Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2020 г. **А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук (a.u.aleksandrov@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет;
Университет ИТМО, Санкт-Петербург),
А.Д. СЕМЕНОВ (sashkasem@mail.ru)
(Университет ИТМО, Санкт-Петербург),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (fradkov@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский государственный университет)**

ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ НЕ МЕШАЮТ РАЗМЕЩАТЬ АГЕНТОВ НА ОТРЕЗКЕ: ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ[1]

Рассматривается задача развертывания агентов на отрезке прямой в дискретном времени при наличии запаздывания в каналах связи и переключений и при отсутствии информации о значении запаздывания и о законе переключения. Показано, что ни запаздывания, ни переключения не влияют на сходимость состояний агентов к равномерному размещению на отрезке. Теоретические результаты иллюстрируются численным моделированием. Доказательства основаны как на известных, так и на новых подходах к анализу устойчивости позитивных систем.

Ключевые слова: мультиагентные системы, равномерное размещение, позитивные системы, запаздывание, переключения.

DOI: 10.31857/S0005231020040066

1. Введение

Уже более двух десятилетий задачи сетевого (кооперативного, мультиагентного) управления привлекают внимание исследователей [1–4]. Одна из простых на первый взгляд, но нетривиальных задач связана с равноудаленным развертыванием агентов на сегменте прямой (отрезке) [5–9]. Близкие вопросы рассматривал еще Ж. Дарбу в 1878 г. [10]. В [5] и в ряде последующих работ [6–9] устанавливаются условия достижения цели в случае агентов в виде простых интеграторов. В [8, 9] предлагаются алгоритмы, обеспечивающие размещение агентов за фиксированное время. В [3, 11] также рассматривался случай моделей агентов более высокого порядка (двойные интеграторы, унициклы и др.). Консенсусные протоколы развертывания агентов изучаются в [12] и в многочисленных статьях, ссылающихся на [12]. В [12] предложен

[1] Работа выполнена при государственной поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 08-08) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00146-а).

алгоритм оптимального размещения датчиков в подмножестве $\mathbb{R}^N$ на основе разбиений Вороного. В случае $N = 1$ алгоритм [12] совпадает с алгоритмом [5].

Естественным обобщением является изучение достижимости цели управления при различных усложняющих обстоятельствах, например помехи, недостаток информации, ограничения и т.д. Среди них коммуникационные запаздывания и переключения играют важную роль, поскольку они моделируют реальные инженерные проблемы, типичные для сетевых систем.

Анализ возможности развертывания агентов на сегменте в дискретном времени с учетом запаздывания и переключений и является целью этой статьи. Важным моментом является то, что во многих случаях информация о значении запаздывания и информация о законе переключения отсутствуют. Поэтому предполагается, что запаздывания произвольны, хотя и постоянны. Оказалось, что ни значения запаздывания, ни переключения не влияют на сходимость состояний агентов к эквидистантному размещению на отрезке. Этот теоретический результат иллюстрируется численным моделированием. Доказательства опираются как на известные, так и на недавние подходы к анализу устойчивости позитивных систем [13–16].

Следует заметить, что аналогичная задача исследовалась в [17] для случая, когда динамика агентов моделируется дифференциальными уравнениями. Однако хорошо известно, что если непрерывная модель обладает определенным динамическим свойством, то из этого, вообще говоря, не следует, что такое свойство имеется и у соответствующей дискретной модели. В частности, в [18] отмечалось: "Большинство существующих результатов о синхронизации в сетях агентов общего вида имеет дело с непрерывной моделью времени. При этом многие свойства агентов, на которых было построено обоснование синхронизации в таких сетях, в дискретном случае в принципе не могут иметь места. Более того, в отличие от непрерывного времени, даже в сетях идентичных агентов с линейной динамикой консенсус не всегда может быть достигнут при помощи линейного алгоритма управления. Таким образом, сети с дискретным временем демонстрируют принципиальные отличия от сетей с непрерывным временем."

Это мотивирует вопрос: "распространимы ли результаты, полученные в [17] для непрерывных моделей, на случай дискретного времени?" В настоящей работе проводится такое исследование с определенной модификацией подходов, применявшихся в [17].

Отметим также, что проблема робастности консенсусных протоколов к коммуникационным запаздываниям изучалась для дискретных моделей в [19, 20]. Было доказано, что свойство удержания группы в выпуклой оболочке "лидеров" не теряется при наличии коммуникационных запаздываний.

Однако задача, исследовавшаяся в указанных работах, отличается от задачи, решаемой в настоящей статье. Кроме того, в [19, 20] имеется довольно сильное ограничение на коммуникационную топологию: предполагается, что каждый агент получает сигнал хотя бы от одного из лидеров. В задаче, рассматриваемой в данной статье, такого ограничения нет.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приведена постановка задачи. Некоторые вспомогательные факты о положительных системах представлены в разделе 3. В разделе 4 приведены основные результаты работы. Поведение замкнутой системы иллюстрируется результатами численного моделирования в разделе 5.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу равномерного размещения на отрезке группы мобильных агентов, функционирующих в дискретном времени. Под агентами понимаются пронумерованные точки на прямой, которые способны менять свое расположение.

Через $x_i(k)$ обозначим координату положения i-го агента в момент времени k, $k = 0, 1, \dots,$ $i = 1, \dots, n$. Будем считать, что динамика агентов описывается разностными уравнениями

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где $u_i = u_i(k)$ — дискретный закон управления (протокол). Заметим, что дискретные мультиагентные системы вида (1) рассматривались, например, в [3].

Пусть на прямой задан отрезок $[a, b]$. Требуется выбрать протокол, обеспечивающий сходимость при $k \to \infty$ положений агентов к равномерному размещению на отрезке. При построении протокола предполагаем, что каждому i-му агенту доступна информация о расстояниях до одного из его соседей слева (до агента с номером меньшим, чем i) и до одного из его соседей справа (до агента с номером большим, чем i), при этом в число соседей включаются и два статичных агента с индексами 0 и $n+1$ (считаем, что $x_0(k) = a$, $x_{n+1}(k) = b$, $k = 0, 1, \dots$).

Известно (см. [5, 6]), что если каждый i-й агент получает информацию о его расстояниях до ближайших соседей (до агентов с номерами $i-1$ и $i+1$), то управления можно выбрать в виде

$$u_i(k) = \frac{1}{2}\left((x_{i-1}(k) - x_i(k)) + (x_{i+1}(k) - x_i(k))\right), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем замкнутую систему

$$x_i(k+1) = \frac{1}{2}(x_{i-1}(k) + x_{i+1}(k)), \quad i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Замечание 1. Следует отметить, что в [6] рассматривался случай, когда динамика агентов задается уравнениями

$$x_i(k+1) = u_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{4}$$

а каждый агент знает положения двух своих ближайших соседей. Предлагалось использовать управление вида

$$u_i(k) = \frac{1}{2}(x_{i-1}(k) + x_{i+1}(k)), \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Однако, если подставить управление (5) в систему (4), то придем к той же самой замкнутой системе (3).

В [5, 6] на основе анализа спектра матрицы системы (3) доказано, что эта система имеет асимптотически устойчивое положение равновесия

$$\tilde{x} = a(1, \ldots, 1)^\top + \frac{b-a}{n+1}(1, \ldots, n)^\top. \tag{6}$$

Это положение равновесия соответствует равномерному размещению агентов на отрезке $[a, b]$.

Цель данной работы — исследование влияния коммуникационного запаздывания и переключения связей в коммуникационном графе (замены сигналов от ближайших соседей в уравнениях (3) сигналами от других агентов) на сходимость агентов к равномерному размещению. Отметим, что данная проблема является нетривиальной, поскольку хорошо известно, что введение запаздывания и переключений режимов функционирования в широком классе случаев приводит к потере устойчивости (см. [21, 22]).

Тем не менее в настоящей статье будут построены протоколы, для которых асимптотическая устойчивость положения равновесия (6) изучаемой мультиагентной системы сохраняется при любом постоянном коммуникационном запаздывании и при любом законе переключения топологии связей.

3. Некоторые свойства дискретных линейных позитивных систем

В данном разделе приведем известные условия устойчивости дискретных линейных позитивных систем, которые далее будут использоваться для решения поставленной задачи.

Динамическая система называется позитивной, если ее движения с неотрицательными начальными условиями остаются неотрицательными при возрастании времени [13, 23]. Такие системы широко и эффективно используются для моделирования биологических, экономических, химических процессов, а также в задачах сетевого управления (см., например, [13, 23–28]).

Пусть задана линейная стационарная система в дискретном времени

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{7}$$

где $x(k)$ — n-мерный вектор состояния системы, A — постоянная матрица.

Известно [23], что система (7) позитивна тогда и только тогда, когда матрица A является неотрицательной.

Утверждение 1 [25]. *Пусть A — неотрицательная матрица. Тогда следующие условия являются эквивалентными:*

а) *система (7) асимптотически устойчива;*

б) *все собственные числа матрицы A по модулю меньше единицы;*

в) *существует вектор $\xi > 0$ такой, что*

$$A\xi < \xi; \tag{8}$$

г) *существует вектор $\eta > 0$ такой, что*

$$A^\top \eta < \eta; \tag{9}$$

д) *существует диагональная положительно определенная матрица* D *такая, что матрица* $A^\top DA - A$ *отрицательно определена.*

Здесь и далее неравенства для векторов понимаются покомпонентно.

С использованием утверждения 1 нетрудно показать (см. [25]), что для асимптотически устойчивой системы (7) функции Ляпунова можно построить по следующим формулам:

$$V_1(x) = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{|x_i|}{\xi_i}, \quad V_2(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i |x_i|, \quad V_3(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\eta_i}\, x_i^2, \tag{10}$$

где ξ_i и η_i — компоненты положительных векторов ξ и η, для которых выполнены неравенства (8) и (9) соответственно.

Далее рассмотрим позитивную систему с переключениями

$$x(k+1) = A^{(\sigma)} x(k) \tag{11}$$

и соответствующее ей семейство подсистем

$$x(k+1) = A^{(s)} x(k), \quad s = 1, \ldots, N. \tag{12}$$

Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(k) : \{0, 1, 2, \ldots\} \mapsto \{1, \ldots, N\}$ — функция, определяющая порядок активности подсистем (закон переключения), а $A^{(1)}, \ldots, A^{(N)}$ — постоянные неотрицательные матрицы.

Утверждение 2 [25, 29]. *Если существует вектор* $\xi > 0$ *такой, что*

$$A^{(s)} \xi < \xi, \quad s = 1, \ldots, N,$$

то система (11) *асимптотически устойчива при любом законе переключения.*

Нетрудно проверить (см. [29]), что при выполнении условия утверждения 2 для семейства (12) в качестве общей функции Ляпунова можно использовать первую из функций (10).

Рассмотрим теперь линейную дискретную систему с запаздыванием

$$x(k+1) = Ax(k) + Bx(k-r). \tag{13}$$

Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^n$, A и B — постоянные матрицы, r — целое неотрицательное запаздывание.

Известно [13], что система (13) позитивна тогда и только тогда, когда A и B — неотрицательные матрицы.

Утверждение 3 [25]. *Пусть A и B — неотрицательные матрицы. Тогда для того, чтобы система* (13) *была асимптотически устойчива при любом целом неотрицательном значении запаздывания r, необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы $A + B$ были по модулю меньше единицы.*

Замечание 2. В [14–16, 30] были предложены различные подходы к построению функционалов Ляпунова–Красовского для позитивных систем вида (13).

4. Основные результаты

4.1. Построение протокола более общего вида

Будем считать, что каждый агент получает сигналы от некоторого соседа слева и некоторого соседа справа (не обязательно ближайших соседей). Под соседством будем понимать соседство по номеру. При этом предполагаем, что каждый агент знает, сколько агентов расположено между ним и тем соседом, от которого поступает сигнал, однако ему недоступна информация об общем количестве агентов в системе. Например, может иметь место ситуация, когда каждый агент знает свой номер и сообщает его своим соседям.

Тогда закон управления можно выбрать в виде

$$u_i(k) = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}(x_{m_i}(k) - x_i(k)) + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}(x_{l_i}(k) - x_i(k)), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Здесь $0 \leqslant m_i < i$, $i < l_i \leqslant n + 1$.

Подставляя управления (14) в уравнения (1), приходим к системе

$$x_i(k+1) = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}\, x_{m_i}(k) + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}\, x_{l_i}(k), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Теорема 1. *Состояние* (6) *является асимптотически устойчивым положением равновесия системы* (15).

Доказательства теоремы 1 и последующих теорем 2–4 приведены в Приложении.

4.2. Система с коммуникационным запаздыванием

Предположим теперь, что сигналы от соседей поступают с некоторым запаздыванием. Тогда закон управления принимает вид

$$u_i(k) = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}(x_{m_i}(k-r) - x_i(k)) + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}(x_{l_i}(k-r) - x_i(k)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $0 \leqslant m_i < i$, $i < l_i \leqslant n + 1$, r — целое неотрицательное запаздывание.

Рассмотрим соответствующую замкнутую систему

$$x(k+1) = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}\, x_{m_i}(k-r) + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}\, x_{l_i}(k-r), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Теорема 2. *При любом целом неотрицательном значении запаздывания состояние* (6) *является асимптотически устойчивым положением равновесия системы* (16).

Замечание 3. Нетрудно проверить, что сходимость агентов к равномерному размещению будет иметь место и в случае, когда сигналы от разных объектов поступают с разными значениями запаздывания.

4.3. Система с переключающимися связями

Рассмотрим систему с переключающимся коммуникационным графом. Считаем, что связи между агентами могут включаться и выключаться в произвольные моменты времени. При потере связи с соседом слева (справа) агент выбирает какого-то другого соседа слева (справа).

Тогда закон управления имеет вид

$$u_i(k) = \frac{l_i^{(\sigma)} - i}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} \Big(x_{m_i^{(\sigma)}}(k) - x_i(k) \Big) + \frac{i - m_i^{(\sigma)}}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} \Big(x_{l_i^{(\sigma)}}(k) - x_i(k) \Big), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $0 \leqslant m_i^{(\sigma)} < i$, $i < l_i^{(\sigma)} \leqslant n+1$, а $\sigma = \sigma(k)$ — закон переключения.

Получим замкнутую систему

$$x_i(k+1) = \frac{l_i^{(\sigma)} - i}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} x_{m_i^{(\sigma)}}(k) + \frac{i - m_i^{(\sigma)}}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} x_{l_i^{(\sigma)}}(k), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

и соответствующее ей семейство подсистем

$$x_i(k+1) = \frac{l_i^{(s)} - i}{l_i^{(s)} - m_i^{(s)}} x_{m_i^{(s)}}(k) + \frac{i - m_i^{(s)}}{l_i^{(s)} - m_i^{(s)}} x_{l_i^{(s)}}(k), \quad i = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

Т е о р е м а 3. *При любом законе переключения состояние* (6) *является асимптотически устойчивым положением равновесия системы* (17).

4.4. Система с переключающимися связями и коммуникационным запаздыванием

Покажем теперь, что сходимость агентов к равномерному размещению сохраняется и при одновременном влиянии коммуникационного запаздывания и переключения связей в коммуникационном графе.

Пусть закон управления имеет вид

$$u_i(k) = \frac{l_i^{(\sigma)} - i}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} \Big(x_{m_i^{(\sigma)}}(k-r) - x_i(k) \Big) + \frac{i - m_i^{(\sigma)}}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} \Big(x_{l_i^{(\sigma)}}(k-r) - x_i(k) \Big), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь $0 \leqslant m_i(\sigma) < i$, $i < l_i(\sigma) \leqslant n+1$, r — целое неотрицательное запаздывание, а $\sigma = \sigma(k)$ — закон переключения.

Получим замкнутую систему

$$x_i(k+1) = \frac{l_i^{(\sigma)} - i}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} x_{m_i^{(\sigma)}}(k-r) + \frac{i - m_i^{(\sigma)}}{l_i^{(\sigma)} - m_i^{(\sigma)}} x_{l_i^{(\sigma)}}(k-r), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

и соответствующее ей семейство подсистем

$$x_i(k+1) = \frac{l_i^{(s)} - i}{l_i^{(s)} - m_i^{(s)}}\, x_{m_i^{(s)}}(k-r) + \frac{i - m_i^{(s)}}{l_i^{(s)} - m_i^{(s)}}\, x_{l_i^{(s)}}(k-r), \tag{20}$$
$$i = 1, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, N.$$

Теорема 4. *При любом целом неотрицательном значении запаздывания и при любом законе переключения состояние* (6) *является асимптотически устойчивым положением равновесия системы* (19).

Замечание 4. Теорему 4 нетрудно обобщить на случай, когда сигналы от разных объектов поступают с разными значениями запаздывания.

Замечание 5. Предложенные в настоящем разделе подходы могут применяться и в случае, когда агенты и отрезок заданы в пространстве произвольной размерности, при условии, что протоколы управления покоординатно развязаны, т.е.

$$x_i(k+1) = u_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $x_i(k), u_i \in \mathbb{R}^d$, $d > 1$.

Замечание 6. С использованием подхода, предложенного в [6], результаты настоящей статьи можно распространить на задачу равномерного размещения агентов на окружности.

5. Пример

Рассмотрим мультиагентную систему, состоящую из семи агентов ($n = 7$), динамика которых моделируется уравнениями (1). Требуется равномерно разместить этих агентов на отрезке $[0, 1]$.

Будем считать, что величина запаздывания $r = 5$, а $x(k) = (0{,}3; 0{,}22; 0{,}55; 0{,}45; 0{,}65; 0{,}95; 0{,}6)^\top$ при $k = -5, -4, -3, -2, -1, 0$.

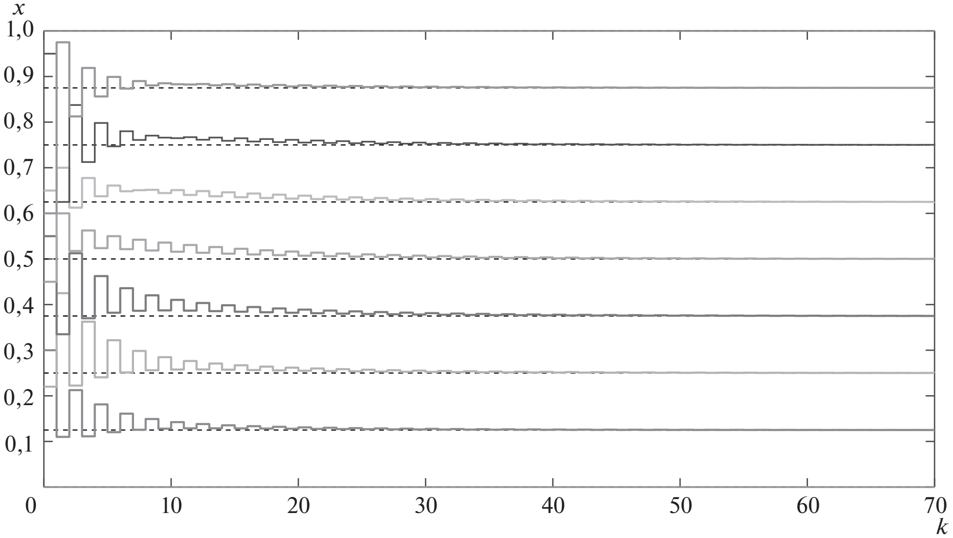

Рис. 1. Динамика агентов для системы без запаздывания и переключений.

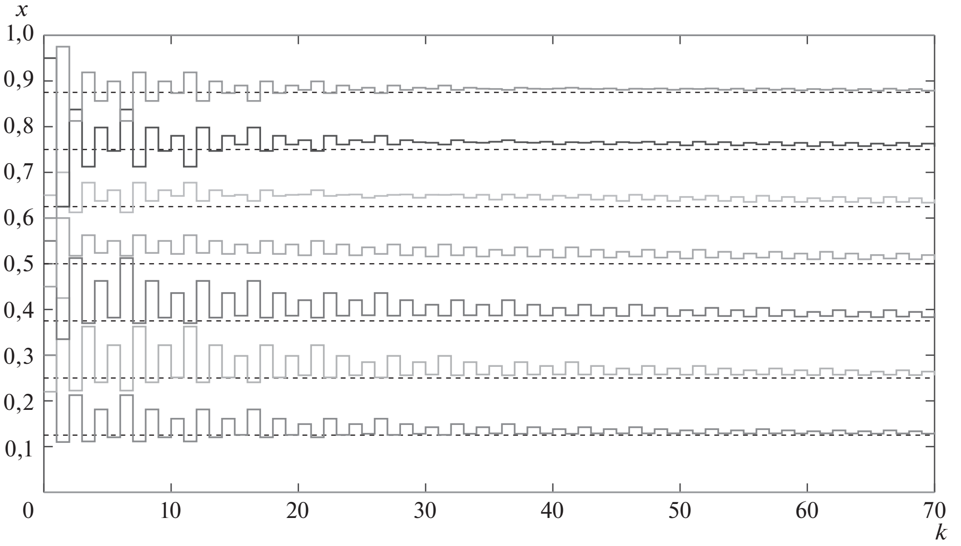

Рис. 2. Динамика агентов для системы с запаздыванием.

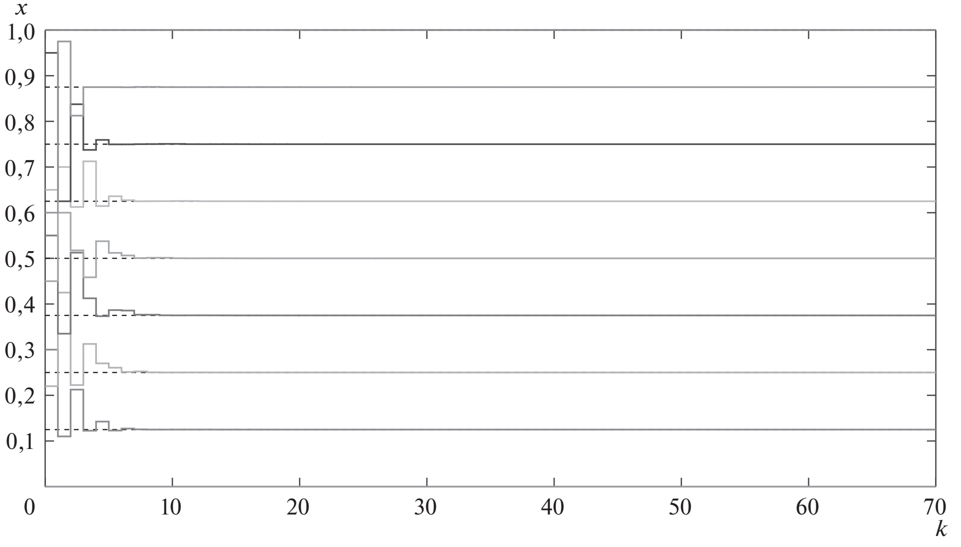

Рис. 3. Динамика агентов для системы с переключениями.

Результаты численного моделирования представлены на рис. 1–4.

Рисунок 1 соответствует случаю, когда в системе отсутствуют запаздывания и переключения, каждый агент получает информацию от своих ближайших соседей, а управления определяются по формуле (2).

На рис. 2 приведены графики компонент решения системы с коммуникационным запаздыванием. Считаем, что управления имеют вид

$$u_i(k) = \frac{1}{2}\left((x_{i-1}(k-5) - x_i(k)) + (x_{i+1}(k-5) - x_i(k))\right), \quad i = 1, \ldots, 7.$$

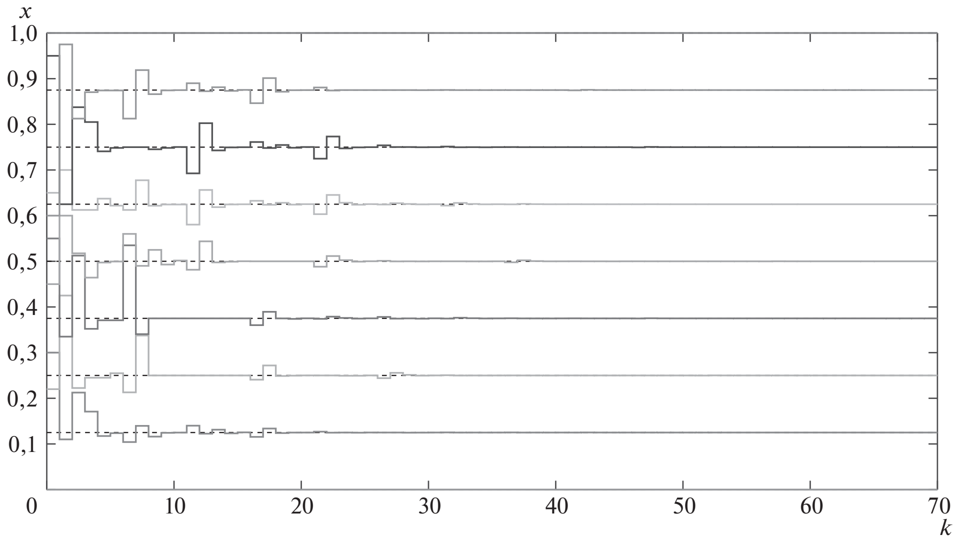

Рис. 4. Динамика агентов для системы с запаздыванием и переключениями.

Далее предполагаем, что в системе отсутствуют запаздывания, но происходят переключения коммуникационной топологии. В качестве начальной выбирается топология, соответствующая сигналам от ближайших соседей. Количество итераций между последовательными моментами переключений случайным образом выбираются из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Графики компонент решения соответствующей замкнутой системы представлены на рис. 3.

Рисунок 4 соответствует системе с переключающимися связями и коммуникационным запаздыванием.

Результаты моделирования согласуются с полученными в статье теоретическими выводами. Введение в систему запаздывания и переключений не нарушает сходимости агентов к равномерному размещению.

6. Заключение

Рассмотрена задача развертывания агентов по отрезку прямой в дискретном времени при наличии запаздывания в каналах связи и переключений и при отсутствии информации о значении запаздывания и о законе переключения. Показано, что ни запаздывание, ни переключения не влияют на факт сходимости состояний агентов к равномерному (эквидистантному) размещению на отрезке. Теоретические результаты иллюстрируются численным моделированием. Доказательства основаны как на известных, так и на новых подходах к анализу устойчивости позитивных систем. Хотя в статье рассматривается идеализированная задача, полученные при ее решении результаты могут быть распространены на более сложные и практически важные ситуации.

В качестве возможных направлений дальнейших исследований можно указать на нахождение оценок скорости сходимости агентов к равномерному размещению, а также на распространение полученных результатов на системы с переменным запаздыванием.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Нетрудно проверить, что вектор (6) является положением равновесия системы (15).

Запишем эту систему в векторной форме

$$x(k+1) = Ax(k) + c,$$

где c – постоянный вектор, A – постоянная матрица с элементами a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$, причем $a_{im_i} = (l_i - i)/(l_i - m_i)$, если $m_i \neq 0$, $a_{il_i} = (i - m_i)/(l_i - m_i)$, если $l_i \neq n+1$, а остальные элементы i-й строки равны нулю, $i = 1,\ldots,n$.

С помощью замены переменных

$$y(k) = x(k) - \tilde{x} \tag{П.1}$$

получаем систему в отклонениях

$$y(k+1) = Ay(k), \tag{П.2}$$

которая является позитивной.

Пусть $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)^\top$, где

$$\xi_i = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1}}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{П.3}$$

Выберем некоторое $i \in \{1,\ldots,n\}$ и скалярно умножим i-ю вектор-строку матрицы A на вектор ξ. Если $m_i \neq 0$ и $l_i \neq n+1$, то справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = \frac{l_i - i}{l_i - m_i}\xi_{m_i} + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}\xi_{l_i} = \\ = \xi_i + \frac{i - m_i}{l_i - m_i}\left(\frac{1}{2^i} + \ldots + \frac{1}{2^{l_i - 1}}\right) - \frac{l_i - i}{l_i - m_i}\left(\frac{1}{2^{m_i}} + \ldots + \frac{1}{2^{i-1}}\right) = \\ = \xi_i + \frac{2^{1-i}}{l_i - m_i}\left((i - m_i)\left(1 - 2^{i - l_i}\right) - (l_i - i)\left(2^{i - m_i} - 1\right)\right) = \\ = \xi_i + \frac{2^{1-i}}{l_i - m_i}\left((l_i - m_i)\left(1 - 2^{i - l_i}\right) - (l_i - i)\left(2^{i - m_i} - 2^{i - l_i}\right)\right) = \\ = \xi_i + 2^{1 - l_i}(l_i - i)\left(\frac{2^{l_i - i} - 1}{l_i - i} - \frac{2^{l_i - m_i} - 1}{l_i - m_i}\right).\end{gathered}$$

Заметим, что $l_i - m_i > l_i - i$, а последовательность $\{(2^k - 1)/k\}$ строго возрастает. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j < \xi_i. \tag{П.4}$$

Очевидно, что неравенство (П.4) выполняется и в случаях, когда $m_i = 0$ или $l_i = n + 1$. Таким образом, получаем

$$A\xi < \xi. \tag{П.5}$$

Применяя утверждение 1, приходим к выводу, что система (П.2) асимптотически устойчива. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для системы (16) соответствующая система в отклонениях представима в виде

$$y(k+1) = Ay(k-r), \tag{П.6}$$

где матрица A совпадает с матрицей системы (П.2). С использованием неравенства (П.5) и утверждений 1 и 3 получаем, что система (П.6) асимптотически устойчива при любом целом неотрицательном запаздывании. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Производя в (17) замену переменных (П.1), получаем систему с переключениями

$$y(k+1) = A^{(\sigma)}y(k) \tag{П.7}$$

и соответствующее ей семейство подсистем

$$y(k+1) = A^{(s)}y(k), \quad s = 1, \ldots, N. \tag{П.8}$$

Здесь $A^{(s)} = \{a_{ij}^{(s)}\}_{i,j=1}^{n}$ — постоянные матрицы такие, что

$$a_{im_i^{(s)}}^{(s)} = \left(l_i^{(s)} - i\right) / \left(l_i^{(s)} - m_i^{(s)}\right),$$

если $m_i^{(s)} \neq 0$, $a_{il_i^{(s)}}^{(s)} = (i - m_i^{(s)})/(l_i^{(s)} - m_i^{(s)})$, если $l_i^{(s)} \neq n+1$, а остальные элементы i-й строки равны нулю, $i = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, N$.

Пусть компоненты положительного вектора ξ определяются по формуле (П.3). Тогда (см. доказательство теоремы 1) справедливы соотношения

$$A^{(s)}\xi < \xi, \quad s = 1, \ldots, N. \tag{П.9}$$

Применяя утверждение 2, приходим к выводу, что система (П.7) асимптотически устойчива при любом законе переключения. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. В данном случае с помощью замены переменных (П.1) получаем систему с переключениями и запаздыванием

$$y(k+1) = A^{(\sigma)}y(k-r) \tag{П.10}$$

и соответствующее семейство подсистем

$$y(k+1) = A^{(s)}y(k-r), \quad s = 1, \ldots, N.$$

Здесь матрицы $A^{(s)}$ совпадают с матрицами подсистем семейства (П.8).

Далее вводим расширенный вектор состояния $z(k) = (y^\top(k), y^\top(k-1), \ldots$ $\ldots, y^\top(k-r))^\top$. Тогда система (П.10) может быть записана в виде

$$z(k+1) = C^{(\sigma)} z(k), \tag{П.11}$$

где

$$C^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A^{(s)} \\ I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 1, \ldots, N,$$

а I_n — единичная матрица порядка n.

Пусть $\zeta = (\zeta_1^\top, \ldots, \zeta_{r+1}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{n(r+1)}$. Здесь $\zeta_j = \xi + \delta(j-1)\nu$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, r+1$, а компоненты положительного вектора ξ определяются по формуле (П.3), $\nu = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$, δ — положительный параметр.

Учитывая выполнение неравенств (П.9), получаем, что при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$C^{(s)}\zeta < \zeta, \quad s = 1, \ldots, N.$$

Следовательно (см. утверждение 2), система (П.11) асимптотически устойчива при любом законе переключения. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ren W., Cao W.* Distributed Coordination of Multi-Agent Networks. London: Springer-Verlag, 2011.
2. *Mesbahi M., Egerstedt M.* Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks. Princeton and Oxford: Princeton Univ. Press, 2010.
3. *Martinez S., Bullo F.* Optimal sensor placement and motion coordination for target tracking // Automatica. 2006. V. 42. P. 661–668.
4. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // АиТ. 2016. № 10. С. 3–39.

   Proskurnikov A.V., Fradkov A.L. Problems and Methods of Network Control // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1711–1740.
5. *Wagner I.A., Bruckstein A.M.* Row Straightening via Local Interactions // Circuits Syst. Signal Process. 1997. V. 16. No. 2. P. 287–305.
6. *Щербаков П.С.* Управление формациями. Схема Ван Лоуна и другие алгоритмы // Управление большими системами. 2010. Вып. 30.1. С. 681–696.

   Shcherbakov P.S. Formation Control. The Van Loan Scheme and Other Algorithms // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 10. P. 681–696.
7. *Квинто Я.И., Парсегов С.Э.* Равноудаленное расположение агентов на отрезке. Анализ алгоритма и его обобщения // АиТ. 2012. № 11. С. 30–41.

   Kvinto Y.I., Parsegov S.E. Equidistant Arrangement of Agents on Line. Analysis of the Algorithm and Its Generalization // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 11. P. 1784–1793.

8. *Parsegov S.E., Polyakov A.E., Shcherbakov P.S.* Nonlinear fixed-time control protocol for uniform allocation of agents on a segment // Proc. 51st IEEE Conf. Decision Control. 2012. P. 7732–7737.

9. *Парсегов С.Е., Поляков А.Е., Щербаков П.С.* Достижение равноудаленного распределения агентов на отрезке за заданное время // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 5. С. 524–528.

10. *Darboux J.G.* Sur un probleme de geometrie elementaire // Bull. Sci. Math. 1878. V. 2. No. 1. P. 298–304.

11. *Проскурников А.В., Парсегов С.Э.* Задача равномерного размещения на отрезке для агентов с моделью второго порядка // АиТ. 2016. № 7. С. 152–165.

    Proskurnikov A.V., Parsegov S.E. Problem of Uniform Deployment on a Line Segment for Second-Order Agents // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 7. P. 1248–1258.

12. *Cortes J., Martinez S., Karatas T., Bullo F.* Coverage control for mobile sensing networks // IEEE Trans. Robot. Autom. 2004. V. 20. No. 2. P. 243–255.

13. *Farina L., Rinaldi S.* Positive linear systems: theory and applications. New York: Wiley, 2000.

14. *Hofbauer J., So J.W.* Diagonal Dominance and Harmless Off-Diagonal Delays // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 2675–2682.

15. *Wu L., Lam J., Shu Z., Du B.* On Stability and Stabilizability of Positive Delay Systems // Asian J. Control. 2009. V. 11. No. 2. P. 226–234.

16. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal stability of a class of discrete-time positive switched systems with delay // IET Control Theory Appl. 2018. V. 12. No. 6. P. 812–818.

17. *Aleksandrov A., Fradkov A., Semenov A.* Delayed and switched control of formations on a line segment: Delays and switches do not matter // IEEE Trans. Autom. Control. Feb. 2020. V. 65. Is. 2. P. 794–800. DOI: 10.1109/TAC.2019.2918995

18. *Проскурников А.В., Матвеев А.С.* Критерии Цыпкина и Джури–Ли синхронизации и устойчивости дискретных многоагентных систем // АиТ. 2018. № 6. С. 119–139.

    Proskurnikov A.V., Matveev A.S. Tsypkin and Jury–Lee Criteria for Synchronization and Stability of Discrete-time Multiagent Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1057–1073.

19. *Lin P., Ren W.* Constrained consensus in unbalanced networks with communication delays // IEEE Trans. Autom. Control. 2014. V. 59. No. 3. P. 775–781.

20. *Xiong Q., Lin P., Ren W., Yang Ch., Gui W.* Containment control for discrete-time multiagent systems with communication delays and switching topologies // IEEE Trans. Cybernet. 2019. V. 49. No. 10. P. 3827–3830.

21. *Niculescu S.* Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. Lecture Notes in Control and Information Science. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, 2001.

22. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulf K., King C.* Stability criteria for switched and hybrid systems // SIAM Rev. 2007. V. 49. No. 4. P. 545–592.

23. *Berman A., Plemmons R.J.* Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Philadelphia: SIAM, 1994.

24. *Blanchini F., Colaneri P., Valcher M.E.* Switched positive linear systems // Foundat. Trends Syst. Control. 2015. V. 2. No. 2. P. 101–273.

25. *Kazkurewicz E., Bhaya A.* Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation. Boston: Birkhauser, 1999.

26. *Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Platonov A.V.* Ultimate Boundedness Conditions for a Hybrid Model of Population Dynamics // Proc. 21st Mediterranean Conf. Control Autom. 2013. P. 622–627.
27. *Valcher M.E., Zorzan I.* On the consensus of homogeneous multiagent systems with positivity constraints // IEEE Trans. Autom. Control. 2017. V. 62. No. 10. P. 5096–5110.
28. *Shorten R.N., Wirth F., Leith D.* A positive systems model of TCP-like congestion control // IEEE Trans. Networking. 2006. V. 14. No. 3. P. 616–629.
29. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем с переключениями // АиТ. 2016. № 5. С. 37–49.

    Aleksandrov A.Yu., Platonov A.V. On Stability of Solutions for a Class of Nonlinear Difference Systems with Switching // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 779–788.
30. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals for discrete-time positive systems with delay // Syst. Control Lett. 2014. V. 63. P. 63–67.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 17.02.2019

После доработки 07.11.2019

Принята к публикации 28.11.2019