Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

© 2020 г. **И.Н. СИНИЦЫН, д-р техн. наук (sinitsin@dol.ru),**
В.И. СИНИЦЫН, д-р физ.-мат. наук (sinitsin_vi@mail.ru),
Э.Р. КОРЕПАНОВ, канд. техн. наук (ekorepanov@ipiran.ru)
(Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН)

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ФИЛЬТРОВ ЛИПЦЕРА – ШИРЯЕВА

Разработаны два типа приближенных субоптимальных фильтров Липцера – Ширяева (ФЛШ). Первый тип создан на основе обобщенного фильтра Калмана – Бьюси, а второй — на основе параметризации апостериорного распределения по методам ортогонального разложения и квазимоментов. Изложенные методы синтеза ФЛШ дают принципиальную возможность получить фильтр, близкий к оптимальному с любой степенью точности. Чем выше максимальный порядок учитываемых параметров ортогонального разложения, тем выше будет точность приближения к оптимальной оценке.

Ключевые слова: нормальный (гауссовский) фильтр; обобщенный фильтр Калмана – Бьюси (ОФКБ); стохастическая система (СтС); субоптимальная фильтрация (СОФ); условно-оптимальная фильтрация Пугачёва (УОФ); фильтры Липцера – Ширяева (ФЛШ).

DOI: 10.31857/S0005231020040030

1. Введение

Как известно [1–6], нелинейные гауссовские стохастические системы (СтС), линейные относительно состояния, определяющие оптимальный (в смысле минимума средней квадратической (с.к.) ошибки) алгоритм фильтрации, называются фильтрами Липцера – Ширяева (ФЛШ). Изучение условно-оптимальных ФЛШ выполнено в [4–6] как для гауссовских, так и негауссовских СтС. Настоящая статья посвящена развитию субоптимальных ФЛШ для нелинейных СтС относительно наблюдений и линейных относительно состояния. В разделе 2 получены точные уравнения для апостериорного нормированного одномерного распределения ФЛШ. Раздел 3 посвящен приближенным гауссовским алгоритмам субоптимальных ФЛШ на основе метода нормальной аппроксимации (МНА) и метода статистической линеаризации (МСЛ). В разделе 4 рассмотрены субоптимальные ФЛШ на основе обобщенных фильтров Калмана – Бьюси. Раздел 5 посвящен субоптимальным ФЛШ на основе ортогонального разложения апостериорной плотности. Алгоритмы оценки точности и чувствительности даны в разделе 6. В заключении сформулированы основные выводы и даны обобщения.

2. Точные уравнения для ФЛШ

2.1. Уравнения процессов

Будем рассматривать задачи фильтрации состояния систем, моделями которых могут служить стохастические дифференциальные уравнения с винеровскими и пуассоновскими шумами. В некоторых случаях стохастические дифференциальные уравнения модели изучаемой системы могут иметь неизвестные параметры и, как правило, всегда содержат параметры, известные с ограниченной точностью. Поэтому возникает задача непрерывного оценивания неизвестных параметров системы (точнее, ее модели) по результатам непрерывных наблюдений. Предположим, что правые части уравнений зависят от конечного множества неизвестных параметров, которые будем рассматривать как компоненты вектора параметров θ. Одним из возможных подходов в таких случаях является следующий прием: неизвестный векторный параметр θ считают стохастическим процессом $\Theta = \Theta_t$, который определяется дифференциальным уравнением $\dot{\Theta}_t = 0$, и включают компоненты этого векторного процесса в вектор состояния системы («расширяют» вектор состояния путем включения в него неизвестных параметров в качестве дополнительных компонент). Таким образом, задача непрерывной фильтрации неизвестных параметров модели системы сводится к задаче непрерывной фильтрации состояния системы с расширенным вектором состояния. От неизвестных параметров могут зависеть и уравнения наблюдения. Эти параметры следует включить в вектор θ и, следовательно, в расширенный вектор состояния.

Итак, пусть векторный стохастический процесс (СтП) $Z_t = \left[X_t^{\mathrm{T}} Y_t^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$ определяется системой векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито [4–6]:

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t)dt + \psi'(X_t, Y_t, \Theta, t)dW_0 + \\
&+ \int\limits_{R_0^q} \psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)P^0(dt, dv), \quad X(t_0) = X_0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
dY_t &= \varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t)dt + \psi_1'(X_t, Y_t, \Theta, t)dW_0 + \\
&+ \int\limits_{R_0^q} \psi_1''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)P^0(dt, dv), \quad Y(t_0) = Y_0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Здесь $Y_t = Y(t)$ — n_y-мерный наблюдаемый СтП; $X_t = X(t)$ — n_x-мерный ненаблюдаемый СтП (вектор состояния); $W_0 = W_0(t)$ — n_w-мерный винеровский СтП ($n_w \geqslant n_y$) интенсивности $\nu_0 = \nu_0(\Theta, t)$; $P^0(\Delta, A) = P(\Delta, A) - \mu_P(\Delta, A)$, $P(\Delta, A)$ представляет собой для любого множества A простой пуассоновский СтП, а $\mu_P(\Delta, A)$ — его математическое ожидание, причем

$$
\mu_P(\Delta, A) = \mathrm{M}P(\Delta, A) = \int \nu_P(\tau, A)d\tau;
$$

$\nu_P(\Delta, A)$ — интенсивность соответствующего пуассоновского потока событий, $\Delta = (t_1, t_2]$; интегрирование по v распространяется на все пространство R^q с выколотым началом координат; $\Theta = \theta$ — вектор случайных параметров размерности n_Θ; $\varphi = \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t)$, $\varphi_1 = \varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t)$; $\psi' = \psi'(X_t, Y_t, \Theta, t)$, $\psi_1' =$

$= \psi_1'(X_t, Y_t, \Theta, t)$ — известные функции, отображающие $R^{n_x} \times R^{n_y} \times R$ соответственно в $R^{n_x}, R^{n_y}, R^{n_x n_w}, R^{n_y n_w}$; $\psi'' = \psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)$, $\psi_1''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)$ — известные функции, отображающие $R^{n_x} \times R^{n_y} \times R^q$ в R^{n_x}, R^{n_y}.

Требуется найти с.к. оценку $\hat{X}_t$ СтП X_t в каждый момент времени t по результатам наблюдения СтП $Y(\tau)$ до момента t, $Y_{t_0}^t = \{Y(\tau) : t_0 \leqslant \tau < t\}$. Предположим, что

• уравнение состояния имеет вид (1);

• уравнение наблюдения (2), во-первых, не содержит пуассоновского шума ($\psi_1'' \equiv 0$), а во-вторых, коэффициент при винеровском шуме ψ_1' в уравнениях наблюдения не зависит от состояния ($\psi_1'(X_t, Y_t, \Theta, t) = \bar{\psi}_1'(Y_t, \Theta, t)$).

В этом случае исходные уравнения задачи нелинейной фильтрации имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t)dt + \psi'(X_t, Y_t, \Theta, t)dW_0 + \\
&+ \int\limits_{R_0^q} \psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v) P^0(dt, dv), \quad X(t_0) = X_0,
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
dY_t = \varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t)dt + \bar{\psi}_1'(Y_t, \Theta, t)dW_0, \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{4}
$$

Кроме того будем считать, что выполнены условия существования и единственности СтП $\left[X_t^{\mathrm{T}}\ Y_t^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$, определяемого (3) и (4) при соответствующих начальных условиях [5, 7].

2.2. Фильтрационные уравнения

Как известно [4, 6], для любых СтП X_t и Y_t оптимальная оценка $\hat{X}^t$, минимизирующая средний квадрат ошибки в каждый момент времени t, представляет собой апостериорное математическое ожидание СтП X_t: $\hat{X}_t = \mathrm{M}\left[X_t \mid Y_{t_0}^t\right]$. Чтобы найти это условное математическое ожидание необходимо знать $p_t = p_t(x)$ — апостериорное одномерное распределение СтП X_t. При условиях Липцера — Ширяева, т.е. когда имеют место соотношения:
1) система (3) гауссовская $\psi'' = 0$, $\psi'(X_t, Y_t, \Theta, t) = \bar{\psi}'(Y_t, \Theta, t)$, $\varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) = a_1(Y_t, \Theta, t)X_t + a_0(Y_t, \Theta, t)$;
2) система (4) гауссовская $\varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t) = b_1(Y_t, \Theta, t)X_t + b_0(Y_t, \Theta, t)$.

В [6] получено следующее точное нелинейное фильтрационное уравнение для апостериорной одномерной характеристической функции $g_t(\lambda, \Theta) = \mathrm{M}^{p_t}\left[\exp(i\lambda^{\mathrm{T}} X_t)\right]$:

$$
\begin{aligned}
dg_t(\lambda, \Theta) = \mathrm{M}^{p_t}\Bigg[\Bigg\{ & i\lambda^{\mathrm{T}}\varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) - \\
& -\frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu_0\psi^{\mathrm{T}})(X_t, Y_t, \Theta, t)\lambda + \gamma(\lambda, X_t, Y_t, \Theta, t)\Bigg\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} X_t} \mid Y_{t_0}^t\Bigg] dt + \\
& + \mathrm{M}^{p_t}\left[\left\{\varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}} + i\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})(X_t, Y_t, \Theta, t)\right\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} X_t} \mid Y_{t_0}^t\right] \times \\
& \times (\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, \Theta, t)(dY_t - \hat{\varphi}_1 dt),
\end{aligned} \tag{5}
$$

где

$$\gamma = \gamma(\lambda, X_t, Y_t, \Theta, t) =$$

$$= \int\limits_{R_0^q} \left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)} - 1 - i\lambda^{\mathrm{T}}\psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v) \right] \nu_P(\Theta, t, v) dv, \tag{6}$$

$$\hat{\varphi}_1 = \mathrm{M}^{p_t} \left[\varphi_1(X_t, Y_t, t) \right]. \tag{7}$$

Функции $g_t(\lambda, \Theta)$ и апостериорная одномерная $p_t(x, \Theta)$ связаны между собой преобразованием Фурье [4, 5].

Отсюда при условиях Липцера – Ширяева для гауссовской системы, когда $\gamma = 0$, уравнение (5) приобретает вид

$$\begin{aligned} dg_t(\lambda, \Theta) &= \mathrm{M}^{p_t} \left[\left\{ i\lambda^{\mathrm{T}}(a_1 X_t + a_0) - \frac{1}{2}\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu_0\psi^{\mathrm{T}})(0, Y_t, \Theta, t)\lambda \right\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} X_t} \middle| Y_{t_0}^t \right] dt + \\ &+ \mathrm{M}^{p_t} \left[\left\{ (b_1 X_t + b_0)^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}} + i\lambda^{\mathrm{T}}(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})(0, Y_t, \Theta, t) \right\} e^{i\lambda^{\mathrm{T}} X_t} \mid Y_{t_0}^t \right] \times \\ &\times (\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, \Theta, t)(dY_t - (b_1 X_t + b_0)dt). \end{aligned} \tag{8}$$

2.3. Частный случай уравнений (3), (4) *при условиях Липцера – Ширяева*

Если функция $\psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v)$ в (3) допускает представление

$$\psi''(X_t, Y_t, \Theta, t, v) = \psi'(X_t, Y_t, \Theta, t)\omega(\Theta, v), \tag{9}$$

где $P^0(\Delta, A) = P^0((0, t], dv)$, то уравнения (3), (4) при условиях Липцера – Ширяева примут следующий вид:

$$\dot{X}_t = \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) + \psi'(0, Y_t, \Theta, t)V(\Theta, t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{10}$$

$$\dot{Y}_t = \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) + \bar{\psi}_1(Y_t, \Theta, t)V_0(\Theta, t), \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{11}$$

Здесь $V_0(\Theta, t) = \dot{W}_0(\Theta, t)$; $V(\Theta, t) = \dot{\bar{W}}(\Theta, t)$,

$$\bar{W}(\Theta, t) = W_0(\Theta, t) + \int\limits_{R_0^q} \omega(\Theta, v) P^0((0, t], dv); \tag{12}$$

$\nu_P(\Theta, t, v)dv = \left[\partial\mu(\Theta, t, v)/\partial t\right] dv$ — интенсивность пуассоновского потока скачков, равных $\omega(\Theta, t)$. При этом логарифмические производные от одномерных характеристических функций определяются известными формулами

$$\chi^{W_0}(\rho; t) = -\frac{1}{2}\rho^{\mathrm{T}}\nu_0(\Theta, t)\rho, \tag{13}$$

$$\chi^{\bar{W}}(\rho; t) = -\frac{1}{2}\rho^{\mathrm{T}}(\Theta, t)\rho^{\mathrm{T}} + \int\limits_{R_0^q} \left[e^{i\rho^{\mathrm{T}}\omega(\Theta, v)} - 1 - i\rho^{\mathrm{T}}\omega(\Theta, v) \right] \nu_P(\Theta, t, v) dv. \tag{14}$$

В таком случае уравнение для апостериорной одномерной характеристической функции имеет вид (7), где функция (6) допускает следующую запись:

$$\gamma = \int\limits_{R_0^q} \left[e^{i\lambda^{\mathrm{T}}\psi'(0,Y_t,\Theta,t)\omega(\Theta,v)} - 1 - i\lambda^{\mathrm{T}}\psi'(0,Y_t,\Theta,t)\omega(\Theta,v) \right] \nu_P(\Theta,t,v)dv. \tag{15}$$

Замечание 1. Этот случай для нормированного распределения рассмотрен в [9].

2.4. Основные результаты раздела 2

Утверждение 1. Пусть для СтС (3), (4) *при фиксированном* $\Theta = \theta$ *выполнены условия существования и единственности решения, а матрица* $\sigma_1 = \psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$ *не вырождена. Тогда при условии ограниченности соответствующих математических ожиданий точное фильтрационное уравнение для апостериорной одномерной нормированной характеристической функций имеет вид* (7)–(6).

Утверждение 2. В условиях утверждения 1 при отсутствии пуассоновских шумов точное фильтрационное уравнение для апостериорной одномерной нормированной характеристической функции имеет вид (8).

Утверждение 3. Пусть для СтС (10), (11) *выполнены условия существования и единственности решения, имеет место представление* (9), *а матрица* $\sigma_1 = \psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$ *не вырождена. Тогда при условии ограниченности соответствующих математических ожиданий точное фильтрационное уравнение имеет вид* (7) *при условии* (15).

3. Нормальные субоптимальные ФЛШ на основе МНА (МСЛ)

3.1. Вводные замечания

Точное решение фильтрационных уравнений (1), (2) возможно только в случаях, когда уравнения гауссовской дифференциальной СтС линейны или линейны лишь относительно вектора состояния X_t при независимой от состояния функции ψ. Эти уравнения дают точное решение задачи с.к. оптимальной нелинейной фильтрации. Это решение не может быть реализовано практически в задачах реального времени. Для нахождения оптимальной оценки вектора состояния необходимо решить фильтрационное уравнение для апостериорной характеристической функции (или фильтрационное уравнение для апостериорной плотности вектора состояния X_t) после получения результатов наблюдений, затем вычислить оптимальную оценку вектора X_t. Но методов точного решения этих уравнений в общем случае пока еще не существует.

Численное решение фильтрационных уравнений в задачах реального времени тоже невозможно, так как для этого требуется много времени, а решать их необходимо каждый раз после получения результатов наблюдений. Кроме того, практическое применение точной теории оптимальной нелинейной фильтрации имеет смысл только в тех случаях, когда оценки можно вычислять в реальном масштабе времени по мере получения результатов наблюдений. Точная теория дает оптимальные оценки в каждый момент t по результатам наблюдений, полученным к этому моменту, без использования последующих результатов наблюдений. Если эти оценки не могут быть вычислены в тот же момент t или хотя бы с фиксированным приемлемым запаздыванием и их вычисление приходится откладывать на будущее, то нет никакого смысла отказываться от использования наблюдений, получаемых после момента t, для оценивания состояния системы в момент t. Поэтому для статистической обработки результатов после окончания наблюдений, т.е. для офлайн-оценивания, целесообразно применять известные из математической статистики методы постобработки информации [7].

Необходимость обработки результатов наблюдений в реальном масштабе времени непосредственно в процессе эксперимента привела к появлению ряда приближенных методов оптимальной нелинейной фильтрации, называемых обычно методами *субоптимальной фильтрации* (СОФ) [4–6]. Одни приближенные СОФ методы основаны на приближенном решении фильтрационных уравнений, а другие — на превращении формул для стохастических дифференциалов оптимальной оценки $\hat{X}_t$ и апостериорной ковариационной матрицы ошибки R_t в стохастические дифференциальные уравнения для $\hat{X}_t$ и R_t путем разложения функций φ, φ_1, ψ_1 или φ, φ_1, $\psi'\psi''$, ψ, ψ_1 в степенные ряды и отбрасывания остаточных членов.

Для приближенного решения уравнения для апостериорной одномерной характеристической функции $g_1(\lambda, \Theta)$ вектора X_t можно использовать методы СОФ, основанные на параметризации одномерных распределений СтП, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением [4–6]. Эти методы СОФ позволяют изучить стохастические дифференциальные уравнения для параметров апостериорного распределения. Простейшим методом СОФ является МНА апостериорного распределения. Исключительно важное практическое значение имеют квазилинейные фильтры, получаемые с помощью методов эквивалентной линеаризации [4–6].

3.2. Нормальный субоптимальный ФЛШ для гауссовских СтС

Так как нормальное (гауссовское) распределение, аппроксимирующее апостериорное одномерное распределение X_t, полностью определяется математическим ожиданием $\hat{X}_t$ и ковариационной матрицей R_t вектора X_t, то при аппроксимации апостериорного одномерного распределения вектора X_t нормальным распределением все математические ожидания в правых частях формул для дифференциалов $d\hat{X}_t$ и dR_t будут определенными функциями $\hat{X}_t$, R_t и t. Для гауссовских СтС ($\psi'' = 0$, $\psi_1'' = 0$) фильтрационные уравнения для нормального СОФ (НСОФ) будут представлять собой стохастические дифференциальные уравнения, определяющие $\hat{X}_t$ и R_t:

$$\begin{aligned} d\hat{X}_t &= f(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)dt + \\ &+ h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)\left[dY_t - f^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)dt\right], \end{aligned} \tag{16}$$

$$
\begin{gathered}
dR_t = \Big\{ f^{(2)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) - h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)(\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})(Y_t, \Theta, t) \times \\
\times\, h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} \Big\} dt + \\
+ \sum_{r=1}^{n_y} \rho_r(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) \left[dY_r - f_r^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) dt \right].
\end{gathered} \tag{17}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$
f = f(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) = \mathrm{M}^N \left[\varphi(Y_t, X_t, \Theta, t) \right] = \hat{\varphi}, \tag{18}
$$

$$
\begin{gathered}
f^{(1)} = f^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) = \left\{ f_r^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) \right\} = \\
= \mathrm{M}^N \left[\varphi_1(Y_t, X, \Theta, t) \right] = \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}},
\end{gathered} \tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
h = h(\hat{X}_t, Y_t, R_t, t) = \Big\{ \mathrm{M}^N \Big[\hat{X}_t \varphi_1(Y_t, X_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} + \psi \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}}(Y_t, X_t, \Theta, t) \Big] - \\
- \hat{X}_t f^{(1)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} \Big\} (\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, \Theta, t),
\end{gathered} \tag{20}
$$

$$
\begin{gathered}
f^{(2)} = f^{(2)}(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) = \mathrm{M}^N \Big\{ (X_t - \hat{X}_t) \varphi(Y_t, X_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} + \\
+ \varphi(Y_t, X_t, \Theta, t)(X_t^{\mathrm{T}} - \hat{X}_t^{\mathrm{T}}) + \psi \nu_0 \psi^{\mathrm{T}}(Y_t, X_t, \Theta, t) \Big\},
\end{gathered} \tag{21}
$$

$$
\begin{gathered}
\rho_r = \rho_r(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) = \mathrm{M}^N \Big\{ (X_t - \hat{X}_t)(X_t^{\mathrm{T}} - \hat{X}_t^{\mathrm{T}}) \alpha_r(Y_t, X_t, \Theta, t) + \\
+ (X_t - \hat{X}_t) \beta_r(Y_t, X_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} (X_t^{\mathrm{T}} - \hat{X}_t^{\mathrm{T}}) + \\
+ \beta_r(Y_t, X_t, \Theta, t)(X_t^{\mathrm{T}} - \hat{X}_t^{\mathrm{T}}) \Big\} \quad (r = \overline{1, n_y}),
\end{gathered} \tag{22}
$$

$$
\varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) = a_1(Y_t, \Theta, t) X_t + a_0(Y_t, \Theta, t), \tag{23}
$$

$$
\varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t) = b_1(Y_t, \Theta, t) X_t + b_0(Y_t, \Theta, t), \tag{24}
$$

где α_r — r-й элемент матрицы-строки $(\varphi_1^{\mathrm{T}} - \hat{\varphi}_1^{\mathrm{T}})(\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})$, а β_{kr} — элемент k-й строки и r-го столбца $(\psi \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}$; β_r — r-й столбец матрицы $(\psi \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})(\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})$, $\beta_r = [\beta_{1r} \ldots \beta_{n_x r}]^{\mathrm{T}}$, при этом α_r и β_r зависят только от Θ, t.

Количество уравнений для апостериорного одномерного распределения определяется по формуле $Q_{\text{МНА}} = \frac{n_x(n_x+3)}{2}$.

За начальные значения $\hat{X}_t$, R_t при интегрировании уравнений (16) и (17), естественно, следует принять условные математическое ожидание и ковариационную матрицу величины X_0 относительно Y_0:

$$
\hat{X}_0 = \mathrm{M}^N \left[X_0 \mid Y_0 \right], \quad R_0 = \mathrm{M}^N \left[(X_0 - \hat{X}_0)(X_0^{\mathrm{T}} - \hat{X}_0^{\mathrm{T}}) \mid Y_0 \right]. \tag{25}
$$

Если нет информации об условном распределении X_0 относительно Y_0, то начальные условия можно взять в виде $\hat{X}_0 = \mathrm{M}X_0$, $R_0 = \mathrm{M}(X_0 - \mathrm{M}X_0)\times$ $\times(X_0^{\mathrm{T}} - \mathrm{M}X_0^{\mathrm{T}})$. Если же и об этих величинах нет никакой информации, то начальные значения $\hat{X}_t$, R_t приходится задавать произвольно.

3.3. Нормальный субоптимальный ФЛШ для негауссовских СтС

В основе соответствующей теоремы для СтС (3), (4) с пуассоновскими шумами в (3) и невырожденной матрицей $\sigma_1 = \psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$ лежат уравнения (16), (17). При этом потребуется ограниченность функций f, $f^{(1)}$, h, ρ_r, определяемых (18)–(22), и функции

$$\bar{f}^{(2)} = f^{(2)} + \mathrm{M}^N \left[\int\limits_{R_0^q} \psi''\psi''^{\mathrm{T}} \nu_P(\Theta, t, dv) \right]. \tag{26}$$

З а м е ч а н и е 2. Для гладких функций $\varphi, \varphi_1, \psi', \psi'_1$ и гауссовских СтС (3), (4) СОФ на основе МНА называется просто гауссовским фильтром [6], а ФЛШ — нелинейным субоптимальным ФЛШ.

3.4. Квазилинейный НСОФЛШ на основе МСЛ

Для СтС (1), (2) с аддитивными винеровскими и пуассоновскими шумами уравнения НСОФ проще получаются, если нелинейные функции φ и φ_1 на основе гауссовского (нормального) распределения заменить на статистически линеаризованные [4–6]:

$$\varphi = \varphi(X_t, Y_t, \Theta, t) \approx \varphi_0 + k_x^{\varphi}(X_t - m_t^x) + k_y^{\varphi}(Y_t - m_t^y), \tag{27}$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(X_t, Y_t, \Theta, t) \approx \varphi_{10} + k_x^{\varphi_1}(X_t - m_t^x) + k_y^{\varphi_1}(Y_t - m_t^y), \tag{28}$$

а затем использовать уравнения линейной фильтрации [4–6] для $Z_t =$ $= \left[X_t^{\mathrm{T}}\ Y_t^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$. Коэффициенты статистической линеаризации зависят от математических ожиданий, дисперсий и ковариаций

$$m_t^z = \begin{bmatrix} m_t^x \\ m_t^y \end{bmatrix}, \quad K_t^z = \begin{bmatrix} K_t^x & K_t^{xy} \\ K_t^{xy} & K_t^y \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Они определяются из уравнений

$$\dot{Z}_t = A^z Z_t + A_0^z + B_0^z V, \quad V = \dot{W}, \tag{30}$$

$$\dot{m}_t^z = A^z m_t^z + A_0^z, \quad m_{t_0}^Z = m_0^z, \tag{31}$$

$$\dot{K}_t^z = B^z K_t^z + K_t^z (B^z)^{\mathrm{T}} + B_0^z \nu^m (B_0^z)^{\mathrm{T}}, \quad K_{t_0}^z = K_0^z. \tag{32}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_0^z = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad A^z = \begin{bmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \end{bmatrix}, \quad B_0^z = \begin{bmatrix} \bar{\psi} \\ \bar{\psi}_1 \end{bmatrix},$$

$$a = k_y^{\varphi}, \quad a_1 = k_x^{\varphi}, \quad a_0 = \varphi_0 - k_x^{\varphi} m_t^x - k_y^{\varphi} m_t^y,$$
$$b = k_y^{\varphi_1}, \quad b_1 = k_x^{\varphi_1}, \quad b_0 = \varphi_0 - k_x^{\varphi_1} m_t^x - k_y^{\varphi_1} m_t^y,$$
$$\psi dW_0 + \int\limits_{R_0^q} \psi'' P^0(dt, dv) = \bar{\psi} dW, \quad \psi_1' dW_0 + \int\limits_{R_0^q} \psi_1'' P^0(dt, dv) = \bar{\psi}_1 dW, \tag{33}$$

где ν^W — интенсивность СтП с независимыми приращениями, состоящего из винеровской и пуассоновской частей. Тогда уравнения квазилинейного НСОФ будут иметь вид

$$\dot{\hat{X}}_t = aY_t + a_1 \hat{X}_t + a_0 + \beta_t \left[Z_t - (bY_t + b_1 \hat{X}_t + b_0) \right], \tag{34}$$

$$\beta_t = (R_t b_1^{\mathrm{T}} + \bar{\psi} \nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}})(\bar{\psi}_1 \nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{35}$$

$$\begin{gathered} \dot{R}_t = a_1 R_t + R_t a_1^{\mathrm{T}} + \bar{\psi} \nu^W \bar{\psi}^{\mathrm{T}} - \\ - (R_t b_1^{\mathrm{T}} + \bar{\psi} \nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}})(\bar{\psi}_1 \nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}})^{-1} (b_1 R_t + \bar{\psi}_1 \nu^W \bar{\psi}^{\mathrm{T}}). \end{gathered} \tag{36}$$

3.5. Основные результаты раздела 3

Утверждение 4. *Пусть выполнены условия утверждения 1. Тогда НСОФ для* (3), (4) *описывается уравнениями* (16), (17), (25) *при условиях ограниченности функций* (18)–(22).

Утверждение 5. *Пусть выполнены условия утверждения 2. Тогда НСОФ для гауссовской системы* (3) *описывается уравнениями* (16), (17), (25) *при условиях ограниченности функций* (18)–(22).

Утверждение 6. *Пусть СтС* (1), (2) *содержит только аддитивные винеровские и пуассоновские шумы и допускает замену статистически линеаризованной, а матрица* $\sigma_1 = \bar{\psi}_1 \nu^W \bar{\psi}_1^{\mathrm{T}}$ *не вырождена. Тогда в основе алгоритма квазилинейного НСОФ лежат уравнения* (31)–(33) *при начальных условиях* (25).

Замечание 3. Из теорем 1–6 немедленно следуют уравнения НСОФ для фильтрации стационарных процессов в установившемся режиме для стационарных СтС, если приравнять нулю правые части фильтрационных уравнений.

4. Субоптимальные ФЛШ на основе обобщенных фильтров Калмана – Бьюси (ОФКБ)

Для гауссовских СтС при условиях Липцера – Ширяева в [4, 6] описаны методы с.к. оптимального синтеза путем разложения в ряд Тейлора правых частей уравнений с.к. оптимальной фильтрации и удержания членов первого, второго и высших порядков относительно разностей $X_t - \hat{X}_t$. Если ограничиться членами первого порядка, то получим искомые уравнения:

$$\dot{X}_t = \left[\varphi(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + \varphi_x(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} (X_t - \hat{X}_t) \right] + \psi(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) V_0(\Theta, t), \tag{37}$$

$$(38)\quad \dot{Y}_t = \Big[\varphi_1(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + \varphi_{1x}(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}}(X_t - \hat{X}_t)\Big] + \psi_1(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) V_0(\Theta, t),$$

$$(39)\quad \varphi(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + \varphi_x(0, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}}(X_t - \hat{X}_t) \equiv a(Y_t, \Theta, t)\hat{X}_t + a_0(Y_t, \Theta, t),$$

$$(40)\quad \varphi_1(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + \varphi_{1x}(0, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}}(X_t - \hat{X}_t) \equiv b(Y_t, \Theta, t)\hat{X}_t + b_0(Y_t, \Theta, t),$$

$$(41)\quad \dot{\hat{X}}_t = \varphi(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t) + h(0, Y_t, R_t, \Theta, t)\left[\dot{Y}_t - \varphi_1(\hat{X}_t, Y_t, \Theta, t)\right],$$

$$(42)\quad \begin{aligned} \dot{R}_t = \varphi_x(0, Y_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}} R_t + R_t \varphi_x(0, Y_t, \Theta, t) + (\psi \nu_0 \psi^{\mathrm{T}})(0, Y_t, \Theta, t) - \\ - h(0, Y_t, R_t, \Theta, t)(\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})(\hat{X}_t, Y_t, R_t, \Theta, t) h(0, Y_t, R_t, \Theta, t)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

$$(43)\quad \begin{gathered} h(0, Y_t, R_t, \Theta, t) = \\ = \left[R_t \varphi_{1x}(0, Y_t, \Theta, t) + (\psi \nu_0 \psi^{\mathrm{T}})(0, Y_t, \Theta, t)\right](\psi_1 \nu_0 \psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t, \Theta, t). \end{gathered}$$

При этом характеристическая функция апостериорного распределения является гауссовской. Этот фильтр называется ОФКБ первого порядка, так как учитываются только члены первого порядка относительно $X_t - \hat{X}_t$. Если учитывать члены высших порядков, то ОФКБ будет негауссовским.

Таким образом, имеем следующий результат.

Утверждение 7. Пусть при фиксированном $\Theta = \theta$ *СтС* (37), (38) *удовлетворяют условиям Липцера – Ширяева. Тогда уравнения ФЛШ имеют вид* (41)–(43) *при начальных условиях* (25).

Замечание 4. Как показано [4, 6], ОФКБ второго и высших порядков в силу условий Липцера – Ширяева совпадают с фильтрами первого порядка. Для негауссовских систем ФЛШ приводит к результатам, точность которых трудно оценить, поэтому рекомендуется использовать подходы [4, 6, 8–12] и следующего раздела 5.

5. Субоптимальные ФЛШ на основе параметризации апостериорного распределения

Для приближенного решения уравнений для апостериорной одномерной характеристической функции и плотности вероятностей можно использовать методы, основанные на параметризации одномерного распределения посредством начальных и центральных вероятностных моментов, семиинвариантов и квазимоментов, а также методов ортогональных разложений (МОР) [4–6]. В [4–12] подробно описаны методы синтеза с.к. условно-оптимальных фильтров (УОФ) для решения задач реального времени при условиях Липцера – Ширяева. Рассмотрим частный случай УОФЛШ на основе аппроксимации апостериорного распределения посредством МОР.

При аппроксимации апостериорной одномерной плотности отрезком ее ортогонального разложения [4, 5]:

$$(44)\quad p_t(x, \Theta) = p^*(x; \Theta, \vartheta) = w(x; \Theta)\left[1 + \sum_{k=3}^{N} \sum_{|\nu|=k} c_\nu p_\nu(x)\right],$$

естественно принять за параметры, образующие вектор ϑ, апостериорные математическое ожидание $\hat{X}_t$, ковариационную матрицу R_t вектора X_t, а также коэффициенты ортогонального разложения (КОР) c_ν ($|\nu| = \overline{3, N}$). Здесь КОР определяется формулой

$$c_\kappa = [q_\kappa(\partial/i\partial\lambda)g_t(\lambda, \Theta)]_{\lambda=0}\,. \tag{45}$$

Заметим, что полином q_κ зависит от $\hat{X}_t$ и R_t; $w(x;\Theta)$ — эталонное распределение.

В основе ортогонального субоптимального ФЛШ лежат, во-первых, уравнения для $\hat{X}_s$ и R_{sq}:

$$d\hat{X}_s = f_s dt + h_s(dY_t - f^{(1)}dt) = A^{\hat{X}_s}dt + B^{\hat{X}_s}dY_t \quad (s = \overline{1, n_x}), \tag{46}$$

$$dR_{sq} = (f_{sq}^{(2)} - h_s\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}h_q^{\mathrm{T}})dt + \eta_{sq}(dY_t - f^{(1)}dt) = A^{R_{sq}}dt + B^{R_{sq}}dY_t. \tag{47}$$

Здесь $\hat{X}_s(t_0) = X_{s0}$, $R_{sq}(t_0) = R_{sq0}$; $s, q = \overline{1, n_x}$; η_{sq} — матрица-строка, элементами которой служат соответствующие элементы матрицы $\rho_1, \ldots, \rho_{n_1}$:

$$\eta_{sq} = \eta_{e_s+e_q} = [\rho_{1sq} \ldots \rho_{msq}] \quad (s, q, = \overline{1, n_x}),$$

где h_s, $f^{(1)}$, $f_{sq}^{(2)}$ — по координатная запись выражений (18)–(24). Во-вторых, для любого полинома $P(x)$, $P\left[(\partial/\partial(i\lambda))g_t(\lambda)\right]_{\lambda=0} = P(\alpha)$, где α — начальный вероятностный момент, получаем стохастические дифференциальные уравнения для КОР:

$$\begin{gathered}
dc_\kappa = \left\{F_\kappa + \sum_{s=1}^{n_x}\frac{\partial q_\kappa(\alpha)}{\partial\hat{X}_s}f_s + \sum_{s,u=1}^{n_x}\frac{\partial q_\kappa(\alpha)}{\partial R_{su}}\left(f_{su}^{(2)} - h_s\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}h_u^{\mathrm{T}}\right) + \right.\\
+ \frac{1}{2}\sum_{s,u=1}^{n_x}\frac{\partial^2 q_\kappa(\alpha)}{\partial\hat{X}_s\partial\hat{X}_u}h_s\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}h_u^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\sum_{s,u,k,l=1}^{n_x}\frac{\partial^2 q_\kappa(\alpha)}{\partial R_{su}\partial R_{kl}}\eta_{su}\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}\eta_{kl}^{\mathrm{T}} +\\
\left. + \sum_{s,k,l=1}^{n_x}\frac{\partial^2 q_\kappa(\alpha)}{\partial\hat{X}_s\partial R_{kl}}h_s\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}\eta_{kl}^{\mathrm{T}}\right\}dt + \left\{H_\kappa + \sum_{s=1}^{n_x}\frac{\partial q_\kappa(\alpha)}{\partial\hat{X}_s}h_s + \right.\\
\left. + \sum_{s,u=1}^{n_x}\frac{\partial q_\kappa(\alpha)}{\partial R_{su}}\eta_{su}\right\}(dY_t - f^{(1)}dt) = A^{c_\kappa}dt + B^{c_\kappa}dY_t,\\
c_\kappa(t_0) = c_{\kappa 0} \quad (|\kappa| = \overline{3, N}).
\end{gathered} \tag{48}$$

Здесь в дополнение к прежним обозначениям принято:

$$\begin{gathered}
F_\kappa = F_\kappa(Y_t, \Theta, \vartheta, t) = \sum_{s=1}^{n_x}\mathrm{M}^{p^*}\left[\varphi_s(Y_t, X, \Theta, t)\frac{\partial q_\kappa(X)}{\partial X_s}\right] +\\
+ \frac{1}{2}\sum_{s,u=1}^{n_x}\mathrm{M}^{p^*}\left[\sigma_{su}(Y_t, X, \Theta, t)\frac{\partial^2 q_\kappa(X)}{\partial X_s\partial X_u}\right],
\end{gathered} \tag{49}$$

$$H_\kappa = H_\kappa(Y_t,\vartheta,\Theta,t) = \Big\{ \mathrm{M}^{p^*}\left[\varphi_1(Y_t,X,\Theta,t)^{\mathrm{T}} q_\kappa(X)\right] + \tag{50}$$
$$+ \sum_{s=1}^{n_x} \mathrm{M}^{p^*}\left[(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})_s(Y_t,X,\Theta,t)\frac{\partial q_\kappa(X)}{\partial X_s}\right] - c_\kappa f^{(1)\mathrm{T}} \Big\} (\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t,\Theta,t),$$

где через $(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})_s$ обозначена s-я строка матрицы $\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}}$; $\sigma = \psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}} = \{\sigma_{su}\}\, f$.

Функции f_s, $f^{(1)}$, $f_{su}^{(2)}$, h_s, η_{su}, F_κ и H_κ в уравнениях (46)–(48) представляют собой линейные комбинации величин c_ν ($|\nu| = \overline{3,N}$) с коэффициентами, зависящими от $\hat{X}_t$ и R_t. Величины $\partial q_\kappa(\alpha)/\partial\hat{X}_s$, $\partial q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su}$, $\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial\hat{X}_s\partial\hat{X}_u$, $\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su}\partial R_{kl}$, $\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial\hat{X}_s\partial R_{kl}$ после замены моментов их выражениями через c_ν тоже будут линейными комбинациями величин c_ν с коэффициентами, зависящими от $\hat{X}_t$ и R_t.

В частном случае разложений (44) по полиномам Эрмита КОР c_ν представляют собой квазимоменты (КМ). В этом случае, как показано в [4, 5], для производных полиномов Эрмита G_ν формулы (49), (50) приводятся к виду

$$F_\kappa = \sum_{s=1}^{n_x} \kappa_s \mathrm{M}^{p^*}\left[\varphi_s(Y_t,X,\Theta,t) G_{\kappa-e_s}(X-m)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_x} \kappa_s(\kappa_s-1)\mathrm{M}^{p^*}\left[\sigma_{ss}(Y_t,X,\Theta,t) G_{\kappa-2e_s}(X-m)\right] + \tag{51}$$
$$+ \sum_{u=2}^{n_x}\sum_{s=1}^{u-1} \kappa_s\kappa_u \mathrm{M}^{p^*}\left[\sigma_{su}(Y_t,X,\Theta,t) G_{\kappa-e_s-e_u}(X-m)\right],$$

$$H_\kappa = \Big\{ \mathrm{M}^{p^*}\left[\varphi_1(Y_t,X,\Theta,t)^{\mathrm{T}} G_\kappa(X-m)\right] + \tag{52}$$
$$+ \sum_{s=1}^{n_x} \kappa_s \mathrm{M}^{p^*}\left[(\psi\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})(Y_t,X,t) G_{\kappa-e_s}(X-m)\right] - f^{(1)\mathrm{T}} c_\kappa \Big\} (\psi_1\nu_0\psi_1^{\mathrm{T}})^{-1}(Y_t,t),$$

где

$$\partial q_\kappa(\alpha)/\partial\hat{X}_s = -\kappa_s c_{\kappa-e_s}, \tag{53}$$
$$\partial q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss} = -\frac{1}{2}\partial q_\kappa(\alpha)/\partial\hat{X}_s^2 = -\frac{1}{2}\kappa_s(\kappa_s-1)c_{\kappa-2e_s},$$

$$\partial q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su} = -\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial\hat{X}_s\partial\hat{X}_u = -\kappa_s\kappa_u c_{\kappa-e_s-e_u}, \tag{54}$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss}^2 = \frac{1}{4}\kappa_s(\kappa_s-1)(\kappa_s-2)(\kappa_s-3)c_{\kappa-4e_s},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss}\partial R_{kk} = \frac{1}{4}\kappa_s(\kappa_s-1)\kappa_s(\kappa_s-1)c_{\kappa-2e_s-2e_k},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss}\partial R_{sl} = \frac{1}{2}\kappa_s(\kappa_s-1)(\kappa_s-2)\kappa_l c_{\kappa-3e_s-e_l},$$

$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{ss}\partial R_{kl} = \frac{1}{2}\kappa_s(\kappa_s - 1)\kappa_k\kappa_l c_{\kappa-2e_s-e_k-e_l},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su}\partial R_{sl} = \kappa_s(\kappa_s - 1)\kappa_u\kappa_l c_{\kappa-2e_s-e_u-e_l},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial R_{su}\partial R_{kl} = \kappa_s\kappa_u\kappa_k\kappa_l c_{\kappa-e_s-e_u-e_k-e_l}, \tag{55}$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s\partial R_{ss} = \frac{1}{2}\kappa_s(\kappa_s - 1)(\kappa_s - 2)c_{\kappa-3e_s},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s\partial R_{sl} = \kappa_s(\kappa_s - 1)\kappa c_{\kappa-2e_s-e_l},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s\partial R_{kk} = \frac{1}{2}\kappa_s\kappa_k(\kappa_k - 1)c_{\kappa-e_s-2e_k},$$
$$\partial^2 q_\kappa(\alpha)/\partial \hat{X}_s\partial R_{kl} = \kappa_s\kappa_k\kappa_l c_{\kappa-e_s-e_k-e_l}. \tag{56}$$

Таким образом, имеем следующие утверждения.

Утверждение 8. *В условиях утверждения 2 алгоритм ортогонального субоптимального ФЛШ по МОР определяется уравнениями* (44)–(48) *при условиях ограниченности* (49), (50).

Утверждение 9. *В условиях утверждения 2 алгоритм ортогонального субоптимального ФЛШ по МКМ определяется уравнениями теоремы 8 при условиях* (50)–(56).

В случае пуассоновских шумов, которые влияют только на $f^{(2)}$, надо заменить $f^{(2)}$ на $\bar{F}^{(2)}$ согласно (26). В результате придем к следующим утверждениям.

Утверждение 10. *В условиях утверждения 1 алгоритм ортогонального субоптимального ФЛШ по МОР определяется теоремами 5 и 8 при условии ограниченности* (18)–(20), (22), (49), (50).

Утверждение 11. *В условиях утверждения 2 алгоритм ортогонального субоптимального ФЛШ по МКМ определяется теоремами 5 и 9 при условиях ограниченности* (18)–(20), (22), (51), (52).

6. Точность и чувствительность ФЛШ

Применяя методы теории чувствительности [13, 14] для приближенного анализа фильтрационных уравнений раздела 3 и учитывая случайность параметров Θ, придем к следующим уравнениям для функций чувствительности первого порядка:

$$d\nabla^\Theta \hat{X}_s = \nabla^\Theta A^{\hat{X}_s}dt + \nabla^\Theta B^{\hat{X}_s}dY_t, \quad \nabla^\Theta B^{\hat{X}_s}(t_0) = 0, \tag{57}$$
$$d\nabla^\Theta R_{sq} = \nabla^\Theta A^{R_{sq}}dt + \nabla^\Theta B^{R_{sq}}dY_t, \quad \nabla^\Theta R_{sq}(t_0) = 0, \tag{58}$$
$$d\nabla^\Theta c_\kappa = \nabla^\Theta A^{c_\kappa}dt + \nabla^\Theta B^{c_\kappa}dY_t, \quad \nabla^\Theta c_\kappa(t_0) = 0. \tag{59}$$

В (57)–(59) процедура взятия производных осуществляется по всем входящим переменным, а коэффициенты чувствительности вычисляются при

$\Theta = m^{\Theta}$. При этом предполагается малость дисперсий по сравнению с их математическими ожиданиями. Очевидно, что при дифференцировании по Θ ($\nabla^{\Theta} = \partial/\partial\Theta$) порядок уравнений возрастает пропорционально числу производных. Аналогично составляются уравнения для элементов матриц вторых функций чувствительности.

Для оценки качества нормальных ФЛШ при гауссовских Θ с математическим ожиданием m^{Θ} и ковариационной матрицей K^{Θ}, введем условную функцию потерь, допускающую квадратичную аппроксимацию:

$$\rho^{\hat{X}_s} = \rho^{\hat{X}_s}(\Theta) = \rho(m^{\Theta}) + \sum_{i=1}^{n^{\Theta}} \rho_i'(m^{\Theta})\Theta_s^0 + \sum_{i,j=1}^{n^{\Theta}}\sum^{n^{\Theta}} \rho_{ij}''(m^{\Theta})\Theta_i^0\Theta_j^0, \tag{60}$$

а также показатель ε

$$\varepsilon = \varepsilon_2^{1/4}. \tag{61}$$

Здесь

$$\varepsilon_2 = \mathrm{M}^N\left[\rho(\Theta)^2\right] - \rho(m^{\Theta})^2, \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^N\left[\rho(\Theta)^2\right] = \rho(m^{\Theta})^2 + \rho'(m^{\Theta})^{\mathrm{T}}K^{\Theta}\rho'(m^{\Theta}) + 2\rho(m^{\Theta})\mathrm{tr}\left[\rho''(m^{\Theta})K^{\Theta}\right] +\\ + \left\{\mathrm{tr}\left[\rho''(m^{\Theta})K^{\Theta}\right]\right\}^2 + 2\mathrm{tr}\left[\rho''(m^{\Theta})K^{\Theta}\right]^2,\end{aligned} \tag{63}$$

а функции ρ' и ρ'' по известным формулам определяются на основе первых и вторых функций чувствительности.

7. Заключение

Разработаны два типа приближенных ФЛШ. Первый тип создан на основе обобщенного фильтра Калмана – Бьюси, а второй — на основе параметризации апостериорного распределения по методам ортогонального разложения и квазимоментов.

Изложенные выше методы синтеза ФЛШ дают принципиальную возможность получить фильтр, близкий к оптимальному с любой степенью точности. Чем выше максимальный порядок учитываемых параметров ортогонального разложения, тем выше будет точность приближения к оптимальной оценке. Однако число уравнений, определяющих параметры апостериорного одномерного распределения, быстро растет с увеличением числа учитываемых параметров. Соответствующие оценки можно найти в [4, 5, 13].

Результаты, во-первых, допускают обобщение на случай дискретных и непрерывно-дискретных ФЛШ и, во-вторых, для СтС с автокоррелированными помехами при условиях Липцера – Ширяева. При этом интерес представляет использование ненормированных апостериорных распределений.

Авторы благодарны А.В. Борисову за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Liptser R.Sh., Shiryayev A.N.* Statistics of Conditionally Gaussian Random Sequences // Proc. Sixth Berkeley Sympos. on the Math. Statistic and Probability. 1970. II. P. 389-422.
2. *Липцер Р.Ш.* Условно-гауссовские случайные процессы // Пробл. передачи информ. 1974. Т. 10. Вып. 2. С. 75–94.
3. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов / Нелинейная фильтрация и смежные вопросы, Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1974. 476 с.
4. *Пугачёв В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 632 с.
5. *Пугачёв В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000; 2004. 1000 с.
6. *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачёва. 2-е изд. М.: Логос, 2007. 776 с.
7. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В.С. Королюка, Н.И. Портенко, А.В. Скорохода, А.Ф. Турбина. М.: Наука, 1985. 640 с.
8. *Синицын И.Н., Корепанов Э.Р.* Нормальные фильтры Пугачёва для автокоррелированных стохастических систем, линейных относительно состояния // Системы и средства информатики. 2016. Т. 26. № 2. С. 63–78.
9. *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р.* Нормальные условно-оптимальные фильтры Пугачёва для дифференциальных стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и ее применения. 2015. Т. 9. Вып. 2. С. 30–38.
10. *Синицын И.Н., Корепанов Э.Р.* Нормальные условно-оптимальные фильтры и экстраполяторы Пугачёва для стохастических систем, линейных относительно состояния // Информатика и ее применения. 2016. Т. 10. Вып. 2. С. 14–23.
11. *Wonham M.* Some application of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering // J. Soc. Industr. Appl. Math. Control. 1965. V. 2. P. 347–369.
12. *Синицын И.Н.* Ортогональные субоптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях // Информатика и ее применения. 2016. Т. 10. Вып. 1. С. 34–44.
13. *Синицын И. Н.* Нормальные и ортогональные субоптимальные фильтры для нелинейных стохастических систем на многообразиях // Системы и средства информатики. 2016, Т. 26. № 1. С. 199–226.
14. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 20.06.2019

После доработки 09.09.2019

Принята к публикации 26.09.2019