_\varphi(y)$:

$$\widehat{P}_\varphi(y) = \frac{M(S_\varphi(y))}{n},$$

где $M(S_\varphi(y))$ — число успешных испытаний в серии из n испытаний, когда точки x из выборки принадлежат множеству

$$S_\varphi(y) \triangleq \{x : \Phi(y,x) \leqslant \varphi\}.$$

3. Проверяется условие $\widehat{P}_\varphi(y) \geqslant \alpha$. Если оно выполнено, то точка y включается в множество $\widehat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$, являющееся статистической аппроксимацией доверительного множества поглощения $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$.

4. Процедура повторяется с шага 2 для новой точки $y \in Y$.

Можно отметить, что реализация данного алгоритма очень трудоемкая, так как при вероятностях α, близких к 1, объем выборки n должен быть очень большим, а перебрать нужно максимально большее число точек y из $\mathbb{R}^s$, чтобы хорошо оценить множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$.

В следующем разделе рассматривается другой способ построения множества $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$, основанный на доверительном методе.

4. Построение внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения

Рассмотрим доверительный метод, подробно изложенный в [2, 3] и впервые опубликованный в [21].

Пусть S — доверительное множество, т.е. множество в пространстве $\mathbb{R}^n$ реализаций случайного вектора X с вероятностной мерой не менее α. Рассмотрим функцию максимума

$$\psi(y,S) \triangleq \sup_{x\in S} \Phi(y,x). \tag{4.1}$$

Из [3] вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Для любого доверительного множества S с вероятностной мерой не менее α выполняется неравенство

$$\varphi_\alpha(y) \leqslant \psi(y,S) \tag{4.2}$$

при всех $y \in \mathbb{R}^s$.

Данное утверждение вытекает из леммы 3.4 из [3]. Аналогично, переформулируя теорему 3.9 из [3], получаем следующий результат.

Теорема 2. Для любого $\alpha \in (0,1)$ справедливы соотношения

$$\varphi_\alpha(y) = \min_{S\in\mathcal{F}_\alpha} \psi(y,S), \quad S_\alpha(y) = \arg\min_{S\in\mathcal{F}_\alpha} \psi(y,S), \tag{4.3}$$

где $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство доверительных множеств с вероятностной мерой не менее α.

Примéним доверительный метод для построения доверительного множества поглощения. Зафиксируем множество $S \in \mathcal{F}_\alpha$ и рассмотрим множества

$$\mathcal{Y}_\varphi(x) \triangleq \{y : \Phi(y,x) \leqslant \varphi\}, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{Y}_\varphi(S) \triangleq \bigcap_{x\in S} \mathcal{Y}_\varphi(x) = \{y \colon \psi(y,S) \leqslant \varphi\}. \tag{4.5}$$

В соответствии с доверительным методом получается внутренняя аппроксимация доверительного множества поглощения

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \supset \mathcal{Y}_\varphi(S). \tag{4.6}$$

При этом если перебрать все доверительные множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$, то получится точное множество поглощения

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} = \bigcup_{S\in\mathcal{F}_\alpha} \mathcal{Y}_\varphi(S). \tag{4.7}$$

Исследуем свойства множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$.

Пусть $\tilde{x} \in S$ — некоторая точка из S, а $N_i(\tilde{x})$ — прямая, содержащая точку $\tilde{x}$ и являющаяся параллельной i-й координатной оси. Введем обозначения:

$$a_i(\tilde{x}) \triangleq \min_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} x_i, \quad b_i(\tilde{x}) \triangleq \max_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} x_i.$$

Определим часть $\partial_i S$ границы множества S следующим образом:

$$\partial_i S \triangleq \bigcup_{\tilde{x} \in S} [\{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S \colon x_i = a_i(\tilde{x})\} \cup \{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S \colon x_i = b_i(\tilde{x})\}]. \tag{4.8}$$

Теорема 3. Пусть множество S компактно. Пусть функция $\Phi(y, x)$ непрерывна и квазивыпукла по координате x_i вектора $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ для каждого $y \in \mathbb{R}^s$. Тогда

$$\psi(y, S) = \max_{x \in \partial_i S} \Phi(y, x), \tag{4.9}$$

$$\mathcal{Y}_\varphi(S) = \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S), \tag{4.10}$$

где $\partial_i S$ — часть границы множества S, определяемая выражением (4.8).

Доказательство. Равенство (4.9) следует из определения части границы $\partial_i S$ и квазивыпуклости функции потерь по x_i:

$$\psi(y, S) = \max_{x \in S} \Phi(y, x) = \max_{\tilde{x} \in S} \max_{x \in N_i(\tilde{x})} \Phi(y, x) =$$
$$= \max_{\tilde{x} \in S} \max_{x \in N_i(\tilde{x}) \cap \partial S} \{\Phi(y, x) \colon x_i = a_i(\tilde{x}) \text{ или } x_i = b_i(\tilde{x})\} = \max_{x \in \partial_i S} \Phi(y, x).$$

По построению $\mathcal{Y}_\varphi(S) \subset \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S)$. Таким образом, для доказательства (4.10) нужно показать, что $\mathcal{Y}_\varphi(S) \supset \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S)$. Пусть $y \in \mathcal{Y}_\varphi(\partial_i S)$. Это означает, что $\Phi(y, x) \leqslant \varphi$ для всех $x \in \partial_i S$, или, что то же самое,

$$\max_{x \in \partial_i S} \Phi(y, x) \leqslant \varphi.$$

Но по доказанному выше

$$\max_{x \in \partial_i S} \Phi(y, x) = \psi(y, S),$$

что эквивалентно выполнению неравенства $\Phi(y, x) \leqslant \varphi$ для всех $x \in S$. Таким образом, $y \in \mathcal{Y}_\varphi(S)$, т.е. равенство (4.10) выполнено. Теорема 3 доказана.

Таким образом, для вычисления функции $\psi(y, S)$ и построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ достаточно перебрать только точки, лежащие на части $\partial_i S$ границы ∂S доверительного множества $S \in \mathcal{F}_\alpha$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{Z}_\varphi \triangleq \left\{ z \in \mathbb{R}^l \colon \tilde{\Phi}(z) \leqslant \varphi \right\} \tag{4.11}$$

и часть $\partial_r \mathcal{Z}_\varphi$ границы $\partial \mathcal{Z}_\varphi$ множества $\mathcal{Z}_\varphi$, которое соответствует координате z_r вектора $z \in \mathbb{R}^l$ и построено аналогично множеству $\partial_i S$ (4.8).

Теперь рассмотрим вопрос построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(x)$.

Т е о р е м а 4. Пусть отображение $y \mapsto z(x,y)$ при заданном $x \in \mathcal{X}$ является гомеоморфизмом, а множество $\mathcal{Z}_\varphi$ компактно. Тогда прообразом множества $\mathcal{Z}_\varphi$ при данном отображении является множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$. При этом

$$\partial\mathcal{Y}_\varphi(x) = \{y\colon z(x,y) \in \partial\mathcal{Z}_\varphi\}. \tag{4.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно свойствам гомеоморфных отображений прообразом компакта является компакт, при этом граничные точки множества $\mathcal{Z}_\varphi$ переходят под действием отображения $y \mapsto z(x,y)$ в граничные точки множества $\mathcal{Y}_\varphi(x)$, и наоборот. Теорема 4 доказана.

Таким образом получаем, следующий алгоритм построения множества $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ при выполнении условий теорем 3 и 4.

А л г о р и т м 2.

1. Для различных $x \in \partial_i S$ построить множества $\partial\mathcal{Y}_\varphi(x)$ по формуле (4.12).
2. По границе $\partial\mathcal{Y}_\varphi(x)$ восстановить множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ для всех $x \in \partial_i S$.
3. Найти пересечение множеств $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ по всем $x \in \partial_i S$.

З а м е ч а н и е 1. Если семейство доверительных множеств $S(a)$ зависит от некоторого вектора параметров $a \in A$, то описанный алгоритм 2 можно дополнить еще одним шагом, чтобы получить лучшую интерпретацию доверительного множества поглощения:

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \supset \bigcup_{a\in A} \mathcal{Y}_\varphi(S(a)). \tag{4.13}$$

Рассмотрим вектор y в многомерной сферической системе координат $(\overline{y},\beta)$, где $\overline{y} \triangleq \|y\|$, а β — вектор углов.

Введем определение 4.

О п р е д е л е н и е 4. Множество $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^s$ является звездчатым, если отрезок, соединяющий начало координат с произвольной точкой $y \in \mathcal{Y}$, полностью принадлежит множеству $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^s$.

Т е о р е м а 5. Пусть функция $\widehat{\Phi}(\overline{y},\beta,x) = \Phi(y,x)$ квазивыпукла по $\overline{y}$ для каждого β. Если $0 \in \mathcal{Y}_\varphi(x)$, то множество $\mathcal{Y}_\varphi(x)$ является односвязным и звездчатым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из квазивыпуклости функции $\hat{\Phi}(\cdot)$ следует, что при выполнении условий $0 \in \mathcal{Y}_\varphi(x)$ и $y \in \mathcal{Y}_\varphi(x)$ справедливо, что

$$\Phi(\tilde{y},x) \leqslant \max\{\Phi(0,x),\ \Phi(y,x)\} \leqslant \varphi,$$

для всех $\tilde{y}$, принадлежащих отрезку, соединяющему точки 0 и y. Таким образом, доказана звездчатость множества $\mathcal{Y}_\varphi(x)$. А звездчатое множество является односвязным. Теорема 5 доказана.

С л е д с т в и е 2. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда множество $\mathcal{Y}_\varphi(S)$ является звездчатым и односвязным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство следует из факта, что пересечение звездчатых множеств оказывается также звездчатым, а следовательно и односвязным. Следствие 2 доказано.

5. Построение множества допустимых значений скорости ветра в районе аэродрома

5.1. Постановка задачи

Сформулируем задачу. Пусть некоторый самолет вылетает из города N в город M, до которого время полета равно t. Посадка самолета в аэропорту города M возможна, если скорость ветра в продольном и боковом направлениях не выходит за допустимые пределы

$$\mathcal{W}_t = \left\{(w_x^t, w_z^t)\colon |w_z^t| \leqslant w_z^{\max}, w_x^{\min} \leqslant w_x^t \leqslant w_x^{\max}\right\}, \tag{5.1}$$

где w_x^t, w_z^t — скорости ветра в точке посадки в момент посадки самолета в продольном и боковом направлениях.

В нулевой момент, т.е. в момент вылета самолета из города N, в аэропорту города M скорость ветра была (w_x^0, w_z^0). Но по истечении времени t ветер может значительно измениться и его скорости не будут удовлетворять допустимым значениям, т.е. посадка самолета станет невозможной. Пусть значение скорости ветра w^t в момент t связано со скоростью ветра w^0 в нулевой момент соотношениями:

$$w_x^t = (v^0 + \xi)\cos(\beta^0 + \eta), \tag{5.2}$$

$$w_z^t = (v^0 + \xi)\sin(\beta^0 + \eta), \tag{5.3}$$

где v^0, β^0 — полярные координаты вектора w^0, а ξ и η — независимые случайные величины, имеющие усеченное нормальное распределение

$$\xi \sim \overline{\mathcal{N}}(0, \sigma_\xi^2), \quad \eta \sim \overline{\mathcal{N}}(0, \sigma_\eta^2),$$

причем $\xi \in [v_*, v^*]$, $\eta \in [\beta_*, \beta^*]$.

Найдем вероятность такого события, что самолету разрешат посадку в городе M, когда в момент его вылета из города N вектор скорости ветра был равен w^0:

$$P(w^0) = \mathcal{P}\left\{w^t(w^0, \xi, \eta) \in \mathcal{W}_t\right\}. \tag{5.4}$$

Необходимо построить множество $\mathcal{W}_0$ допустимых скоростей ветра w^0 в начальным момент, при которых по происшествии времени t скорость ветра w^t не выйдет за допустимые пределы с вероятностью α:

$$\mathcal{W}_0 = \{w^0 : P(w^0) \geqslant \alpha\}. \tag{5.5}$$

Другими словами, нужно построить доверительное множество поглощения.

5.2. Алгоритм построения доверительного множества поглощения

Для построения множества $\mathcal{W}_0$ воспользуемся результатами из предыдущих разделов. Заметим, что множество $\mathcal{W}_t$ можно записать через функцию потерь:

$$\mathcal{W}_t = \left\{(w_x^t, w_z^t) : \widetilde{\Phi}(w^t) \leqslant 1\right\}, \tag{5.6}$$

где

$$\widetilde{\Phi}(w^t) = \max\left\{\widetilde{\Phi}_1(w_x^t), \widetilde{\Phi}_2(w_z^t)\right\},$$
$$\widetilde{\Phi}_1(w_x^t) = \frac{|2w_x^t - w_x^{\min} - w_z^{\max}|}{w_x^{\max} - w_x^{\min}},$$
$$\widetilde{\Phi}_2(w_z^t) = \frac{|w_z^t|}{w_z^{\max}}.$$

Далее заметим, что скорости ветра в начальный и конечный моменты связаны между собой соотношениями в полярной системе координат:

$$\beta^0 = \beta^t - \eta,$$
$$v^0 = v^t - \xi.$$

Приведем связь между декартовой и полярной системами координат:

$$w_x^t = v^t \cos(\beta^t), \quad w_z^t = v^t \sin(\beta^t),$$
$$v^t = \sqrt{(w_x^t)^2 + (w_z^t)^2},$$
$$\beta^t = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{w_z^t}{w_x^t}, & w_x^t > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{w_z^t}{w_x^t}, & w_x^t < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & w_x^t = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим в нормированной системе координат случайные векторы

$$\overline{\xi} = \frac{\xi}{\sigma_\xi}, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{\sigma_\eta}$$

и доверительное множество в форме квадрата

$$S_\Delta = \{|\overline{\xi}| \leqslant \Delta, |\overline{\eta}| \leqslant \Delta\}, \tag{5.7}$$

где параметр Δ выбирается из условия $\mathcal{P}(S_\Delta) = \alpha$. Предположим, что для случайной величины U со стандартным нормальным распределением $\mathcal{N}(0,1)$ соответствующие вероятности удовлетворяют неравенствам:

$$\mathcal{P}\{U < v_*/\sigma_\xi, U > v^*/\sigma_\xi\} \ll 1 - \alpha,$$
$$\mathcal{P}\{U < \beta_*/\sigma_\eta, U > \beta^*/\sigma_\eta\} \ll 1 - \alpha.$$

Тогда поскольку случайные величины $\overline{\xi}$ и $\overline{\eta}$ независимы, то параметр Δ может быть найден из условий

$$F_0(\Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha},$$

где

$$F_0(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\Delta e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

Рассмотрим также семейство квадратов $S_\Delta(\gamma)$, подобных S_Δ, но повернутых относительно S_Δ на угол $\gamma \in [-\pi/2, 0]$.

В данном случае w_x^t и w_z^t линейно зависят от $\overline{\xi}$ и v^0, поэтому согласно теореме 5 множество

$$\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta}) = \Big\{(w_x^0, w_z^0)\colon \widetilde{\Phi}(w^t(w_x^0, w_z^0, \overline{\xi}, \overline{\eta})) \leqslant 1\Big\} \tag{5.8}$$

является звездчатым и односвязным. Поэтому для построения множества $\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ достаточно рассмотреть границу доверительного множества $S_\Delta(\gamma)$.

Отображение $(w_x^0, w_z^0) \mapsto (w_x^t, w_z^t)$ области $\{(w_x^0, w_z^0)\colon v^0 > \max\{0, -\overline{\xi}\}\}$ в область $\{(w_x^t, w_z^t)\colon v^t > \max\{0, \overline{\xi}\}\}$ является гомеоморфизмом. Поэтому в силу теоремы 4 при выполнении условия $v^t > |\overline{\xi}|$ для всех $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ и $(w_x^t, w_z^t) \in \partial\mathcal{W}_t$ для построения множества $\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ достаточно найти для всех точек $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ прообраз в пространстве (w_x^0, w_z^0) границы $\partial\mathcal{W}_t$ множества $\mathcal{W}_t$.

Построим аппроксимацию доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$ с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 3.

1. Перебираются $(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ на границе $\partial S_\Delta(\gamma)$ множества $S_\Delta(\gamma)$.

2. Для каждой точки $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ находится прообраз $\mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta})$ в пространстве переменных (w_x^0, w_z^0) границы множества $\mathcal{W}_t$.

3. Находится пересечение множеств

$$\mathcal{W}_0(S_\Delta(\gamma)) = \bigcap_{(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in S_\Delta(\gamma)} \mathcal{W}_0(\overline{\xi}, \overline{\eta}).$$

4. Пп. 1–3 алгоритма 3 повторяются для разных значений $\gamma \in [-\pi/2, 0]$ и строится множество

$$\overline{\mathcal{W}}_0 = \bigcup_{\gamma \in [-\pi, 0]} \mathcal{W}_0(S_\Delta(\gamma)).$$

5. Множество $\overline{\mathcal{W}}_0$ принимается за аппроксимацию доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$.

Заметим, что для корректной работы алгоритма 3 необходимо выполнение условия $v^t > |\overline{\xi}|$ для всех $(\overline{\xi}, \overline{\eta}) \in \partial S_\Delta(\gamma)$ и $(w_x^t, w_z^t) \in \partial\mathcal{W}_t$.

Уточним полученную оценку.

Рассмотрим теперь доверительные множества S_r в форме круга

$$S_r \triangleq \{(\overline{\xi}, \overline{\eta}) : \overline{\xi}^2 + \overline{\eta}^2 \leqslant r^2\},$$

где радиус круга r определяется из условия, что $\mathcal{P}(S_r) = \alpha$. В данном случае в связи с независимостью $\overline{\xi}$ и $\overline{\eta}$ радиус круга находится аналитически

$$r = \sqrt{-2\ln(1-\alpha)}.$$

Для доверительного круга S_r шаги 1–3 алгоритма 3 повторяются и строится множество $\mathcal{W}_0(B_r)$, которое является внутренней аппроксимацией доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$.

Полученную аппроксимацию можно еще уточнить, если рассмотреть семейство доверительных множеств $S_\Delta(\gamma)$, где параметр γ выбирается из интервала $[-\pi, 0]$, и построить множество $\overline{\mathcal{W}}_0$ так, как это описано в алгоритме 3.

Поскольку

$$\mathcal{W}_0 = \bigcup_{S\in\mathcal{F}_\alpha} \mathcal{W}_0(S), \tag{5.9}$$

то, взяв объединение множеств $\mathcal{W}_0(B_r)$ и $\overline{\mathcal{W}}_0$, получаем более точную аппроксимацию доверительного множества поглощения

$$\mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_0(S_r) \cup \overline{\mathcal{W}}_0. \tag{5.10}$$

Можно также сдвинуть одну из границ множества $S_\Delta(\gamma)$ ближе к началу координат, сохраняя при этом вероятностную меру множества. Объединение всех таких множеств $\mathcal{W}_0(S_\Delta(\gamma))$ будет образовывать внутреннюю аппроксимацию множества поглощения $\mathcal{W}_0$.

5.3. Вычислительный эксперимент

Пусть для примера

$$\alpha = 0{,}99;\ \sigma_\xi = 1{,}9\ [\text{м/с}];\ \sigma_\eta = 27^0;$$
$$w_z^{\max} = 15\ [\text{м/с}];\ w_x^{\min} = -25\ [\text{м/с}];\ w_x^{\max} = 10\ [\text{м/с}].$$

На рис. 1 сплошной линией изображена граница множества $\mathcal{W}_0(S_r)$, а штрих-пунктирной линией — $\mathcal{W}_0(S_\Delta)$.

Сдвигом границ доверительного множества $S_\Delta(\gamma)$ влево и последующим вращением внутреннюю аппроксимацию множества $\mathcal{W}_0$ можно существенно улучшить. Граница полученного множества $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ изображена на рис. 2 штрих-пунктирной линией. Множество $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ оказывается выпуклым, хотя, как известно, объединение выпуклых множеств оказывается, как правило, невыпуклым. Для сравнения граница множества $\mathcal{W}_0(S_r)$ изображена сплошной линией.

Заметим, что множество $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ содержит в себе множество $\mathcal{W}_0(S_r)$. Это связано с тем, что доверительное множество S_r — одно и то же для всех начальных позиций системы w_0, а для каждой начальной точки имеется свое оптимальное доверительное множество, которое неизвестно. Варьируя множество $S_\Delta(\gamma)$, подбираем для каждой точки w_0 доверительное множество лучше, чем S_r, поэтому множество $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ оказывается шире множества $\mathcal{W}_0(S_r)$.

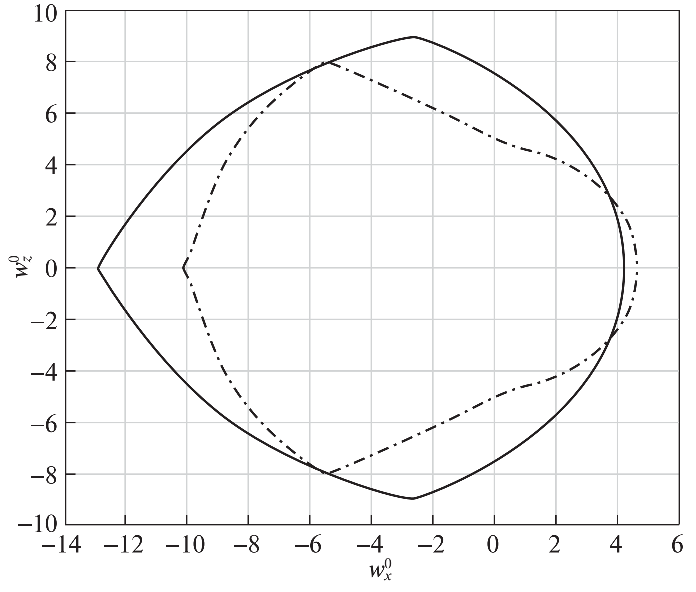

Рис. 1. Множества $\mathcal{W}_0(S_r)$ и $\mathcal{W}_0(S_\Delta)$.

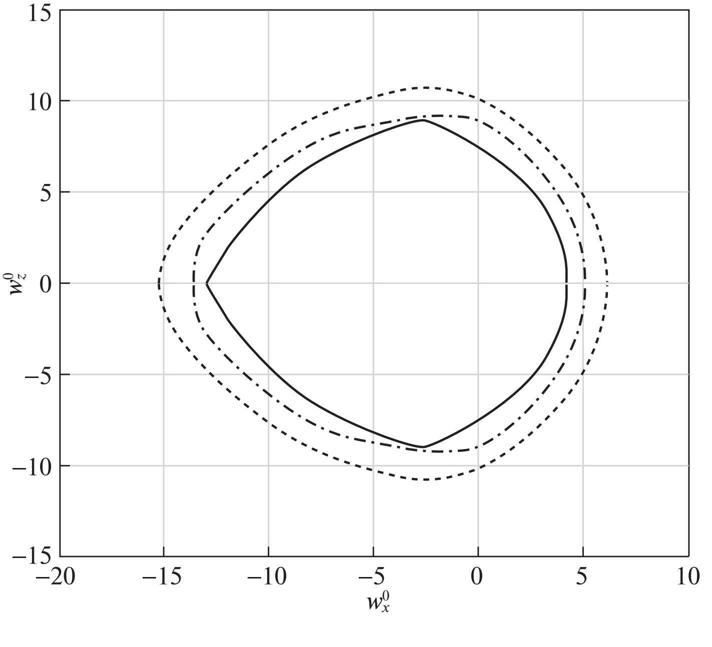

Рис. 2. Множества $\mathcal{W}_0(S_r)$, $\overline{\mathcal{W}}_0$ и статистическая аппроксимация.

При построении данных множеств существенно использовалась их звездчатая структура. Граница звездчатого множества в полярных координатах описывается функцией полярного угла. Поэтому пересечению множеств соответствует минимум функций, описывающих границы, а объединению — максимум.

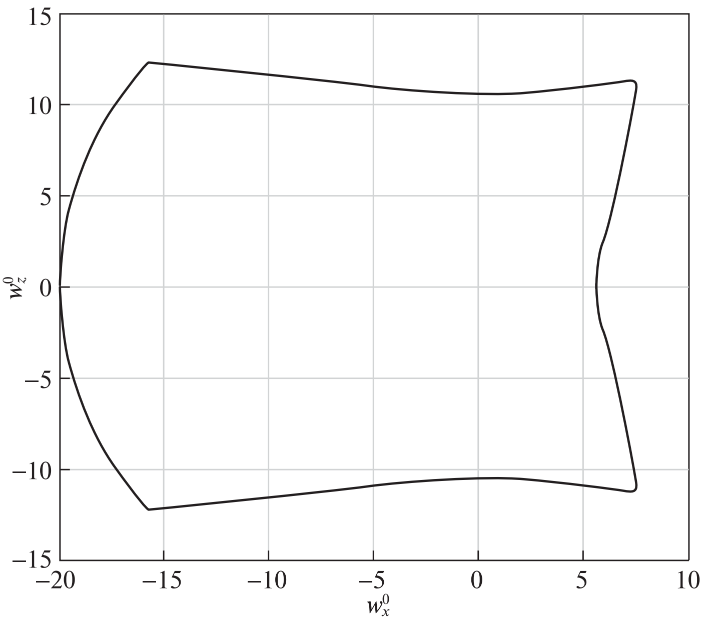

Рис. 3. Множество $\mathcal{W}_0$ при $\sigma_\eta = 0$.

Границу множества $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ можно уточнить с помощью метода статистических испытаний, используя алгоритм 1. Статистическая аппроксимация множества $\mathcal{W}_0$ изображена на рис. 2 точечной линией. Из рис. 2 видно, что получаемая статистическая аппроксимация доверительного множества поглощения $\mathcal{W}_0$ незначительно отличается от аппроксимирующего множества $\widetilde{\mathcal{W}}_0$, но для ее построения пришлось провести огромный объем вычислений.

Представляет интерес множество $\mathcal{W}_0$ при $\sigma_\eta = 0$. Как видно из рис. 3, это множество оказывается невыпуклым. При $\sigma_\eta \to \infty$ прогнозируемое значение скорости ветра оказывается распределенным в некотором кольце. Поэтому при возрастании v^0 радиус кольца увеличивается, а вероятность попадания прогнозируемой скорости ветра в множество $\mathcal{W}_t$ монотонно убывает. Это значит, что предельная функция вероятности является квазивогнутой, что гарантирует выпуклость ее множеств уровня. Таким образом, множество $\mathcal{W}_0$ становится выпуклым при достаточно большом значении σ_η.

6. Заключение

Исследована задача по построению доверительного множества поглощения при анализе стохастической системы. Устанавливаются свойства этого множества. На основе доверительного метода предлагается алгоритм построения доверительного множества поглощения. Предлагается также алгоритм построения этого множества на основе метода статистических испытаний. На основе полученных результатов решается задача о прогнозе скорости ветра в районе аэродрома посадки самолета. Рассматриваются несколько вариантов доверительного множества случайных параметров: круг и квадрат в нормированном пространстве. Кроме того, рассматривается семейство доверительных квадратов, повернутых на некоторый угол вокруг начала системы координат. Приводятся результаты численных расчетов, из которых следует, что лучшей внутренней аппроксимацией доверительного множества поглощения является объединение множеств поглощения, построенных для разных повернутых доверительных квадратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. *Kibzun A.I., Kan Y.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester–N.Y.–Brisbane–Toronto–Singapore: John Wiley & Sons, 1996.
3. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
4. *Prékopa A.* Stochastic Programming. Dordrecht–Boston: Kluwer, 1995.
5. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009.
6. *Тамм Э.* О квазивыпуклости функций вероятности и квантили // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. 1976. Т. 25. № 2. С. 141–144.
7. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // АиТ. 1996. № 3. С. 82–102.

   Kan Yu.S., Kibzun A.I. Convexity Properties of Probability Functions and Quantiles in Optimization Problems // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 3. P. 368–383.
8. *Van Ackooij W.* Eventual Convexity of Chance Constrained Feasible Sets // Optimization (J. Math. Programm. Oper. Res.). 2015. V. 64. No. 5. P. 1263-1284.
9. *Prékopa A.* Logarithmic Concave Measures with Application to Stochastic Programming // Acta Sci. Math. (Szeged). 1971. V. 32. P. 301–316.
10. *Prékopa A.* On Logarithmic Concave Measures and Functions // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. V. 34. P. 335–343.
11. *Borell C.* Convex Set Functions in d-Space // Period. Math. Hung. 1975. V. 6. No. 2. P. 111–136.
12. *Норкин В.И., Роенко Н.В.* α-Вогнутые функции и меры и их приложения // Кибернетика и системный анализ. 1991. № 6. С. 77–88.

    Norkin V.I., Roenko N.V. α-Concave Functions and Measures and Their Applications // Cybern. Syst. Anal. 1991. V. 27. No. 6. P. 860–869.
13. *Henrion R.* On the Connectedness of Probabilistic Constraint Sets // J. Optim. Theory Appl. 2002. V. 112. No. 3. P. 657–663.
14. *Prékopa A.* Dual Method for the Solution of a One-Stage Stochastic Programming Problem with Random RHS Obeying a Discrete Probability Distribution // ZOR — Methods and Models of Oper. Res. 1990. V. 34. P. 441–461.
15. *Lejeune M., Noyan N.* Mathematical Programming Approaches for Generating p-Efficient Points // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 207 P. 590–600.
16. *Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczyński A.* On Convex Probabilistic Programming with Discrete Distribution // Nonlinear Analysis. 2001. V. 47. P. 1997–2009.

17. *Van Ackooij W., Berge V, de Oliveira W., Sagastizábal C.* Probabilistic Optimization via Approximate p-Efficient Points and Bundle Methods // Comput. Oper. Res. 2017. V. 77. P. 177–193.

18. *Lejeune M.A., Prékopa A.* Relaxations for Probabilistically Constrained Stochastic Programming Problems: Review and Extensions // Ann. Oper. Res. 2018 (online first). DOI: 10.1007/s10479-018-2934-8

19. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // АиТ. 2015. № 9. С. 83–101.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. A Method for Solving Quantile Optimization Problems with a Bilinear Loss Function // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1582–1597.

20. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Алгоритм визуализации плоского ядра вероятностной меры // Информ. и её примен. 2018. Т. 12. № 2. С. 60–68.

21. *Кибзун А.И., Малышев В.В.* Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 1. С. 20–29.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 10.09.2019

Принята к публикации 26.09.2019