Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

© 2020 г. А.А. БЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (a.a.belov@inbox.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
О.Г. АНДРИАНОВА, канд. физ.-мат. наук (andrianovaog@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва)

СИНТЕЗ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ[1]

Рассматриваются задачи синтеза робастных статических регуляторов для дискретных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями, на вход которых поступают случайные возмущения. Рассматриваемые регуляторы стабилизируют объект управления для всех возможных значений неопределенности из рассматриваемого множества параметров и обеспечивают желаемый уровень подавления случайных внешних возмущений. Приводится численный пример.

Ключевые слова: робастное управление, матричные неравенства, выпуклая оптимизация, средняя анизотропия, параметрические неопределенности.

DOI: 10.31857/S0005231020040078

1. Введение

Задачи синтеза статических регуляторов для линейных стационарных систем стали объектом широкого исследования в конце 1990-х — начале 2000-х гг. [1–3]. Основным недостатком данной группы методов являлось то, что они имели дело с системами с точно известными параметрами и не учитывали возможные параметрические неопределенности, которые неизбежно присутствуют в математической модели системы. Методы синтеза, разработанные для полностью определенных систем не могли гарантировать заданный показатель качества или даже устойчивость замкнутой системы в случае, если параметры реального объекта отклонялись от параметров модели. Как следствие, при синтезе систем управления робастность приобрела огромную важность. Это привело к появлению цикла работ, посвященных синтезу робастных регуляторов для систем с параметрическими неопределенностями. Особое внимание в публикациях уделялось рассмотрению задач подавления внешних возмущений для систем с политопическими и ограниченными по норме неопределенностями. Целью управления в таких задачах являлось обеспечение робастной устойчивости замкнутой системы и желаемого качества процессов, протекающих в системе, с учетом действующих на систему

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-38-00076).

внешних возмущений. Решению таких задач робастного управления посвящены публикации [4, 5].

Для линейных стационарных систем наиболее известными методами решения задач подавления внешних возмущений, в которых критерием качества является норма передаточной функции замкнутой системы от возмущения к управляемому выходу, являются $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ и анизотропийный подходы. Минимизация того или иного критерия качества позволяет наилучшим образом подавлять тот или иной класс внешних возмущений, действующих на систему.

Так, $\mathcal{H}_2$ регулятор позволяет наилучшим образом минимизировать среднеквадратичное отклонение выходной переменной системы, на которую действует гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей. Задача построения робастного $\mathcal{H}_2$ управления была решена, например, в [6].

В случае $\mathcal{H}_\infty$ управления минимизируется максимальная (по всему диапазону частот) операторная норма передаточной матрицы (как коэффициент усиления внешнего возмущающего воздействия). Решение задач субоптимального управления по состоянию для дискретных систем с ограниченными по норме неопределенностями приведено в [5, 7]. Задачи управления по выходу были решены в [8, 9], а решения аналогичных задач для неопределенных систем с задержками по времени можно найти в [9, 10]. Главным недостатком $\mathcal{H}_\infty$ подхода является то, что минимум ищется по всем частотам. Регуляторы, полученные с использованием $\mathcal{H}_\infty$ подхода, как правило, излишне консервативны, что приводит к большим энергетическим затратам на реализацию закона управления исполнительным устройством. Для преодоления этого недостатка могут быть использованы смешанные $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ методы или так называемый метод формирования контура [11]. Метод формирования контура заключается в использовании дополнительных фильтров, отсекающих определенный диапазон частот. Однако такой подход является строго индивидуальным для каждого объекта и требует глубокого исследования. Смешанные $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ методы позволяют минимизировать $\mathcal{H}_\infty$ норму передаточной функции от возмущения к одному управляемому выходу с ограничением на $\mathcal{H}_2$ норму передаточной функции от возмущения к другому выходу. Смешанный $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ подход к управлению системами с неопределенностями был применен в [12].

Аналогично теории $\mathcal{H}_\infty$ управления анизотропийная теория изучает возможности подавления системой случайных внешних возмущений. В отличие от перечисленных выше подходов анизотропийная теория управления учитывает окрашенность случайного входного возмущения. Мерой окрашенности выступает неотрицательное число, называемое средней анизотропией, которая используется для теоретико-информационного (или энтропийного) описания статистической неопределенности в отношении случайных шумов [13–16]. Были преодолены недостатки LQG/$\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ регуляторов [17]. Применение анизотропийных регуляторов при управлении дискретными системами существенно уменьшает энергетические затраты на управление за счет учета статистической неопределенности случайного внешнего возмущения, не снижая при этом качества переходных процессов [18]. При этом случаи $\mathcal{H}_2$ и

$\mathcal{H}_\infty$ управления могут рассматриваться как частные предельные случаи анизотропийной теории.

Основываясь на изложенном, разработка и развитие теории робастного анизотропийного управления для параметрически неопределенных систем является важной проблемой. Задача синтеза робастных систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями и анизотропийным критерием качества была впервые решена в [19, 20], где параметры регулятора определялись из решения связанных между собой нелинейных матричных уравнений, что приводило к значительным сложностям при численной реализации разработанной методики. Данный недостаток был преодолен при применении матричных неравенств. Условия синтеза статических и динамических регуляторов на основе методов выпуклой оптимизации были сформулированы в [18, 21]. Решение одной из задач робастного анизотропийного управления для параметрически неопределенной дискретной системы на основе матричных неравенств и с использованием методов выпуклой оптимизации можно найти в [22]. Публикация [22] посвящена синтезу субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию для систем с дробно-линейными параметрическими неопределенностями. Задача синтеза робастного анизотропийного регулятора для системы с ограниченными по норме неопределенностями в рассматриваемой в настоящей статье постановке с использованием матричных неравенств ранее была решена только в классе алгебро-разностных или дескрипторных систем [23]. Можно показать, что в определенных случаях параметрические неопределенности объекта управления можно представить как в виде дробно-линейных, так и в виде ограниченных по норме неопределенностей, рассмотренных в настоящей статье. Однако данные классы не тождественны. Отсутствие на текущий момент удобных вычислительных методик синтеза робастных анизотропийных регуляторов для параметрически неопределенных обыкновенных (разностных) систем в рассматриваемой постановке и необходимость разработки такой теории явилось главным мотивирующим фактором при написании данной статьи. Авторами рассматриваются задачи синтеза робастного анизотропийного управления для обыкновенной дискретной системы с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. При этом решаются два типа задач: при полном измерении вектора состояния и при синтезе статического регулятора по выходу.

Данная статья имеет следующую структуру. В разделе 2 даны основные сведения из теории анизотропийного управления. В разделе 3 приводится подробная постановка решаемых задач. Раздел 4 посвящен решению поставленных задач. Численные эксперименты приведены в разделе 5.

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел; $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел; $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $\mathbb{R}^{m\times n}$ – множество матриц размеров $m \times n$ с вещественными коэффициентами; I_n – единичная матрица размеров $n \times n$; Z^* – эрмитово сопряжение матрицы $Z = [z_{ij}] \in \mathbb{C}^{m\times n}$: $Z^* = [z_{ji}^*] \in \mathbb{C}^{n\times m}$; $\rho(A)$ – спектральный радиус квадратной матрицы A: $\rho(A) = \max_j |\lambda_j(A)|$; $\overline{\sigma}(A)$ – максимальное сингулярное число матрицы A: $\overline{\sigma}(A) = \sqrt{\rho(A^*A)}$; $\mathrm{sym}\,(A) = A + A^\top$; $\mathbf{E}$ – символ математического ожидания; $\widehat{\mathcal{F}}(\omega) = \lim_{\rho\to 1-0} \mathcal{F}(\rho \mathrm{e}^{i\omega})$ – угловое граничное значение комплекснозначной матричной функции.

2. Основные теоретические сведения

Для дальнейшего изложения и решения поставленных выше задач понадобятся некоторые теоретические сведения, которые рассмотрим в настоящем разделе. К таким сведениям относятся понятия анизотропии случайного вектора, средней анизотропии случайной последовательности и анизотропийная норма системы [13–16]. Кроме того, приведем формулировки некоторых теорем из анизотропийного анализа обыкновенных дискретных систем, используемые для преобразования матричных неравенств.

Будем полагать, что входной сигнал $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является стационарной гауссовской последовательностью случайных m-мерных векторов. Составим из элементов последовательности W на отрезке $[0, N-1]$ случайный вектор $W_{0:N-1} = \left[\begin{array}{ccc} w_0^\top & \cdots & w_{N-1}^\top \end{array}\right]^\top$. Предполагается, что вектор $W_{0:N-1}$ абсолютно непрерывно распределен для каждого $N > 0$.

Определение 1. *Анизотропией* $\mathbf{A}(W_{0:N-1})$ *случайного вектора* $W_{0:N-1}$ *называют минимальное значение относительной энтропии по отношению к гауссовским распределениям в* $\mathbb{R}^{mN}$ *с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей.*

Анизотропию вектора можно вычислить по формуле

$$\mathbf{A}(W_{0:N-1}) = \frac{mN}{2}\ln\left(\frac{2\pi e}{mN}\mathbf{E}(|W_{0:N-1}|^2)\right) - h(W_{0:N-1}),$$

где $h(W_{0:N-1}) = \mathbf{E}[-\ln f_N(W_{0:N-1})] = -\int_{\mathbb{R}^{mN}} f_N(w)\ln f_N(w)dw$ – дифференциальная энтропия, $f_N : \mathbb{R}^{mN} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ – плотность распределения вероятностей вектора $W_{0:N-1}$.

Определение 2. *Средней анизотропией последовательности* W *называют среднюю интенсивность анизотропии в единицу времени:*

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty}\frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N}. \tag{2.1}$$

Рассмотрим устойчивую линейную дискретную систему $\mathcal{F}$, заданную в пространстве состояний в виде:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \tag{2.2}$$

$$y(k) = Cx(k) + Dw(k), \tag{2.3}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – стационарная гауссовская последовательность m-мерных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$ $(a \geqslant 0)$ и нулевым средним, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ – выход системы.

Для заданной системы $\mathcal{F}$ с входным сигналом $W = \{w(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ среднеквадратичный коэффициент усиления определен в виде

$$Q(\mathcal{F}, W) = \frac{\|Y\|_{\mathcal{P}}}{\|W\|_{\mathcal{P}}}, \tag{2.4}$$

где $\|Y\|_{\mathcal{P}} = \sqrt{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{E}|y(k)|^2}$ – мощностная норма последовательности $Y = \{y(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Определение 3. Для заданной величины $a \geqslant 0$ анизотропийной нормой системы $\mathcal{F}$ называют

$$|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_a = \sup_{\overline{\mathbf{A}}(W)\leqslant a} Q(\mathcal{F}, W). \tag{2.5}$$

Таким образом, анизотропийная норма системы $|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_a$ задает стохастический коэффициент усиления системой $\mathcal{F}$ входного сигнала W.

Рассмотрим два предельных случая для значения средней анизотропии [13, 14]. Если $\overline{\mathbf{A}}(W) = 0$, то анизотропийная норма системы $\mathcal{F}$ равна $|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_0 = \frac{\|\mathcal{F}\|_2}{\sqrt{m}}$. Имеет место соотношение $\lim_{a\to\infty}|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_a = \|\mathcal{F}\|_\infty$.

При решении задачи анизотропийного анализа для обыкновенной системы с точно известными параметрами можно воспользоваться теоремами из [24, 25] соответственно.

Теорема 1. Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ анизотропийная норма системы (2.2)–(2.3) ограничена величиной γ, т.е.

$$|\!|\!|\mathcal{F}|\!|\!|_a < \gamma,$$

если существует скаляр $\eta > \gamma^2$ и $(n\times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, удовлетворяющие условиям:

$$\eta - \Big(e^{-2a}\det(\eta I_m - B^\top\Phi B - D^\top D)\Big)^{1/m} < \gamma^2, \tag{2.6}$$

$$\begin{bmatrix} A^\top\Phi A - \Phi + C^\top C & A^\top\Phi B + C^\top D \\ B^\top\Phi A + D^\top C & B^\top\Phi B + D^\top D - \eta I_m \end{bmatrix} < 0. \tag{2.7}$$

Теорема 2. Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ анизотропийная норма системы (2.2)–(2.3) ограничена величиной γ, если существует $\eta > \gamma^2$, $n\times n$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$ и $(n\times n)$-матрица Y такие, что выполнены неравенства:

$$\eta - \Big(e^{-2a}\det(\eta I_m - B^\top\Phi B - D^\top D)\Big)^{1/m} < \gamma^2, \tag{2.8}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Y^\top & YA & YB & \Phi^\top - Y^\top - \frac{1}{2}Y & 0 \\ A^\top Y^\top & -\Phi & 0 & A^\top Y^\top & C^\top \\ B^\top Y^\top & 0 & -\eta I_m & B^\top Y^\top & D^\top \\ \Phi - Y - \frac{1}{2}Y^\top & YA & YB & -Y - Y^\top & 0 \\ 0 & C & D & 0 & -I_p \end{bmatrix} < 0. \tag{2.9}$$

Рассмотренные теоремы 1 и 2 будут использованы далее при решении задачи синтеза робастных регуляторов для систем с параметрическими неопределенностями.

3. Постановка задачи управления

Перейдем к постановке задачи синтеза робастных анизотропийных регуляторов. Будем рассматривать дискретные системы, заданные в пространстве состояний в виде:

$$x(k+1) = A^{\Delta}x(k) + B_w^{\Delta}w(k) + B_u u(k), \tag{3.1}$$

$$y(k) = C_y^{\Delta}x(k) + D_{yw}^{\Delta}w(k), \tag{3.2}$$

$$z(k) = C_z^{\Delta}x(k) + D_{zw}^{\Delta}w(k) + D_{zu}u(k), \tag{3.3}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u(k) \in \mathbb{R}^{m_1}$ – управление, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ – случайная стационарная последовательность с ограниченным уровнем средней анизотропии $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ – измеряемый выход, $z(k) \in \mathbb{R}^{p_1}$ – управляемый выход, $A^{\Delta} = A + M_A \Delta N_A$, $B_w^{\Delta} = B_w + M_B \Delta N_B$, $C_z^{\Delta} = C_z + M_C \Delta N_C$, $C_y^{\Delta} = C_y + M_{Cy} \Delta N_{Cy}$, $D_{yw}^{\Delta} = D_{yw} + M_{Dy} \Delta N_{Dy}$, $D_{zw}^{\Delta} = D_{zw} + M_D \Delta N_D$. Матрицы A, B_w, B_u C, D_w, C_z, D_{zw}, D_{zu}, M_A, N_A, M_B, N_B, M_C, N_C, M_D, N_D, M_{Cy}, N_{Cy}, M_{Dy} и N_{Dy} – постоянные соответствующих размеров. Матрица $\Delta \in \mathbb{R}^{q \times q}$ – неизвестная, ограниченная по спектральной норме $\overline{\sigma}(\Delta) \leqslant 1$, т.е. $\Delta^{\top}\Delta \leqslant I_q$.

Замечание 1. В случае если в уравнениях (3.1)–(3.2) выполнены равенства $M_A = M_B$, $N_A = N_C$, $N_B = N_D$, $M_C = M_D$, то данная система может быть записана через дробно-линейные неопределенности [22]. В противном случае получить эквивалентное представление через дробно-линейные неопределенности невозможно.

Сформулируем две задачи управления, которые будут решены далее.

Задача 1 (задача синтеза статического регулятора по состоянию). Будем полагать, что $D_{zu} = 0$ и $p_1 \leqslant m$. Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти управление по состоянию в виде

$$u(k) = Fx(k), \qquad F \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}, \tag{3.4}$$

которое стабилизирует систему (3.1)–(3.3) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы числом γ, т.е. $|||\mathcal{F}_{cl}^{sf}|||_a < \gamma$ для всех возможных значений Δ из заданного множества.

Задача 2 (задача синтеза статического регулятора по выходу). Для заданных скалярных величин $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ требуется найти закон управления в виде статической обратной связи по выходу

$$u(k) = Ky(k), \qquad K \in \mathbb{R}^{m_1 \times p_1}, \tag{3.5}$$

который стабилизирует систему (3.1)–(3.3) и гарантирует ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы числом γ, т.е. $|||\mathcal{F}_{cl}^{out}|||_a < \gamma$ для всех возможных значений Δ из заданного множества.

Решение сформулированных задач будет рассмотрено в разделе 4.

4. Основные результаты

4.1. Синтез робастного анизотропийного регулятора по состоянию

Для задачи 1 система (3.1)–(3.3), замкнутая управлением (3.4), определяется выражениями:

$$x(k+1) = \left(A^{\Delta} + B_u F\right) x(k) + B_w^{\Delta} w(k), \tag{4.1}$$

$$z(k) = C_z^{\Delta} x(k) + D_{zw}^{\Delta} w(k). \tag{4.2}$$

Для решения задачи синтеза запишем двойственную систему для системы (4.1)–(4.2). Она имеет вид:

$$x'(k+1) = \left(A^{\Delta} + B_u F\right)^{\top} x'(k) + \left(C_z^{\Delta}\right)^{\top} w'(k), \tag{4.3}$$

$$z'(k) = \left(B_w^{\Delta}\right)^{\top} x'(k) + \left(D_{zw}^{\Delta}\right)^{\top} w'(k). \tag{4.4}$$

Следует отметить, что для $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ норм в линейных системах выполняется условие двойственности, т.е. $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_\infty$ нормы исходной и двойственной систем совпадают. К сожалению, анизотропийная норма подобным свойством не обладает, однако в случае когда $p_1 \leqslant m$, требования, предъявляемые к величине анизотропийной нормы исходной замкнутой системы, могут быть выполнены и для системы, двойственной к ней.

Такая возможность согласуется с асимптотическим поведением анизотропийной нормы [26]:

$$\left\|\!\left|\mathcal{F}\right|\!\right\|_a \big|_{a\to+0} = \frac{1}{\sqrt{m}}\|\mathcal{F}\|_2 \left(1 + \sqrt{a\left(\frac{\|\mathcal{F}\|_4^4}{\|\mathcal{F}\|_2^4} - \frac{1}{m}\right)} + o(\sqrt{a})\right), \tag{4.5}$$

$$\left\|\!\left|\mathcal{F}\right|\!\right\|_a \big|_{a\to+\infty} = \|\mathcal{F}\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{2}{m}(a + J + o(1))\right)\right), \tag{4.6}$$

где $J = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\det\left(I_m - \|\mathcal{F}\|_\infty^{-2}\widehat{\mathcal{F}}^*(\omega)\widehat{\mathcal{F}}(\omega)\right) d\omega$ – энтропийный интеграл.

Из выражений (4.5) и (4.6) следует, что при $p_1 \leqslant m$ справедливо неравенство $\left\|\!\left|\mathcal{F}_{cl}\right|\!\right\|_a \leqslant \left\|\!\left|\mathcal{F}'_{cl}\right|\!\right\|_a$ как при $a \to +0$, так и при $a \to +\infty$. Кроме того, исходя из вида графика анизотропийной нормы системы в зависимости от уровня средней анизотропии входного возмущения и на основе ряда вычислительных экспериментов, можно выдвинуть гипотезу о том, что взаимное расположение анизотропийных норм сопряженных систем в случае $p_1 \leqslant m$ сохраняется на всем интервале $a \in [0;\ +\infty)$.

Отметим, что если $p = m$, анизотропийные нормы двойственной и исходной систем равны, т.е. $\left\|\!\left|\mathcal{F}_{cl}\right|\!\right\|_a = \left\|\!\left|\mathcal{F}_{cl}^{dual}\right|\!\right\|_a$.

Введем обозначение $F \cdot Y^{\top} = \Lambda^{\top}$, т.е. $F = \Lambda^{\top} Y^{-\top}$. Подставим матрицы двойственной системы в неравенство (2.9) из теоремы 2 и вынесем в отдельное слагаемое комбинацию с Δ:

$$\Omega + \mathrm{sym}\,\left(M_1 \Delta N_1\right) < 0, \tag{4.7}$$

где

$$
\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} & 0 \\ * & -\Phi & 0 & AY^\top + B_u\Lambda^\top & B_w \\ * & * & -\eta I_{p_1} & C_zY^\top & D_{zw} \\ * & * & * & -Y - Y^\top & 0 \\ * & * & * & * & -I_m \end{bmatrix}, \tag{4.8}
$$

$$
\Omega_{11} = -\frac{1}{2}Y - \frac{1}{2}Y^\top, \quad \Omega_{12} = YA^\top + \Lambda B_u^\top, \quad \Omega_{13} = YC_z^\top, \quad \Omega_{14} = \Phi - Y^\top - \frac{1}{2}Y,
$$

$$
M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & 0 & 0 & M_B & 0 \\ 0 & M_C & 0 & 0 & M_D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} N_AY^\top & 0 & 0 & N_BY^\top & 0 \\ N_CY^\top & 0 & 0 & N_CY^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_D \end{bmatrix}. \tag{4.9}
$$

Согласно лемме П.1 (см. Приложение), для выполнения неравенства (4.7) требуется существование такого $\varepsilon_1 > 0$, чтобы выполнялось неравенство

$$
\Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top + \frac{1}{\varepsilon_1} N_1^\top N_1 < 0. \tag{4.10}
$$

Неравенство (2.8) из теоремы 2 для некоторой $\Psi \in \mathbb{R}^{m\times m}$ можно записать в виде системы [18]

$$
\begin{cases} \eta - \left(e^{-2a}\det(\Psi)\right)^{1/m} < \gamma^2, \\ \eta I_m - B^\top \Phi B - D^\top D > \Psi. \end{cases} \tag{4.11}
$$

Запишем аналог (4.11) для системы (4.3)–(4.4). В этом случае введем матрицу $\Psi \in \mathbb{R}^{p_1\times p_1}$ и получим

$$
\begin{cases} \eta - \left(e^{-2a}\det(\Psi)\right)^{1/p_1} < \gamma^2, \\ \eta I_{p_1} - C_z^\Delta \Phi \left(C_z^\Delta\right)^\top - D_{zw}^\Delta \left(D_{zw}^\Delta\right)^\top > \Psi. \end{cases} \tag{4.12}
$$

Последнее неравенство системы (4.12) можно переписать в виде

$$
\eta I_{p_1} - \Psi - C_z^\Delta \left(-\Phi^{-1}\right)^{-1} \left(C_z^\Delta\right)^\top - D_{zw}^\Delta (-I)^{-1} \left(D_{zw}^\Delta\right)^\top > 0,
$$

где $\left(-\Phi^{-1}\right)^{-1} < 0$. Дважды применив лемму П.2 (см. Приложение) к последнему неравенству и обозначив $\Pi = \Phi^{-1}$, получим, что

$$
\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z^\Delta & D_{zw}^\Delta \\ * & -\Pi & 0 \\ * & * & -I_m \end{bmatrix} < 0. \tag{4.13}
$$

Теперь можно сформулировать теорему 3, дающую достаточные условия для построения робастного субоптимального анизотропийного регулятора по состоянию.

Теорема 3. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ задача 1 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Pi = \Pi^\top > 0$, $(p_1 \times p_1)$-матрица $\Psi > 0$, $(n \times n)$-матрица Y и $(n \times m_1)$-матрица Λ такие, что выполнены неравенства*

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.14}$$

$$\eta - \left(e^{-2a} \det(\Psi)\right)^{1/p_1} < \gamma^2, \tag{4.15}$$

$$\begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.16}$$

причем

$$\Phi\Pi = I_n. \tag{4.17}$$

Матрица Ω задается выражением (4.8), *матрицы M_1 и N_1 определяются из выражения* (4.9), *а*

$$\mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z & D_{zw} \\ * & -\Pi & 0 \\ * & * & -I_m \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} M_C & M_D \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_C & 0 \\ 0 & 0 & N_D \end{bmatrix}.$$

Неизвестная матрица в управлении может быть найдена по формуле

$$F = \Lambda^\top Y^{-\top}.$$

Для доказательства теоремы 3 представим слагаемое $\frac{1}{\varepsilon_1} N_1^\top N_1$ в форме $(-N_1^\top)(-\varepsilon_1 I)^{-1} N_1$. Очевидно, что $(-\varepsilon_1 I) < 0$. Применяя преобразование из леммы П.2 для неравенства (4.10), получаем неравенство (4.14). Неравенство (4.16) получается из неравенства (4.13) путем выделения слагаемых, содержащих Δ, и применения леммы П.1.

Если параметрические неопределенности представлены не только в матрице A^Δ, то условия теоремы 3 являются невыпуклыми и требуют поиска взаимнообратных матриц. Для того чтобы избежать поиска взаимнообратных матрицы, предложим следующий выход. Введем невырожденную неизвестную матрицу $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и рассмотрим матрицу

$$W = \begin{bmatrix} I_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Умножим неравенство (4.13) слева и справа на W и $W^\top$ соответственно и получим, что

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z^\Delta G^\top & D_{zw}^\Delta \\ * & -G\Pi G^\top & 0 \\ * & * & -I_m \end{bmatrix} < 0. \tag{4.18}$$

Принимая во внимание, что $\Pi = \Phi^{-1}$ и $\Phi > 0$, получаем справедливое неравенство

$$-(G - \Phi)\Phi^{-1}(G - \Phi)^\top \leqslant 0,$$

откуда следует, что

$$-G\Pi G^\top \leqslant -G - G^\top + \Phi.$$

Выполним замену выражения $(-G\Pi G^\top)$ на выражение $(-G - G^\top + \Phi)$ в неравенстве (4.18). Затем применим к неравенству (4.18) леммы П.1 и П.2 и получим новые условия синтеза робастного анизотропийного регулятора в форме обратной связи по состоянию, которые можно сформулировать в теореме 4.

Теорема 4. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ задача 1 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, невырожденная $(n \times n)$-матрица G, $(p_1 \times p_1)$-матрица Ψ, $(n \times n)$-матрица Y и $(n \times m_1)$-матрица Λ такие, что выполнены неравенства* (4.14) *и* (4.15), *параметры Ω, M_1 и N_1 которых определяются выражениями* (4.8) *и* (4.9) *соответственно, а также справедливо неравенство*

$$\begin{bmatrix} \Xi + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.19}$$

где

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} & C_z G^\top & D_{zw} \\ * & -G - G^\top + \Phi & 0 \\ * & * & -I_m \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} M_C & M_D \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & N_C G^\top & 0 \\ 0 & 0 & N_D \end{bmatrix}.$$

Обе теоремы 3 и 4 дают достаточные условия существования статической обратной связи по состоянию, решающей задачу синтеза робастного анизотропийного регулятора для систем с ограниченными по норме параметрическими неопределенностями. В отличие от теоремы 3 теорема 4 не требует поиска взаимнообратных матриц. При этом число неизвестных переменных увеличивается на $\frac{n(n-1)}{2}$.

Если неопределенность содержится только в матрице A^Δ системы (3.1)–(3.3), то неравенство (4.19) сводится к виду

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{p_1} + C_z \Phi C_z^\top & D_{zw} \\ D_{zw}^\top & -I_m \end{bmatrix} < 0.$$

В данном случае использование теоремы 3 для синтеза робастного регулятора по состоянию становится более предпочтительным, так как условия являются выпуклыми и отсутствует необходимость поиска взаимнообратных матриц, а число неизвестных переменных меньше по сравнению с условиями теоремы 4.

Система (3.1), (3.3), замкнутая управлением (3.5), имеет представление в пространстве состояний:

$$x(k+1) = \left(A^\Delta + B_u K C_y^\Delta\right) x(k) + \left(B_w^\Delta + B_u K D_{yw}^\Delta\right) w(k), \tag{4.20}$$

$$z(k) = \left(C_z^\Delta + D_{zu} K C_y^\Delta\right) x(k) + \left(D_{zw}^\Delta + D_{zu} K D_{yw}^\Delta\right) w(k). \tag{4.21}$$

Решение задачи 2 дается в теореме 5.

Теорема 5. *Для заданных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ задача 2 разрешима, если существуют скаляры $\eta > \gamma^2$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Phi = \Phi^\top > 0$, $(n \times n)$-матрица $\Pi = \Pi^\top > 0$, $(m \times m)$-матрица Ψ, $(n \times n)$-матрица Y и $(m_1 \times p)$-матрица K такие, что выполнены следующие неравенства:*

$$\begin{bmatrix} \Omega + \varepsilon_1 M_1 M_1^\top & N_1^\top \\ N_1 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.22}$$

$$\eta - \left(e^{-2a} \det(\Psi)\right)^{1/m} < \gamma^2, \tag{4.23}$$

$$\begin{bmatrix} \mho + \varepsilon_2 M_2 M_2^\top & N_2^\top \\ N_2 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{4.24}$$

причем

$$\Phi\Pi = I_n. \tag{4.25}$$

Здесь

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * \\ 0 & -\eta I_m & * & * \\ A + B_u K C_y & B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ C_z + D_{zu} K C_y & D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_A & B_u K M_{Cy} & 0 & M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Cy} & M_C & 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} N_A & 0 & 0 & 0 \\ N_{Cy} & 0 & 0 & 0 \\ N_C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_B & 0 & 0 \\ 0 & N_{Dy} & 0 & 0 \\ 0 & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mho = \begin{bmatrix} \Psi - \eta I_m & * & * \\ B_w + B_u K D_{yw} & -\Pi & * \\ D_{zw} + D_{zu} K D_{yw} & 0 & -I_{p_1} \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ M_B & B_u K M_{Dy} & 0 \\ 0 & D_{zu} K M_{Dy} & M_D \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} N_B & 0 & 0 \\ N_{Dy} & 0 & 0 \\ N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Достаточные условия для построения статического регулятора по выходу получаются напрямую, если записать условия теоремы 1 для системы (4.20)–(4.21). Все преобразования матричных неравенств аналогичны преобразованиям из подраздела 4.1 и не требуют повторения.

Замечание 2. Регулятор, доставляющий минимум анизотропийной норме, может быть найден с использованием следующей оптимизационной процедуры: найти $\xi_* = \inf \xi$, где $\xi = \gamma^2$, на множестве $\{\eta,\ \xi,\ \Phi,\ \Pi,\ \Psi,\ Y,\ K,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$, удовлетворяющее (4.22)–(4.24) и $\Phi\Pi = I_n$. Если минимальное значение ξ_* найдено, тогда анизотропийная норма замкнутой системы может быть приближенно вычислена:

$$\|\mathcal{F}_{cl}^{out}\|_a \approx \sqrt{\xi_*}. \tag{4.26}$$

Аналогичные оптимизационные процедуры могут быть использованы при нахождении регуляторов на основе теорем 3 и 4.

Для численной реализации методики синтеза робастных регуляторов из теоремы 5, требующих поиска взаимнообратных матриц, с использованием пакетов Yalmip и SeDuMi, можно привести алгоритм, построенный на основе результатов из [27].

Алгоритм.

Шаг 1. Задаем счетчик $j = 0$, выбираем некоторые матрицы $G_1 = G_1^\top$ и $G_2 = G_2^\top$.

Шаг 2. Решаем оптимизационную задачу

$$\{\lambda_*, \xi_*\} = \min\{\lambda + \xi\}$$

на множестве переменных

$$\{\eta,\ \xi,\ \lambda,\ \Phi,\ \Pi,\ \Psi,\ Y,\ K,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\},$$

которые удовлетворяют неравенствам (4.22)–(4.24) и

$$\begin{bmatrix} I_n & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & I_n \\ I_n & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_2 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & I_n \\ I_n & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_2 \\ I_n \end{bmatrix} - \lambda I_{2n} < 0, \tag{4.27}$$

$$\begin{bmatrix} -\Phi & I_n \\ I_n & -\Pi \end{bmatrix} - \lambda I_{2n} < 0. \tag{4.28}$$

Шаг 3. Если $\lambda_* < \delta$, где δ — заданная точность, то

$$\|\mathcal{F}_{cl}^{out}\|_a \approx \sqrt{\xi_*},$$

алгоритм останавливается и полученное значение K является искомым регулятором. Если заданная точность не достигнута, то алгоритм переходит на шаг 4.

Шаг 4. Задаем $G_1 = -\Pi_j^{-1}$, $G_2 = -\Phi_j^{-1}$, $j = j + 1$. Переходим на шаг 2.

5. Численный пример

Рассмотрим систему:

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}25 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 2 \\ 0{,}13 & -0{,}18 & -0{,}66 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix},$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zw} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}05 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = 0,$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 2{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0{,}03 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}05 \end{bmatrix}.$$

Неопределенности в системе заданы через коэффициенты:

$$M_A = \begin{bmatrix} 0{,}25 & -0{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix}^\top, \quad N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}^\top, \quad N_B = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 \end{bmatrix},$$

$$M_C = M_D = 0{,}2, \quad N_C = \begin{bmatrix} 0{,}05 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_D = \begin{bmatrix} 0{,}02 & 0{,}08 \end{bmatrix},$$

$$M_{Cy} = M_{Dy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \quad N_{Cy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{Dy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Номинальная система является неустойчивой. Для поиска взаимнообратных матриц был выбран алгоритм, предложенный в [27]. Точность поиска взаимнообратных матриц равна $\epsilon = 10^{-7}$.

При решении задачи синтеза была минимизирована анизотропийная норма замкнутой системы для заданного уровня средней анизотропии a (см. замечание 1). После того как решение было найдено, проводился анализ замкнутой системы. Так как неопределенность в данном примере является скалярной величиной, то был использован метод оценки анизотропийной нормы из [18] на сетке с шагом $h = 0{,}01$ на отрезке $\Delta \in [0;\ 1]$. Наибольшее значение нормы принималось в качестве наихудшего случая. Результаты численных экспериментов сведены в таблицу.

Результаты численных экспериментов

Средняя анизотропия a	0	0,1	0,5	1	3	100
$\lVert \mathcal{F}_{cl} \rVert_a$ на основе теоремы 3	0,7591	1,0535	1,5464	1,8435	2,1973	2,2472
$\lVert \mathcal{F}_{cl} \rVert_a$ на основе теоремы 4	0,7602	1,0489	1,5379	1,8435	2,1978	2,2494
$\lVert \mathcal{F}_{cl} \rVert_a$ на основе теоремы 5	1,9496	3,3980	5,0720	5,8894	6,6922	6,7993

Как видно из полученных результатов, управление в виде статической обратной связи по состоянию дает наилучший результат. При этом анизотропийная норма замкнутой системы с регулятором, полученным из условий теоремы 3, дает практически такой же результат, как и с использованием теоремы 4, а вычислительные затраты при использовании теоремы 4 значительно меньше.

6. Заключение

В статье получены условия для синтеза робастного анизотропийного регулятора в виде статической обратной связи по выходу и по состоянию.

Рассматриваемые системы имеют ограниченные по норме параметрические неопределенности. Решается задача робастной стабилизации замкнутой системы при наличии неопределенностей и случайных внешних возмущений с известным уровнем средней анизотропии. Критерием качества функционирования замкнутой системы выступает анизотропийная норма, имеющая смысл коэффициента усиления от случайного внешнего возмущения к управляемому выходу. Полученные условия гарантируют ограниченность анизотропийной нормы замкнутой системы и ее устойчивость для всех возможных параметров системы из заданного класса. Условия сформулированы в виде матричных неравенств и легко реализуются в численном виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1 (лемма Питерсена [28]). *Пусть матрицы $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$ ненулевые, а матрица G симметрическая, т.е. $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Неравенство*

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \leqslant 0$$

справедливо для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$: $\overline{\sigma}(\Delta) \leqslant 1$, если существует скаляр $\varepsilon > 0$ такой, что

$$G + \varepsilon M M^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N \leqslant 0.$$

Лемма П.2 (лемма о дополнении Шура). *Пусть $X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^\top & X_{22} \end{bmatrix}$ – симметрическая матрица, ее компоненты X_{11} и X_{22} – тоже симметрические матрицы.*

Если $X_{11} > 0$, то $X > 0$ тогда и только тогда, когда

$$X_{22} - X_{12}^\top X_{11}^{-1} X_{12} > 0.$$

Если $X_{22} > 0$, то $X > 0$ тогда и только тогда, когда

$$X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^\top > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yaesh I., Shaked U.* Minimum Entropy Static Feedback Control with an $\mathcal{H}_\infty$-norm Performance Bound // IEEE Trans. Automat. Contr. 1997. AC-42. P. 853–858.
2. *Peres P.L.D., Geromel J.C., Souza S.R.* $\mathcal{H}_\infty$ control Design by Static Output-Feedback // Proc. IFAC Sympos. on Robust Control Design. Rio de Janeiro, Brasil. 1994. P. 243–248.
3. *Leibfritz F.* An LMI-based Algorithm for Designing Suboptimal Static $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Output Feedback Controllers // SIAM J. Control Optim. 2001. V. 39. P. 1711–1735.
4. *Casavola A., Famularo D., Franz G.* Robust Constrained Predictive Control of Uncertain Norm-Bounded Linear Systems // Automatica. 2004. V. 40. P. 1865–1876.

5. *Boukas H., Shi P.* $\mathcal{H}_\infty$ control for Discrete-Time Linear Systems with Frobenius Norm-Bounded Uncertainties // Automatica. 2004. V. 35. P. 1625–1631.
6. *Lai C.-T., Fang C.-H., Kau S.-W., Lee C.-H.* Robust $\mathcal{H}_2$ control of Norm-Bounded Uncertain Continuous-Time System — an LMI Approach // Proc. 2004 IEEE Int. Sympos. on Computer Aided Control Systems Design. Taipei, Taiwan. September 2004. P. 243–248.
7. *Kim S.W., Seo C.J., Kim B.K.* Robust and Reliable $\mathcal{H}_\infty$ controllers for Discrete-Time Systems with Parameter Uncertainty and Actuator Failure // Int. J. Syst. Sci. 1999. V. 30. No. 12. P. 1249–1258.
8. *Wang S.-Y., Gao Z.-F., He H.-K.* Observer-Based Robust $\mathcal{H}_\infty$ control of a Class of Discrete Time Systems with State Uncertainties // Proc. 8th Int. Conf. on Machine Learning and Cybernetics. Baoding. July 2009. P. 1949–1953.
9. *Xu S., Chen T.* Robust $\mathcal{H}_\infty$ control for Uncertain Discrete-Time Systems with Time-Varying Delays via Exponential Output Feedback Controllers // Syst. Control Lett. 2004. V. 51. P. 171–183.
10. *Yu L., Gao F.* Robust $\mathcal{H}_\infty$ control of Discrete-Time Linear Systems with Delayed State and Frobenius Norm-Bounded Uncertainties // Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control. Sydney. Australia. December 2000. P. 2754–2755.
11. *McFarlane D., Glover K.* A Loop-Shaping Design Procedure Using $\mathcal{H}_\infty$ synthesis // IEEE Trans. Automat. Contr. 1992. V. 37 (6). P. 759–769.
12. *Shi G., Liu X.* Robust Mixed-Norm $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Regulation for Uncertain Discrete-Time Systems via State Feedback // IEEE TENCON'93. 1993. P. 474–477.
13. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Dokl. Math. 1995. V. 51. P. 388–390.
14. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-Time-Invariant Systems // Proc. 13th IFAC World Congr. San-Francisco, USA. 1996. P. 179–184.
15. *Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy-Based Performance Analysis of Linear Discrete Time-Invariant Control Systems // Int. J. Control. 2001. V. 74 (1). P. 28–42.
16. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.Е.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2006. № 8. С. 92–111.

    Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P. Anisotropy-Based Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 8. P. 1265–1282.
17. *Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semyonov A.V.* State-Space Solution to Anisotropy-Based Stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization Problem // Proc. 13th IFAC World Congr. San-Francisco, USA. 1996. P. 427–432.
18. *Чайковский М.М.* Синтез субоптимального анизотропийного стохастического робастного управления методами выпуклой оптимизации // Дисс. ... д-ра техн. наук. М.: 2012.
19. *Kurdyukov A.P., Maximov E.A.* State-Space Solution to Stochastic $\mathcal{H}_\infty$-optimization Problem with Uncertainty // IFAC Proc. Volumes. 2005. V. 38 (1). P. 429–434.
20. *Курдюков А.П., Максимов Е.А.* Решение задачи стохастической $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации для линейной дискретной системы с неопределенностью // АиТ. 2006. № 8. С. 112–142.

    Kurdyukov A.P., Maksimov E.A. Solution of the Stochastic $\mathcal{H}_\infty$-Optimization Problem for Discrete Time Linear Systems under Parametric Uncertainty // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 8. P. 1283–1310.

21. *Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Анизотропийное субоптимальное управление для систем с дробно-линейной неопределенностью // АиТ. 2018. № 6. С. 172–190.

Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P. Anisotropic Suboptimal Control for Systems with Linear-Fractional Uncertainty // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1100–1116.

22. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* On Upper Estimate of Anisotropic Norm of Uncertain System with Application to Stochastic Robust Control // Int. J. Control. 2018. V. 91 (11). P. 2411–2421.

23. *Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P.* Control of Discrete-Time Descriptor Systems. Cham: Springer Int. Publishing. 2018.

24. *Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P.* Strict Anisotropic Norm Bounded Real Lemma in Terms of Matrix Inequalities // Dokl. Math. 2011. V. 48. No. 3. P. 895–898.

25. *Белов А.А., Андрианова О.Г.* Синтез субоптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию для дескрипторных систем на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2016. № 10. С. 40–56.

Belov A.A., Andrianova O.G. Anisotropy-based Suboptimal State-Feedback Control Design Using Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1741–1755.

26. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем // АиТ. 1999. № 3. С. 78–87.

Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P., Semenov A.V. Asymptotics of the Anisotropic Norm of Linear Time-Independent Systems // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 3. P. 359–366.

27. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц // АиТ. 2005. № 1. С. 82–99.

Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of Controllers on the Basis of a Solution of Linear Matrix Inequalities and a Search Algorithm for Reciprocal Matrices // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 1. P. 74–91.

28. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems & Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 04.02.2019

После доработки 28.09.2019

Принята к публикации 28.11.2019