Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

Линейные системы

© 2020 г. **Э.М. СОЛНЕЧНЫЙ, д-р физ.-мат. наук (solnechn@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ. I

Исследуются динамические свойства реакции одномерной упругой системы на внешнее тепловое воздействие. В отличие от предыдущей работы по исследованию свойств этого объекта здесь учитывается влияние механических колебаний на процесс передачи тепла. Устанавливается, что и при учете этого влияния сохраняется свойство двойного интегрирующего эффекта по каналу тепловое воздействие → механические колебания.

Ключевые слова: распределенный термомеханический объект, динамические свойства, оператор, передаточная функция, внутренняя обратная связь, двойной интегрирующий эффект.

DOI: 10.31857/S0005231020040042

1. Введение

Исследования процессов деформации упругих тел под действием источников тепла проводились в классических работах [1–4]. Наиболее полное исследование этих процессов проведено в книге В. Новацкого [5], где дан вывод основных уравнений термоупругости, учитывающих взаимное влияние деформаций распределенного объекта на процесс передачи тепла.

Из современных исследований по теории термоупругости и по конкретным ее проблемам можно назвать, например, [6], где исследуются плоские гармонические волны в термоупругой среде, [7], где получается уравнение состояния термоупругости, [8], где дается современное изложение теории термоупругости, [9], где изучается влияние частоты внешних воздействий и параметров материала на амплитуды термоупругих волн, и [10], где на основе представления для свободной энергии термоупругой среды (см. [5]) получаются выражения для напряжений и энтропии, а по ним — дифференциальные уравнения перемещений частиц среды и распространения тепла.

В настоящей работе исследуются динамические свойства одномерной упругой механической системы, подверженной внешнему тепловому воздействию на одном из концов.

В качестве исходных основ для составления математической модели процессов в такой системе были приняты работы [5, 10], но в отличие от предыдущих исследований динамических свойств этого объекта (см. [11]) здесь учитывается внутренняя, присущая объекту, обратная связь от механических перемещений к процессу передачи тепла. Устанавливается, что в данной, более точной, математической модели объекта сохраняется свойство двойного интегрирующего эффекта реакции механических колебаний объекта на внешнее тепловое воздействие.

2. Математическое описание динамических свойств объекта управления

Пусть заданы линеаризованные (вокруг некоторого установившегося режима) дифференциальные уравнения продольных колебаний стержня ограниченной длины, подвергающегося тепловому воздействию на одной из границ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \beta\dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \beta_{\text{т}}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x} + \dfrac{\partial\theta}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $t \geq 0$, $x \in [0, l]$; a, c, β, $\beta_{\text{т}}$ — положительные константы (см., например, [5], гл. 3, § 9, уравнения (3), (4)).

Здесь $\varphi(x)(t)$ — перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от места приложения теплового воздействия; $\theta(x)(t)$ — температура стержня в сечении x.

Принимаем нулевые начальные условия по времени и граничные условия в виде

$$\begin{cases} \varphi'_x\,(0) = 0, \\ \varphi'_x\,(l) = 0, \\ (-\lambda\theta'_x + \alpha\theta)\,(0) = u, \\ (\lambda\theta'_x + \alpha\theta)\;(l) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

где u — внешнее тепловое воздействие (функция времени).

3. Выражение для передаточной функции $u \to \binom{\varphi(x)}{\theta(x)}$

1. Выполнив преобразование Лапласа уравнений системы (2.1) при граничных условиях (2.2), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} c^2\dfrac{\partial^2\bar\varphi}{\partial x^2}(x)(p) - p^2\bar\varphi(x)(p) - \beta\dfrac{\partial\bar\theta}{\partial x}(x)(p) = 0, \\ a\dfrac{\partial^2\bar\theta(x)}{\partial x^2} - \beta_{\text{т}}p\dfrac{\partial\bar\varphi}{\partial x} - p\bar\theta = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \overline{\varphi'_x}(0) = 0, \\ \overline{\varphi'_x}(l) = 0, \\ (-\lambda\overline{\theta'_x} + \alpha\bar\theta)(0) = \bar u, \\ (\lambda\overline{\theta'_x} + \alpha\bar\theta)(l) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Здесь p — точка комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

2. Решение системы уравнений (3.1) с граничными условиями (3.2) приводит к следующему результату.

Теорема 1. Зависимости $\bar{\varphi}(x)$ и $\bar{\theta}(x)$ от $\bar{u}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(x) = \Big[-\beta a D_1(x) + \frac{d_1}{\Delta_A}\left(ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)\right) + \\ +\beta\frac{d_2}{\Delta_A}\left(pD_0(x) + arD_1(x)\right)\Big]\frac{\bar{u}}{\lambda},\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(x) = \Big[-ac^2 D_2(x) + ap^2 D_0(x) + \frac{d_1}{\Delta_A}\beta_{\text{т}} p^3 D_0(x) + \\ +\frac{d_2}{\Delta_A}\left(a\,c^2\,D_3(x) + ra\,c^2\,D_2(x) - b_2 p\,D_1(x) - r\,a\,p^2\,D_0(x)\right)\Big]\frac{\bar{u}}{\lambda},\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$D_0(x) = \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right)/\sqrt{\rho_1} - \operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)/\sqrt{\rho_2}}{R},$$

$$D_1(x) = \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$

$$D_2(x) = \frac{\sqrt{\rho_1}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \sqrt{\rho_2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$

$$D_3(x) = \frac{\rho_1\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \rho_2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$

$$\rho_{1,2} = \frac{(a\,p + b_1)\,p \pm R}{2ac^2}, \quad R = \sqrt{(ap+b_1)^2 - 4ac^2p^3},$$

$$\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad a_{11} = ac^2\,(D_3)'_x(l) - b_1 p D_2(l),$$

$$a_{12} = \beta\left(pD_1(l) + arD_2(l)\right), \quad a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3\left(D_1(l) + rD_0(l)\right),$$

$$\begin{aligned}a_{22} = ac^2\,(D_3)'_x(l) + 2rac^2 D_3(l) + \left(r^2ac^2 - b_2 p\right)D_2(l) - \\ - rp\,(b_2 + ap)\,D_1(l) - r^2ap^2 D_0(l),\end{aligned}$$

$$(D_3)'_x(l) = \frac{\rho_1^{3/2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}l\right) - \rho_2^{3/2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}l\right)}{R},$$

$$b_1 = c^2 + \beta\beta_{\text{т}}, \quad b_2 = ap + \beta\beta_{\text{т}}, \quad r = \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$d_1 = a_{22}f_1 - a_{12}f_2, \quad d_2 = a_{11}f_2 - a_{21}f_1, \quad f_1 = \beta a D_2(l),$$

$$f_2 = ac^2\left(D_3(l) + rD_2(l)\right) - ap^2\left(D_1(l) + rD_0(l)\right).$$

Доказательство теоремы см. в Приложении П.1.

3. Для выяснения динамических свойств исследуемого объекта далее рассматривается поведение передаточных функций операторов $u \to \varphi(x)$ и

$u \to \theta(x)$ в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$. Результатом этого исследования является

Теорема 2. Передаточная функция оператора $u \to \varphi(x)$ исследуемого объекта представляется в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ в виде $\frac{\beta}{\lambda}\frac{1+O(p)}{(2+rl)p^2}$, т.е. этот оператор отражает двойное интегрирующее свойство объекта по каналу "внешнее тепловое воздействие $\to$ механические колебания". Передаточная же функция оператора $u \to \theta(x)$ стремится при $p \to 0$ к константе $\frac{1+r(l-x)}{\alpha(2+rl)}$.

(Здесь под $O(p)$ понимается функция $v(p)$, для которой отношение $\frac{v(p)}{p}$ ограничено в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$.)

Доказательство теоремы 2 см. в Приложении 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1.

1. Выполним преобразование Лапласа уравнений (3.1) по пространственной координате x, учитывая граничные условия (3.2) (см. [12], гл. VI, § 1, п. 80, формулы (6) и (7)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(c^2q^2 - p^2\right)\bar{\bar{\varphi}}(q) - \beta q\bar{\bar{\theta}}(q) = z_1(q), \\ -\beta_{\text{т}}qp\bar{\bar{\varphi}}(q) + (aq^2 - p)\bar{\bar{\theta}}(q) = z_2(q), \end{array} \right. \tag{П.1.1}$$

где $\bar{\bar{y}}(q)$ — преобразование Лапласа от функции $\bar{y}(x)$ по x,

$$z_1(q) = c^2q\bar{\varphi}(0) - \beta\bar{\theta}(0), \quad z_2(q) = aq\bar{\theta}(0) + a\bar{\theta}'_x(0) - \beta_{\text{т}}p\bar{\varphi}(0).$$

Решение системы уравнений (П.1.1) относительно вектора $\begin{pmatrix} \bar{\bar{\varphi}} \\ \bar{\bar{\theta}} \end{pmatrix}$ имеет вид

$$\begin{gathered} \bar{\bar{\varphi}}(q) = \frac{z_1(q)\left(aq^2 - p\right) + \beta q z_2(q)}{\Delta(q)} = \\ = \frac{ac^2q^3\bar{\varphi}(0) + B_1q + \beta p\bar{\theta}(0)}{\Delta(q)}, \end{gathered} \tag{П.1.2}$$

$$\begin{gathered} \bar{\bar{\theta}}(q) = \frac{\beta_{\text{т}}z_1(q)\,qp + z_2(q)\left(A^2q^2 - p^2\right)}{\Delta(q)} = \\ = \frac{ac^2q^3\bar{\theta}(0) + ac^2q^2\bar{\theta}'_x(0) - b_2qp\bar{\theta}(0) + B_2p^2}{\Delta(q)}, \end{gathered} \tag{П.1.3}$$

где

$$\begin{gathered} \Delta(q) = \det\begin{pmatrix} c^2q^2 - p^2 & -\beta q \\ -\beta_{\text{т}}qp & aq^2 - p \end{pmatrix} = ac^2q^4 - q^2p\,(ap + b_1) + p^3 = \\ = ac^2\left(q^2 - \rho_1\right)\left(q^2 - \rho_2\right), \end{gathered}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{(a\,p + b_1)\,p \pm R}{2ac^2}, \quad R = \sqrt{(ap+b_1)^2\,p^2 - 4ac^2p^3},$$
$$B_1 = \beta a\bar{\theta}'_x(0) - b_1p\bar{\varphi}(0), \quad B_2 = \beta_{\text{т}}p\bar{\varphi}(0) - a\bar{\theta}'_x(0),$$
$$b_1 = c^2 + \beta\beta_{\text{т}}, \quad b_2 = ap + \beta\beta_{\text{т}}.$$

2. Используя соотношение

$$\frac{1}{\Delta(q)} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{q^2 - \rho_1} - \frac{1}{q^2 - \rho_2}\right),$$

от выражений (П.1.2) и (П.1.3) переходим к оригиналам по координате x (см. [12], гл. VI, § 1, п. 80, формула (4))

$$\bar{\varphi}(x) = ac^2\bar{\varphi}(0)\,D_3(x) + B_1D_1(x) + \beta p\bar{\theta}(0)\,D_0(x)\,, \tag{П.1.4}$$

$$\begin{gathered}\bar{\theta}(x) = ac^2\bar{\theta}(0)\,D_3(x) + ac^2\bar{\theta}'_x(0)\,D_2(x) - \\ - b_2p\bar{\theta}(0)\,D_1(x) + B_2p^2D_0(x)\,,\end{gathered} \tag{П.1.5}$$

где

$$D_0(x) = \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right)/\sqrt{\rho_1} - \operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)/\sqrt{\rho_2}}{R},$$
$$D_1(x) = (D_0)'_x(x) = \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$
$$D_2(x) = (D_1)'_x(x) = \frac{\sqrt{\rho_1}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \sqrt{\rho_2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$
$$D_3(x) = (D_2)'_x(x) = \frac{\rho_1\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \rho_2\operatorname{ch}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R},$$

3. Подставляя выражения (П.1.4) и (П.1.5) в граничные условия (3.2) и учитывая соотношение

$$(D_3)'_x(x) = \frac{\rho_1^{3/2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_1}x\right) - \rho_2^{3/2}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\rho_2}x\right)}{R}, \tag{П.1.6}$$

получаем:

первое из условий (3.2) выполняется;

второе из условий (3.2) принимает вид

$$ac^2\bar{\varphi}(0)\,(D_3)'_x(l) + B_1D_2(l) + \beta p\bar{\theta}(0)\,D_1(l) = 0; \tag{П.1.7}$$

последнее из условий (3.2) принимает вид

$$\begin{gathered}ac^2(D_3)'_x(l)\bar{\theta}(0) + ac^2D_3(l)\bar{\theta}'_x(0) - b_2pD_2(l)\bar{\theta}(0) + B_2p^2D_1(l) + \\ +r\left\lfloor ac^2D_3(l)\bar{\theta}(0) + ac^2D_2(l)\bar{\theta}'_x(0) - b_2pD_1(l)\bar{\theta}(0) + B_2p^2D_0(l)\right\rfloor = 0,\end{gathered} \tag{П.1.8}$$

где $r = \frac{\alpha}{\lambda}$.

Используя третье из условий (3.2) в виде

$$\overline{\theta'_x}\,(0) = r\bar{\theta}\,(0) - \frac{\bar{u}}{\lambda} \tag{П.1.9}$$

и выражения для B_i $(i = 1, 2)$, (см. пояснения к (П.1.3) получаем систему уравнений относительно вектора $y = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}\,(0) \\ \bar{\theta}\,(0) \end{pmatrix}$:

$$Ay = f, \tag{П.1.10}$$

где

$$A = (a_{ij};\, i, j = 1,\, 2)\,, \quad f = \left(\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \right) \frac{\bar{u}}{\lambda},$$

$$a_{11} = ac^2\,(D_3)'_x\,(l) - b_1 p D_2\,(l)\,, \quad a_{12} = \beta\,(pD_1\,(l) + arD_2\,(l))\,;$$

$$a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3\,(D_1\,(l) + rD_0\,(l))\,, \quad a_{22} = ac^2\,\big((D_3)'_x\,(l) + 2rD_3\,(l) + r^2 D_2\,(l)\big) -$$

$$- b_2 p\,(D_2\,(l) + rD_1\,(l)) - arp^2\,(D_1\,(l) + rD_0\,(l))\,,$$

$$f_1 = \beta a D_2\,(l)\,, \quad f_2 = ac^2\,(D_3\,(l) + rD_2\,(l)) - ap^2\,(D_1\,(l) + rD_0\,(l))\,.$$

Решение системы (П.1.10) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi\,(0) \\ \theta\,(0) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \end{array} \right) \frac{\bar{u}}{\lambda \Delta_A}, \tag{П.1.11}$$

где $\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $d_1 = a_{22}f_1 - a_{12}f_2$, $d_2 = a_{11}f_2 - a_{21}f_1$.

Подставляя (П.1.11) в (П.1.4) и в (П.1.5), получаем выражения для $\bar{\varphi}\,(x)$ и $\bar{\theta}\,(x)$, приведенные в формулировке теоремы 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Ниже для функций φ, ψ, отображающих плоскость $\mathbf{C}$ в себя, будем обозначать через $O\,(\psi)$ класс функций φ, для которых отношение $\frac{\varphi(p)}{\psi(p)}$ ограничено в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$.

1. Опираясь на известное соотношение

$$\sqrt{1+v} = 1 + \frac{v}{2} + O\left(v^2\right),$$

асимптотику поведения функции R (см. пояснения к (П.1.3)) в окрестности нуля плоскости $\mathbf{C}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} R &= (ap + b_1)\,p\sqrt{1 - \frac{4ac^2 p}{(ap + b_1)^2}} = \\ &= (ap + b_1)\,p\left(1 - \frac{2ac^2 p}{(ap + b_1)^2} O\left(p^2\right)\right) = b_1 p + O\left(p^2\right). \end{aligned} \tag{П.2.1}$$

Поэтому, опираясь на соотношение

$$\frac{\rho_1-\rho_2}{R}=\frac{1}{a\,c^2}, \tag{П.2.2}$$

получаем асимптотику для ρ_i $(i=1,2)$.

$$\rho_1=\frac{ap^2+2b_1p+O\left(p^2\right)}{2ac^2}=\frac{b_1p}{ac^2}+O\left(p^2\right), \tag{П.2.3}$$

$$\rho_2=\frac{ap^2+O\left(p^2\right)}{2ac^2}=O\left(p^2\right). \tag{П.2.4}$$

2. При $p\to 0$ значения функции $D_0\left(x\right)$ стремятся к $\frac{x^3}{6ac^2}$, значения функции $D_1\left(x\right)$ — к $\frac{x^2}{2ac^2}$ и значения функции $D_3\left(x\right)$ — к $\frac{1}{ac^2}$.

3. Асимптотика функции $D_2\left(x\right)$ при $p\to 0$:

$$\begin{gathered}D_2\left(x\right)=\\ =\frac{\sqrt{\rho_1}\left(\sqrt{\rho_1}x+\rho_1^{3/2}x^3/6+O\left(\rho_1^{5/2}\right)\right)-\sqrt{\rho_2}\left(\sqrt{\rho_2}x+\rho_2^{3/2}x^3/6+O\left(\rho_2^{5/2}\right)\right)}{R}=\\ =\frac{x+x^3\left(\rho_1+\rho_2\right)/6+\sum_{i=1}^{2}O\left(\rho_i^3\right)}{ac^2}=\\ =\frac{1}{ac^2}\left[x+\frac{x^3}{6}\frac{b_1p+a\,p^2}{ac^2}+O\left(p^2\right)\right]\xrightarrow[p\to 0]{}\frac{x}{ac^2}.\end{gathered} \tag{П.2.5}$$

4. Асимптотика функции $\left(D_3\right)'_x\left(x\right)$ при $p\to 0$ определяется из (П.1.6):

$$\begin{gathered}\left(D_3\right)'_x\left(x\right)=\frac{\rho_1^{3/2}}{R}\left(\sqrt{\rho_1}x+\rho_1^{3/2}x^3/6+O\left(\rho_1^{5/2}\right)\right)-\\ -\frac{\rho_2^{3/2}}{R}\left(\sqrt{\rho_2}x+\rho_2^{3/2}x^3/6+O\left(\rho_2^{5/2}\right)\right)=\\ =\frac{1}{ac^2}\left[x\left(\rho_1+\rho_2\right)+x^3\left(\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2\right)/6+\sum_{i=1}^{2}O\left(\rho_i^4\right)\right]=\\ =\frac{1}{ac^2}\left[x\frac{b_1p+ap^2}{ac^2}+\frac{x^3}{6}\left(\frac{b_1p}{ac^2}\right)^2+O\left(p^3\right)\right]=\\ =d_{31}\left(x\right)p+d_{32}\left(x\right)p^2+O\left(p^3\right)\xrightarrow[p\to 0]{}0,\end{gathered} \tag{П.2.6}$$

где

$$d_{31}\left(x\right)=\frac{xb_1}{\left(ac^2\right)^2},\quad d_{32}\left(x\right)=\frac{x}{ac^4}\left(1+\frac{1}{6}\left(\frac{xb_1}{ac}\right)^2\right).$$

5. При $p\to 0$ значения функции a_{12} стремятся к $\frac{\beta rl}{c^2}$, а значения функции a_{22} — к $r\left(2+rl\right)$.

6. Асимптотика функции a_{11} при $p \to 0$ следует из асимптотик функций $(D_3)'_x(x)$ и $D_2(x)$ (см. пп. 2 и 3):

$$a_{11} = \frac{l}{c^2} p^2 + O\left(p^3\right). \tag{П.2.7}$$

7. Асимптотика функции a_{21} при $p \to 0$ следует из предельных значений функций $D_0(l)$ и $D_1(l)$:

$$a_{21} = \frac{\beta_{\text{т}} l^2}{2ac^2} \left(1 + \frac{rl}{3}\right) p^3 + O\left(p^4\right). \tag{П.2.8}$$

8. Поэтому на основании пп. 5–7 функцию Δ_A можно представить в виде

$$\Delta_A = \frac{rl\,(2 + rl)}{c^2} p^2 + O\left(p^3\right). \tag{П.2.9}$$

9. На основании пп. 2 и 3 значения функции f_1 при $p \to 0$ стремятся к $\frac{\beta l}{c^2}$, а значения функции f_2 — к $1 + rl$. Поэтому значения функции d_1 при $p \to 0$ стремятся к $\frac{r\beta l}{c^2}$, а функцию d_2 можно представить в виде, аналогичном представлению (П.2.7) для Δ_A:

$$d_2 = \frac{l}{c^2}\,(1 + rl)\, p^2 + O\left(p^3\right). \tag{П.2.10}$$

Отношение $\frac{d_2}{\Delta_A}$ представляется при $p \to 0$ в виде

$$\frac{d_2}{\Delta_A} = \frac{1 + rl}{r\,(2 + rl)}\,(1 + O(p)). \tag{П.2.11}$$

Отношение же $\frac{d_1}{\Delta_A}$ представляется в виде

$$\frac{d_1}{\Delta_A} = \frac{\beta}{(2 + rl)\, p^2}\,(1 + O(p)). \tag{П.2.12}$$

10. Подставляя полученные в предыдущих пунктах асимптотики в (3.3) и (3.4), получаем утверждения теоремы 2.

Автор благодарен Л.А. Черемушкиной за творческую помощь в работе и за подбор литературы по термоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мелан Э., Паркус Г.* Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958.
2. *Боли Б., Уэйнер П.П.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964.
3. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965.

4. *Lord H.W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermo-elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. Перевод с польского. М.: Мир, 1975.
6. *Jordan P.M., Puri P.* On the propagation of plane waves in type-I11 thermoelastic media // Proc. Royal Soc. Lond. A. 2004. V. 460. P. 3203–3221.
7. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 184–196.
8. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013.
9. *Бабенков М.Б.* Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2. С. 126–137.
10. *Торсукова Е.Б., Христич Д.В.* Постановка связанной динамической задачи термоупругости для стержня // Вест. ТулГУ. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи». 2016. Вып. 1. С. 88–92.
11. *Solnechnyi E.M.* The Dynamic Properties Investigation for a Distributed Thermomechanical Control Plant // 2018 Eleventh Int. Conf. “MLSD”, 1–3 Oct. 2018.

    https:/ /ieeexplore.ieee.org/document/8551890
12. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. 6-е изд., стер. М.: Изд-во «Лань», 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 02.07.2019

После доработки 05.09.2019

Принята к публикации 28.11.2019