

Управление в технических системах

© 2020 г. В.В. АВЕТИСЯН, д-р физ.-мат. наук (vavetisyan@ysu.am)
(Ереванский государственный университет)

УПРАВЛЯЕМЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОИСК ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ ЗАТРАТАХ СВЕТОВОЙ ЭНЕРГИИ¹

Рассматривается задача оптимального управления пространственным движением динамического объекта с целью поиска подвижного объекта, совершающего простое движение в прямоугольной области на плоскости. В качестве критерия оптимальности рассматривается функционал, учитывающий энергозатрату источника света, расположенного на ищущем объекте. Искомый объект считается обнаруженным при попадании в световой квадрат заданной освещенности. Предложен способ управления движением ищущего объекта, а также соответствующий закон изменения электрического тока в цепи источника света, обеспечивающие обнаружение искомого объекта за гарантированное время поиска при минимальной световой энергозатрате.

Ключевые слова: динамический поиск, подвижной объект, оптимальное управление, световая энергозатрата.

DOI: 10.31857/S000523102004008X

1. Введение

Во многих задачах поиска целевого объекта обнаружение осуществляется с помощью информационной области чувствительности [1]. В качестве таковой можно рассматривать освещенную источником света область, которую можно перемещать в пространстве с целью обнаружения искомого объекта при его попадании в эту область [2]. В случае подвижного искомого объекта в ограниченной области для решения задачи поиска применяется подход [3], состоящий в построении управлений, при которых, двигаясь по соответствующим траекториям, ищущий объект осуществляет просмотр, замечая полосы, покрывающие всю область поиска. При определенных условиях на параметры поисковой системы такой подход выделяет множество управлений, гарантирующих успешное завершение поиска целевого объекта как подвижного [4, 5], так и неподвижного [6, 7]. В связи с этим целесообразно рассматривать задачу об оптимальном выборе гарантирующего управления. В качестве критерия оптимальности рассматривается функционал, учитывающий энергозатрату электрического точечного источника света, расположенного на ищущем объекте [2]. В отличие от [1–7] в настоящей работе ищущий объект управляется

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Госкомитета по науке МОН РА, грант № 18Т-2С127.

по ускорению, а областью освещения является квадрат. Предложен способ управления движением ищущего объекта и закон изменения электрического тока в цепи источника света, при которых искомый объект обнаруживается за гарантированное время поиска с минимальным потреблением световой энергии.

2. Постановка задачи

Рассматривается система из двух управляемых точечных объектов X (ищущего) и Y (искомого), движение которых описывается следующими уравнениями, начальными условиями и ограничениями:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} X: \quad & \ddot{x}_1 = w_1, \quad \ddot{x}_2 = w_2, \quad \ddot{x}_3 = w_3 - g, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ & |w_1(t)| \leq W, \quad |w_2(t)| \leq W, \quad |w_3(t)| \leq W_3, \quad W_3 > g, \\ & x(t) \in D^{(3)} = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_i \leq a_i, \quad i = 1, 2, 3\}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} Y: \quad & \dot{y}_i = v_i, \quad y_i(0) = y_i^0, \quad \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq V, \quad i = 1, 2, \\ & y(t) \in D^{(2)} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq a_i, \quad i = 1, 2\}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

где x_i, y_i – координаты положения объектов X, Y ; w_i и v_i – компоненты векторов управляющего ускорения w и управляющей скорости v объектов X и Y соответственно, которые являются кусочно-непрерывными функциями от времени; W, W_3, V, a_i – заданные постоянные, g – ускорение свободного падения.

Наличие ограничений на компоненты управляющего ускорения в (2.1) вызвано тем, что на практике, в робототехнике, многие управляемые манипуляционные системы [8] работают в трех взаимно перпендикулярных направлениях и управление движением по отдельным направлениям осуществляется тремя независимыми двигателями. Каждый двигатель создает ограниченное силовое воздействие, порождающее ограниченное по абсолютной величине ускорение, которое управляет движением по соответствующей координате.

Пусть объекту X в процессе движения доступна полная информация о соотношениях и параметрах (2.1), (2.2) за исключением начальных координат $y_i(0) = y_i^0$ и текущей скорости $v(t)$ объекта Y . Предположим, что для определения точных координат Y у объекта X имеется специальное устройство в виде четырехугольной правильной пирамиды, на вершине которой расположен изотропный точечный источник света. Излучаемые из источника световые лучи ограничиваются внутри пирамиды, вследствие чего на горизонтальной плоскости поиска образуется подвижная и изменяющийся по размеру область освещенности следующего вида:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} K(x(t)) = \{ & (\zeta_1, \zeta_2) \in D^{(2)} : |\zeta_{1,2} - x_{1,2}(t)| \leq l = Cx_3(t), \quad C = \operatorname{tg} \gamma / \sqrt{2} \}, \\ & x(t) \in D^{(3)}. \end{aligned}$$

Область (2.3) – квадрат с центром в точке $O(x_1(t), x_2(t)) \in D^{(2)}$ и со стороной длины $2l$; $\gamma, 0 < \gamma < \pi/2$ – половина угла раствора световых лучей,

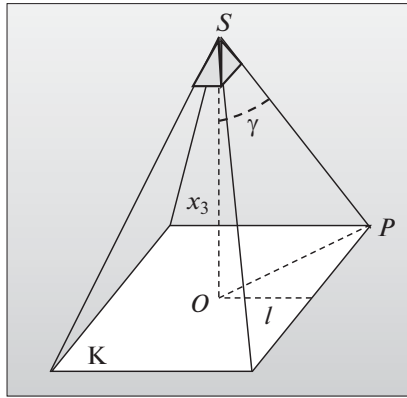


Рис. 1. Пирамида с квадратным основанием освещенности.

исходящих из точечного источника и образующих противоположные ребра лучевой пирамиды (рис. 1).

Скажем, что положение искомого объекта Y становится точно известным в момент времени $t > 0$, когда впервые выполняется условие обнаружения, т.е. условие его попадания в квадрат освещенности

$$(2.4) \quad y(t) \in K(x(t)).$$

Искомый объект при попадании его в световой квадрат (2.3) может быть обнаружен или распознан только при достаточной постоянной освещенности E , характеризующей пороговое значение видимости искомого объекта.

В случае (2.3) минимальная достаточная освещенность определяется следующим образом. Согласно [9] освещенность в определенной точке на плоскости вычисляется по формуле

$$(2.5) \quad E_P = I \cos \gamma / (SP)^2,$$

где I – сила света источника S в направлении точки измерения P на плоскости, SP – расстояние между источником света и этой точкой, γ – угол между направлением падения света и перпендикуляром к этой плоскости.

Из (2.5) следует, что для квадратной области (2.3) при заданных x_3 и γ освещенность максимальна в наиболее близкой к источнику точке, в центре квадрата: $E_O = E_{\max} = I/x_3^2$ и минимальна в наиболее удаленных, в угловых точках квадрата:

$$(2.6) \quad E = E_{\min} = \xi I/x_3^2, \quad \xi = \cos^3 \gamma.$$

Величину $E = E_{\min}$ (2.6) будем считать постоянной и заданной.

Используя соотношение $Q = \eta I$ [9], где η – коэффициент пропорциональности (коэффициент удельной мощности) между мощностью световой энергии Q , которую можно считать равной электрической мощности потребляемой источником света, и силой света I , величину минимальной освещенности E (2.6) можно вычислять как мощность энергии светового излучения,

падающего на плоскость:

$$(2.7) \quad E = \xi I/x_3^2 = \xi Q/\eta x_3^2.$$

Из (2.7) имеем

$$(2.8) \quad Q = E\eta x_3^2/\xi.$$

Интеграл от этой функции при постоянных E, η, ξ

$$(2.9) \quad J = \int_0^T Q dt = E\eta\xi^{-1} \int_0^T x_3^2 dt$$

дает величину потребляемой энергии источником света в течение промежутка времени освещения $[0, T]$. Функционал (2.9) характеризует энергозатраты в процессе поиска световым устройством и в соответствии с (2.1) является функцией от w_3 .

Согласно закону Джоуля – Ленца величину электрической энергии, потребляемой источником света в течение времени $[0, T]$ освещения, можно выразить следующим образом:

$$(2.10) \quad J = \int_0^T Q dt = \int_0^T j^2 R dt, \quad Q = j^2 R, \quad 0 \leq j(t) \leq j_0, \quad t \in [0, T],$$

где j – действующее значение тока, проходящего через источник света, j_0 – максимально допустимое действующее значение тока, а R – активное сопротивление в цепи источника света.

Из (2.8), (2.10) получаем зависимость действующего значения электрического тока j от расстояния x_3 точечного источника света до центра светового квадрата:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} j(t) &= \sqrt{E\eta\xi^{-1}R^{-1}x_3(t)}, \quad x_3(t) > 0, \\ 0 \leq j(t) &\leq \min\left(j_0, \sqrt{E\eta\xi^{-1}R^{-1}a_3}\right), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Соотношение (2.11) с учетом третьего уравнения (2.1) определяет связь между управляющей функцией $w_3 = w_3(t)$ и $j = j(t)$.

Замечание. Так как область поиска в (2.2) имеет форму прямоугольника $D^{(2)}$, то рассмотрение квадрата (2.3) в качестве области обнаружения (освещенности) с практической точки зрения представляется естественным. Такой выбор в отличие от круга обнаружения, рассмотренного например в [2–5], оправдан тем, что перемещение квадрата освещенности внутри области поиска – прямоугольника по прямолинейным траекториям, параллельным сторонам прямоугольника, позволяет ищущему объекту осуществить просмотр, замечая при этом полосы, покрывающие всю область поиска без зазоров.

по быстрдействию образом. Управления w_1, w_2 , обеспечивающие перемещение центра квадрата из одной вершины $L_{k-1}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)})$ с нулевой скоростью $\dot{x}_1^{(k-1)} = \dot{x}_2^{(k-1)} = 0$ в последующую вершину $L_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ с нулевой скоростью $\dot{x}_1^{(k)} = \dot{x}_2^{(k)} = 0$ по прямолинейным отрезкам $L_{k-1}L_k$, определяются из решения двухточечной задачи оптимального быстрдействия [10]:

по вертикальным участкам $L_{k-1}L_k$

$$\begin{aligned}
 w_1^*(t) &= 0, \quad w_2^*(t) = W \operatorname{sign} \{ (t'/2 - t) \Delta x_2 \}, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\
 t_k &= t_{k-1} + t', \quad t' = 2 (|\Delta x_2| W^{-1})^{1/2}, \quad k = 2n + 1, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1)/2, \\
 \Delta x_2 &= x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} > 0, \quad x_2^{(k)} = a_2 - l_0, \quad x_2^{(k-1)} = l_0; \\
 k &= 4p + 1, \quad p = 0, 1, \dots, P \leq (N-1)/2, \\
 \Delta x_2 &= x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} < 0, \quad x_2^{(k)} = l_0, \quad x_2^{(k-1)} = a_2 - l_0; \\
 k &= 4q + 3, \quad q = 0, 1, \dots, Q \leq (N-1)/2, \\
 t_0 &= 0, \quad P, Q - \text{целые числа}, \quad N - \text{нечетное целое число},
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

по горизонтальным участкам $L_{k-1}L_k$

$$\begin{aligned}
 w_1^*(t) &= W \operatorname{sign} \{ (t''/2 - t) \Delta x_1 \}, \quad w_2^*(t) = 0, \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\
 t_k &= t_{k-1} + t'', \quad t'' = 2 (\Delta x_1 W^{-1})^{1/2}, \quad k = 2n, \quad n = 1, \dots, (N-1)/2, \\
 \Delta x_1 &= x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} = h, \quad k = 2n, \quad n = 1, \dots, (N-3)/2, \\
 \Delta x_1 &= x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \leq h, \quad k = N-1, \quad N - \text{нечетное целое число}.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Согласно (3.2) перемещение центра квадрата освещенности по вертикальным участкам $L_{k-1}L_k$ (рис. 2) в сторону возрастания координаты x_2 : $\Delta x_2 = x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} > 0$ происходит на интервалах времени $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $k = 4p + 1$, $p = 0, 1, \dots, P \leq (N-1)/2$, а в сторону уменьшения x_2 : $\Delta x_2 = x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} < 0$ - на интервалах времени $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $k = 4q + 3$, $q = 0, 1, \dots, Q \leq (N-1)/2$. Поэтому на интервалах $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, когда $\Delta x_2 > 0$, имеем $w_2^*(t) = W$ при $t_{k-1} \leq t < t'/2$ и $w_2^*(t) = -W$ при $t'/2 \leq t \leq t_k$, а когда $\Delta x_2 < 0$, имеем $w_2^*(t) = -W$ при $t_{k-1} \leq t < t'/2$ и $w_2^*(t) = W$ при $t'/2 \leq t \leq t_k$. Здесь $t'/2 = (t_k - t_{k-1})/2$ - момент переключения управляющего ускорения $w_2^*(t)$ от значения W к значению $-W$ или наоборот.

Формулу (3.3) можно пояснить аналогичным образом с той разницей, что в ней учитывается, что перемещение центра квадрата освещенности по горизонтальным участкам $L_{k-1}L_k$ происходит только в сторону возрастания координаты x_1 (рис. 2): $\Delta x_1 = x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} > 0$.

Соответствующий закон изменения электрического тока в цепи источника света $j = j(t)$ определяется согласно соотношению (2.11):

$$j(t) \equiv \sqrt{E\eta\xi^{-1}R^{-1}x_3^0}, \quad t \in [0, T].
 \tag{3.4}$$

Как следует из (3.2), (3.3), оптимальные времена перемещения одинаковы по каждому вертикальному участку и по каждому горизонтальному участку длины h и вычисляются соответственно следующим образом:

$$(3.5) \quad t' = 2\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}}, \quad t'' = 2\sqrt{hW^{-1}}.$$

4. Гарантированный поиск при минимальной затрате световой энергии

Перейдем к определению параметров l_0, h . Сначала положим $h = 0$ и независимо от траекторий рис. 2 рассмотрим прямолинейное вертикальное перемещение центра квадрата из положения $(2l_0, l_0)$ покоя в конечное положение $(2l_0, a_2 - l_0)$ покоя, а затем обратное перемещение в исходное положение покоя при управляющих ускорениях (3.2). Выясним, при каких условиях объект Y может пересечь ось $x_1 = l_0$, избежав обнаружения.

Пусть перед рассматриваемым перемещением центра квадрата освещенности объект Y занимает положение $y_1 \geq 3l_0 + \varepsilon$, $y_2 = 0$ ($\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число) на нижней стороне прямоугольника, вне квадрата освещенности. Тогда объекту Y легче всего пересечь ось $x_1 = l_0$ незамеченным, если он будет двигаться по нижней стороне прямоугольника с максимальной по модулю скоростью ($v_1 = -V$, $v_2 = 0$) в направлении оси $x_1 = l_0$. При этом он будет располагать наибольшим временем, равным $2t' = 4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}}$, до очередного возвращения центра квадрата на положение $(2l_0, l_0)$.

Объект Y может избежать обнаружения при условии $4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}} > (2l_0 + \varepsilon)V^{-1}$, где $(2l_0 + \varepsilon)V^{-1}$ – время перемещения Y по оси $x_2 = 0$ на расстояние $2l_0 + \varepsilon$.

При противоположном строгом неравенстве

$$(4.1) \quad 4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}} < (2l_0 + \varepsilon)V^{-1}$$

X осуществит обнаружение Y , если последний пересечет ось $x_1 = l_0$.

Неравенство (4.1) заведомо выполнено, если выполнено более простое условие

$$(4.2) \quad 2t' = 4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}} < 2l_0V^{-1}.$$

Разрешая (4.2) относительно l_0 и учитывая условие (3.1), определим диапазон изменения параметра l_0 , при котором неравенство (4.2) выполняется:

$$(4.3) \quad l_{\min} = -4V^2W^{-1} + \sqrt{16V^4W^{-2} + 4V^2W^{-1}a_2} < l_0 \leq Ca_3.$$

Пусть поиск проводится так, как описано в разделе 3, и выполняется неравенство (4.2), т.е. l_0 удовлетворяет условию (4.3). Перейдем к определению условия на h , $h < 2l_0$, при котором описанный способ поиска решает задачу 1.

Рассмотрим перемещение центра квадрата освещенности по ломаной $L_{0,3} = L_0L_1L_2L_3$ с вершинами

$$(4.4) \quad L_0 = (l_0, l_0), \quad L_1 = (l_0, a_2 - l_0), \quad L_2 = (l_0 + h, a_2 - l_0), \quad L_3 = (l_0 + h, l_0)$$

при управлениях (3.2), (3.3):

$$w(t) = \begin{cases} w_1(t) \equiv 0, & w_2(t) = w_2^*(t), & t \in [0, t_1], \\ w_1(t) = w_1^*(t), & w_2(t) \equiv 0, & t \in [t_1, t_2], \\ w_1(t) \equiv 0, & w_2(t) = -w_2^*(t), & t \in [t_2, t_3], \end{cases}$$

где t_1, t_2, t_3 определяются с помощью (3.5): $t_1 = t', t_2 = t' + t'', t_3 = 2t' + t''$.

По аналогии со случаем $h = 0$, чтобы избежать обнаружения, объект Y должен достичь оси $x_1 = 0$ так, чтобы все время было выполнено $y(t) \notin K(x(t))$, $t \in [0, t_3]$. Объекту Y легче быть необнаруженным, если в начальный момент времени он находится в положении $(2l_0 + \varepsilon, 0)$ ($\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число), вне квадрата обнаружения и движется по нижней стороне прямоугольника $D^{(2)}$ в сторону оси $x_1 = 0$ с максимальной по модулю скоростью ($v_1 = -V, v_2 = 0$). При этом Y имеет наибольшее время, равное $t_3 = 2t' + t''$, между перемещениями центра квадрата вверх и вниз при сканировании шагом h .

Следовательно, чтобы осуществить обнаружение искомого объекта, ищущий объект при движении по верхней горизонтальной стороне прямоугольника должен выбрать величину шага перемещения h , так чтобы имело место неравенство

$$4\sqrt{(a_2 - 2l_0 - \varepsilon)W^{-1}} + 2\sqrt{hW^{-1}} \leq (2l_0 + \varepsilon - h)V^{-1},$$

которое заведомо выполняется, если выполняется более сильное неравенство

$$(4.5) \quad 4\sqrt{(a_2 - 2l_0)W^{-1}} + 2\sqrt{hW^{-1}} \leq (2l_0 - h)V^{-1}, \quad h < 2l_0.$$

При условии (4.5) искомый объект не может с максимальной по модулю скоростью V пройти расстояние длиной $2l_0 - h$ на оси $x_2 = 0$ будучи не обнаруженным за время перемещения центра квадрата по ломаной $L_{0,3}$.

Разрешая (4.5) относительно h , получим диапазон изменения величины шага, при котором описанный способ поиска гарантирует обнаружение подвижного объекта Y :

$$(4.6) \quad 0 < h \leq h_{\max},$$

$$h_{\max} = \left(-VW^{-1/2} + (V^2W^{-1} + 2l_0 - 4V(a_2 - 2l_0)^{1/2}W^{-1/2})^{1/2} \right)^2 < 2l_0.$$

Рассмотрим следующую положительную функцию N_1 от l_0 и h :

$$(4.7) \quad N_1(l_0, h) = (a_1 - 2l_0)h^{-1}, \quad l_{\min} < l_0 \leq Ca_3, \quad 0 < h \leq h_{\max} < 2l_0.$$

Функция (4.7) по h монотонно убывающая. Следовательно,

$$(4.8) \quad \min_{0 < h \leq h_{\max}} N_1(l_0, h) = (a_1 - 2l_0)h_{\max}^{-1} = N_1(l_0).$$

Обозначим:

$$(4.9) \quad R_0 = \{ l_0 \in (l_{\min}, Ca_3] : N_1(l_0) = [N_1(l_0)] \},$$

где символ $[\cdot]$ означает целую часть действительного числа. Для значений $l_0 \in R_0$ целое число $1 + N_1(l_0)$ определяет то количество вертикальных перемещений с шагом сканирования h_{\max} (4.6), при котором движение центра квадрата по ломаной $L_{0,N}$, $N = 2N_1(l_0) + 1$ заканчивается в точке $(a_1 - l_0, l_0)$, если $N_1(l_0)$ – нечетное целое число, и в точке $(a_1 - l_0, a_2 - l_0)$, если $N_1(l_0)$ – четное целое число.

С учетом этого, используя (3.5), (4.8), функционал (2.9) на множестве (4.9) можно представить в виде

$$(4.10) \quad \begin{aligned} J(l_0) &= (E\eta\xi^{-1}C^{-2})L(l_0)T(l_0), \quad l_0 \in R_0, \\ L(l_0) &= l_0^2, \quad T(l_0) = t'_1(l_0) + (t'_1(l_0) + t'_2(l_0))N_1(l_0), \end{aligned}$$

где $T(l_0)$ определяет гарантированное время поиска.

Таким образом, задача 1 сводится к нахождению параметра $l_0^* \in R_0$, доставляющего минимум в задаче

$$(4.11) \quad \bar{J}^* = \bar{J}(l_0^*) = \min_{l_0 \in R_0} L(l_0)T(l_0).$$

Функции $L(l_0)$ и $T(l_0)$ на множестве R_0 принимают соответственно монотонно возрастающие и монотонно убывающие дискретные значения. Минимум в (4.11) в зависимости от соотношений между параметрами может достигаться как во внутренней, так и в крайних точках множества (4.9). С учетом этого проведены численные расчеты определения l_0^* при различных значениях параметров задачи. В частности, при $a_1 = 200$ м, $a_2 = 100$ м, $a_3 = 20$ м, $C = 1$, $W = 1$ м/с², $V = 0,25$ м/с минимальное значение $\bar{J}^* = 47271,4$ м²с достигается во внутренней точке R_0 : $l_0^* = 4,35$ м. Соответствующее количество полных перемещений с шагом сканирования $h_{\max} = 8,24$ м (4.6) равно $N_1 = 22$ (4.8), а гарантированное время поиска – $T = 541,07$ с (4.10). Электрический ток в цепи источника света и минимальная величина энергии, потребляемой источником света, определяются из (3.4), (4.10) при конкретных значениях параметров R, E, η, ξ .

5. Заключение

Предложен простой способ управления движением динамического объекта в задаче поиска подвижного объекта в прямоугольной области с помощью квадратной области постоянного размера и заданной освещенности. Получено условие, гарантирующее успешное завершение поиска. Предложен алгоритм нахождения оптимального размера квадрата освещенности, при котором искомый объект обнаруживается за гарантированное время поиска при минимальной световой энергозатрате.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорн Б.К.П. Зрение роботов. М.: Мир, 1989.
2. Аветисян В.В., Мартыросян С.Р. Гарантированный поиск целевого объекта электромеханической системой при минимальных световых энергозатратах // Изв. РАН. ТСУ. 2009. № 5. С. 151–164.

3. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 3–12.
4. Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // ФПМ. 1995. Т. 1. Вып. 4. С. 827–862.
5. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. ТСУ. 1999. № 2. С. 31–39.
6. Аветисян В.В. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск неподвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. ТСУ. 2002. № 1. С. 62–69.
7. Аветисян В.В. Управление поиском неподвижного объекта с целью захвата // Изв. РАН. ТСУ. 2006. № 6. С. 160–168.
8. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М: Наука, 1989.
9. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 3. М.: Наука, 1970.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 07.04.2019

После доработки 13.11.2019

Принята к публикации 28.11.2019