

© 2020 г. К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, д-р физ.-мат. наук (kamil_aydazade@rambler.ru)
В.А. ГАШИМОВ (vugarhashimov@gmail.com)
(Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА ПЛАСТИНЫ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ МЕСТ РАСПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ И КОНТРОЛЯ

Рассмотрена задача синтеза сосредоточенных управлений процессом нагрева пластины, при этом оптимизируются места размещения источников тепла и контроля состояния. Для ее численного решения с применением эффективных методов оптимизации первого порядка получены формулы для градиента целевого функционала. Приведены результаты компьютерных экспериментов. Предлагаемый подход может быть использован при проектировании систем автоматического управления и регулирования многими другими процессами и объектами с распределенными параметрами.

Ключевые слова: тонкая пластина, нагрев, синтез управления, сосредоточенный источник, точка контроля, нагруженное дифференциальное уравнение, метод проекции градиента.

DOI: 10.31857/S0005231020040091

1. Введение

Рассматривается задача управления с обратной связью объектами с распределенными параметрами на примере процесса нагрева точечными источниками тепла тонкой пластины, на которой установлены датчики температуры. Результаты замеров температуры в точках контроля используются для формирования текущих значений точечных управляющих воздействий. При этом оптимизируются точки расположения сосредоточенных источников тепла и контроля за состоянием процесса. В случае когда замеры состояния процесса можно производить лишь в дискретные моменты времени, возможна оптимизация моментов времени проведения замеров.

В конце XIX – начале XX столетия были проведены важные исследования и разработаны устройства для регулирования промышленных процессов и технических объектов. Существенный вклад внесли известные ученые Дж.К. Максвелл, Э.Дж. Раус, И.А. Вышнеградский, А. Гурвиц, А.М. Ляпунов и другие ученые и инженеры. В связи с проблемами в области ракетостроения и развитием вычислительных и измерительных средств исследования Л.С. Понтрягина [1], Р.Э. Беллмана [2], А.М. Летова [3] и других ученых [4, 5] в области систем управления с обратной связью объектами с сосредоточенными параметрами нашли широкое применение в автоматических системах управления различными техническими и промышленными объектами. В последующие годы активно проводились исследования по распространению имеющихся подходов и методов [2, 6, 7] для систем с сосредото-

ченными параметрами на управление объектами с распределенными параметрами, в том числе с использованием обратной связи [6, 8]. Результаты были использованы при проектировании систем управления и регулирования как техническими объектами [6, 7], так и сложными промышленными процессами [6, 9, 10]. Задачи синтеза управления для объектов с распределенными параметрами, несмотря на определенные достигнутые успехи, пока не получили достаточно широкого применения. Это связано как с проблемами теоретического характера (с исследованием вопросов управляемости, наблюдаемости [8], разработкой эффективных численных методов оптимизации управления соответствующими процессами [11, 12]), так и с проблемами технической реализации систем управления этими объектами с обратной связью (обусловленные пространственной протяженностью, невозможностью получения в достаточной степени оперативной и точной информации о текущем состоянии со всех точек объекта, а также невозможностью своевременной реализации управляющих воздействий, распределенных во всех или в некоторых точках объекта, и другими причинами). Работы в этом направлении актуальны, и в настоящее время для многих объектов с распределенными параметрами с использованием различных принципов, вычислительных методов и технических средств телемеханического контроля разрабатываются или уже функционируют системы автоматического управления и регулирования [10, 13, 14]. Отметим публикацию [15], в которой приведены подробные комментарии к современному состоянию различных аспектов теории управления и достаточно обширная библиография.

Рассмотренная в данной статье постановка задачи синтеза управляющих воздействий отличается тем, что, во-первых, оптимизируются места размещения управляющих сосредоточенных источников и точек контроля за состоянием объекта, а в случае дискретных во времени замеров могут оптимизироваться и моменты времени проведения замеров. Во-вторых, некоторые параметры процесса (начальное состояние и температура внешней среды) точно неизвестны, а заданы множества их возможных значений. В-третьих, используя линейную обратную связь управляющих воздействий от замеренных состояний объекта в точках контроля, задача синтеза управления сосредоточенными источниками приведена к задаче параметрического оптимального управления (в предлагаемом подходе размерность вектора постоянных параметров синтезируемых управлений определяется в основном удвоенным произведением числа точечных источников и точек контроля, а для задач синтеза управления объектами с распределенными параметрами, учитывая, что они не требуют решения в оперативном режиме, такую размерность можно считать вполне приемлемой).

Предлагаемые в статье постановка задачи и подход к синтезу сосредоточенных управлений процессом нагрева пластины могут быть использованы в системах управления с обратной связью многими другими технологическими процессами, техническими объектами с распределенными параметрами с сосредоточенными воздействиями, описываемыми другими типами дифференциальных уравнений с частными производными.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача синтеза управления нагревом тонкой пластины точечными источниками, описываемая начально-краевой задачей:

$$(2.1) \quad u_t(x, t) = a^2 \operatorname{div} (\operatorname{grad} u(x, t)) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \sum_{i=1}^{N_c} \vartheta_i(t) \delta(x - \eta^i),$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (x, t) \in Q &= \{(x, t) : x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \in [0, T]\}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x) = \operatorname{const} \in \Phi, \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = \lambda [u(x, t) - \theta], \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T].$$

Здесь a, λ_0, λ – заданные значения параметров процесса; Ω – область, занимаемая пластиной с границей Γ , n – внутренняя нормаль к Γ . В частности, предположим, что Ω имеет прямоугольную форму

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \underline{a}_1 \leq x_1 \leq \overline{a}_1, \underline{a}_2 \leq x_2 \leq \overline{a}_2\},$$

$\underline{a}_i, \overline{a}_i, i = 1, 2$, – заданы.

Функция $u(x, t)$, определяющая значение температуры пластины в точке $x \in \Omega$ в момент времени t , является обобщенным единственным решением задачи (2.1)–(2.3), см. [16, гл. 3; 17, гл. 3], а именно: для произвольной функции $\zeta(x, t) \in H^{2,1}(Q)$, такой что $\zeta(x, T) = 0, x \in \Omega, \partial \zeta(x, t) / \partial n = \lambda \zeta(x, t), x \in \Gamma, t \in [0, T]$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q u(x, t) (-\zeta_t(x, t) - a^2 \operatorname{div} (\operatorname{grad} \zeta(x, t)) + \lambda_0 \zeta(x, t)) dx dt = \\ & = \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^T \vartheta_i(t) \zeta(\eta^i, t) dt + \iint_{\Omega} \zeta(x, 0) \varphi(x) dx + \theta \int_Q \zeta(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Будем считать, что начальная температура пластины во всех точках одинакова, но точно неизвестна. Известны множество (диапазон) $\Phi \subset \mathbb{R}$ возможных начальных состояний и соответствующая функция плотности $\rho_{\Phi}(\varphi)$ такая, что

$$\rho_{\Phi}(\varphi) \geq 0, \quad \varphi \in \Phi, \quad \int_{\Phi} \rho_{\Phi}(\varphi) = 1.$$

Аналогично температура внешней среды $\theta = \operatorname{const}$ точно неизвестна, а заданы множество ее возможных значений $\Theta \subset \mathbb{R}$ и соответствующая функция плотности $\rho_{\Theta}(\theta)$, такая что:

$$\rho_{\Theta}(\theta) \geq 0, \quad \theta \in \Theta, \quad \int_{\Theta} \rho_{\Theta}(\theta) = 1.$$

Кусочно-непрерывные функции $\vartheta_i(t)$ определяют мощности источников, сосредоточенных в точках пластины $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i) \in \Omega$, $i = 1, \dots, N_c$, и осуществляющих ее нагрев. Для определенной в области Ω двумерной функции Дирака $\delta(x)$ при произвольных интегрируемой функции $f(x)$ и точки $\bar{x} \in \Omega$ имеют место равенства:

$$(2.4) \quad \iint_{\Omega} f(x)\delta(x - \bar{x})dx = f(\bar{x}), \quad \iint_{\Omega} \delta(x)dx = 1.$$

Пусть допустимые значения управляющих воздействий определены, например, так:

$$(2.5) \quad \underline{\vartheta}_i \leq \vartheta_i(t) \leq \overline{\vartheta}_i, \quad i = 1, \dots, N_c, \quad t \in [0, T],$$

где $\underline{\vartheta}_i, \overline{\vartheta}_i$ – заданные величины, $i = 1, \dots, N_c$.

Точки размещения $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{N_c})$ источников тепла должны удовлетворять естественному условию:

$$(2.6) \quad \eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i) \in \Omega, \quad \underline{a}_1 \leq \eta_1^i \leq \overline{a}_1, \quad \underline{a}_2 \leq \eta_2^i \leq \overline{a}_2, \quad i = 1, \dots, N_c.$$

Критерий качества управления определим функционалом

$$(2.7) \quad J(\vartheta, \eta) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} I(\vartheta, \eta; \varphi, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$(2.8) \quad I(\vartheta, \eta; \varphi, \theta) = \iint_{\Omega} \mu(x) [u(x, T; \vartheta, \eta, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \left\| \vartheta(t) - \hat{\vartheta}(t) \right\|_{L_2^{N_c}[0, T]}^2.$$

Здесь $\mu(x) \geq 0$, $x \in \Omega$, – заданная весовая функция. В (2.8) второе слагаемое используется для регуляризации функционала, $\varepsilon > 0$, $\hat{\vartheta}(t)$ – параметры регуляризации, назначаемые согласно известным схемам [11, 18].

Функционал (2.7) характеризует качество управления процессом нагрева в среднем по всем возможным начальным температурам пластины и температурам внешней среды, $u(x, T; \vartheta, \eta, \varphi, \theta)$ – решение начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) при точечных управляющих воздействиях $\vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_{N_c}(t))$, размещенных соответственно в точках $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i)$, $i = 1, \dots, N_c$, с начальным условием $u(x, 0) = \varphi$, $x \in \Omega$ при температуре внешней среды θ .

Задача управления процессом нагрева пластины заключается в определении оптимальных относительно функционала (2.7) допустимых значений управляющих воздействий $\vartheta(t) = (\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_{N_c}(t))$ – мощностей сосредоточенных (точечных) источников и мест их расположения $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{N_c})$.

Обозначим через $W(x, t; \vartheta, \eta)$ множество всех решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.3) при всевозможных допустимых начальных температурах $\varphi \in \Phi$ и значениях внешних температур $\theta \in \Theta$. Тогда $W(x, t; \vartheta, \eta)$ представляет собой “пучок” решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.3), полученных

при использовании точечных управляющих воздействий $\vartheta(t)$, размещенных в точках η при всевозможных $\varphi \in \Phi$ и $\theta \in \Theta$. В таком случае функционал (2.7) характеризует качество выбора оптимизируемой пары (ϑ, η) при одновременном управлении всем пучком траекторий решений (2.1)–(2.3).

Пусть управление процессом нагрева пластины осуществляется с учетом того, что в N_o точках ξ^j пластины,

$$(2.9) \quad \xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j) \in \Omega, \quad \underline{a}_1 \leq \xi_1^j \leq \overline{a}_1, \quad \underline{a}_2 \leq \xi_2^j \leq \overline{a}_2, \quad j = 1, \dots, N_o,$$

проводятся замеры текущей температуры непрерывно во времени

$$(2.10) \quad u_{\xi^j}(t) = u(\xi^j, t), \quad \xi^j \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad j = 1, \dots, N_o,$$

или дискретно в заданные моменты времени

$$(2.11) \quad u_{\xi^j}^s = u(\xi^j, \tau_s), \quad \xi^j \in \Omega, \quad \tau_s \in [0, T], \quad s = 0, \dots, N_t, \quad j = 1, \dots, N_o.$$

Формирование значений температуры точечных управляющих воздействий $\vartheta_i(t)$, $i = 1, \dots, N_c$, при наблюдении вида (2.10) будем осуществлять по закону линейной обратной связи в виде

$$(2.12) \quad \vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j], \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N_c.$$

Здесь k_i^j – коэффициент усиления для i -го источника с учетом значения температуры в j -й точке замера; z_i^j – номинальное значение температуры пластины в j -й точке замера, которое должно поддерживаться i -м источником. В задачах синтеза управления объектами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, в качестве аналога номинального значения используется вектор конечного состояния, к которому должен быть приведен объект. Для рассматриваемой задачи параметры z_i^j определяются значениями в точках наблюдения функции $U(x)$, участвующей в целевом функционале, т.е. значениями $U(\xi^j)$, $j = 1, \dots, N_o$. Но эти значения в случае некоторых функций $U(x)$ могут быть неоптимальными для z_i^j относительно целевого функционала, поэтому z_i^j , $i = 1, \dots, N_c$, $j = 1, \dots, N_o$, включены в число оптимизируемых параметров задачи.

Введем обозначения для матриц $K = \left((k_i^j) \right)$, $Z = \left((z_i^j) \right)$, $i = 1, \dots, N_c$, $j = 1, \dots, N_o$.

В случае если замеры в контролируемых точках осуществляются лишь в заданные дискретные моменты времени $\tau_s \in [0, T]$, $s = 0, \dots, N_t$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{N_t+1} = T$, то формирование мощностей точечных источников $\vartheta_i(t)$, $i = 1, \dots, N_c$, будем осуществлять по закону линейной обратной связи в виде

$$(2.13) \quad \vartheta_i(t) = \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, \tau_s) - z_i^j], \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1}), \quad s = 0, \dots, N_t, \quad i = 1, \dots, N_c.$$

Ясно, что управляющие воздействия (2.12) являются непрерывными функциями времени, а управляющие воздействия (2.13) во времени кусочно-постоянны, причем смена значений управлений осуществляется после замеров состояния процесса в контролируемых точках пластины.

Подставим выражение (2.12) для управления при непрерывном наблюдении (2.10) в дифференциальное уравнение (2.1):

$$(2.14) \quad \begin{aligned} u_t(x, t) &= a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x, t)) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u(\xi^j, t) - z_i^j \right] \delta(x - \eta^i), \quad (x, t) \in Q. \end{aligned}$$

Из-за участия в правой части уравнения (2.14) значений искомой функции в некоторых точках области, в данном случае в точках ξ^j , $j = 1, \dots, N_o$, такие уравнения относят к нагруженным дифференциальным уравнениям. Исследования различных аспектов таких уравнений проведены автором публикации [19] и его учениками. В частности, в [20] для численного решения нагруженных краевых задач исследованы условия применимости схем конечно-разностных методов и порядки аппроксимации, а в [21, 22] предложены методы решения получаемых конечно разностных задач, учитывающие специфическую структуру таких задач.

Используя в уравнении (2.1) выражение управления (2.11) с дискретной обратной связью, получим:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} u_t(x, t) &= a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x, t)) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u(\xi^j, \tau_s) - z_i^j \right] \delta(x - \eta^i), \\ x \in \Omega, \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1}), \quad s = 0, \dots, N_t, \quad i = 1, \dots, N_c, \\ u(x, \tau_s - 0) &= u(x, \tau_s) = u(x, \tau_s + 0), \quad s = 0, \dots, N_t, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Теперь сформулируем рассматриваемую в данной статье основную задачу.

Требуется определить оптимальные в смысле функционала (2.7), (2.8) допустимые места размещения сосредоточенных управляющих источников тепла η^i , $i = 1, \dots, N_c$, и точек обратной связи – замеров состояния $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{N_o})$, удовлетворяющие условиям (2.6), (2.9), и допустимые значения параметров обратной связи K, Z , при которых удовлетворяются условия (2.5).

Исходя из технических и технологических соображений будем предполагать, что расстояния между точками расположения источников и замеров должны быть не меньше заданной величины d , т.е.

$$(2.16) \quad \left(\xi_1^j - \eta_1^i \right)^2 + \left(\xi_2^j - \eta_2^i \right)^2 \geq d^2, \quad i = 1, \dots, N_c, \quad j = 1, \dots, N_o.$$

Таким образом, оптимизируемыми параметрами в рассматриваемой задаче являются постоянные параметры $\eta \in \mathbb{R}^{2N_c}$, $\xi \in \mathbb{R}^{2N_o}$, $K, Z \in \mathbb{R}^{N_c N_o}$, общее число которых составляет $n = 2(N_c N_o + N_o + N_c)$. Все оптимизируемые в задаче векторы параметров объединим в один, введя обозначение

$y = (K, Z, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^n$. Учитывая это обозначение, функционал (2.7), (2.8) запишем в виде

$$(2.17) \quad J(y) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} I(y; \varphi, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$(2.18) \quad I(y; \varphi, \theta) = \iint_{\Omega} \mu(x) [u(x, T; y, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \|y - \hat{y}\|_{\mathbb{R}^n}^2,$$

а решение начально-краевой задачи (2.14), (2.2), (2.3) при каком-либо допустимом векторе параметров y , начальном условии φ и температуре внешней среды θ обозначим через $u(x, t; y, \varphi, \theta)$. Здесь \hat{y} , $\varepsilon > 0$ – параметры регуляризации, назначаемые, как уже замечано на с. 123, с использованием известных алгоритмов [11, 18].

Возможно рассмотрение задачи управления с дискретной по времени обратной связью (2.11) при условии, что значения моментов времени $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{N_t})$ являются оптимизируемыми параметрами задачи синтеза управления, при этом должны быть выполнены условия

$$\tau_s < \tau_{s+1}, \quad s = 0, \dots, N_t.$$

В этом случае размерность оптимизируемых параметров $y = (K, Z, \xi, \eta, \tau)$ в целом в задаче синтеза управления будет равна $n + N_t$.

Поставленную задачу синтеза управляющих воздействий можно отнести к классу параметрических задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами. Особенности задачи управления: 1) нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными; 2) функционал, характеризующий поведение пучка решений начально-краевой задачи (2.14), (2.2), (2.3) ((2.15), (2.2), (2.3) в случае дискретной обратной связи (2.11)) с заданными множествами возможных начальных условий и параметров внешней среды; 3) участие в дифференциальном уравнении функции Дирака; 4) оптимизируемым в задаче оптимального управления является конечномерный вектор.

Важно отметить еще одну особенность полученной задачи синтеза управляющих процессом параметров. Как видно из дифференциальных уравнений (2.14) и (2.15), оптимизируемые параметры участвуют в этих уравнениях нелинейно. Отсюда следует нелинейность зависимости $u(x, t; y, \varphi, \theta)$ от параметров y , а следовательно, целевые функционалы (2.7), (2.8) не являются квадратичными по синтезируемым параметрам. Поэтому, несмотря на выпуклость функционала исходной первоначальной задачи оптимального управления по $\vartheta_i(t)$, $i = 1, \dots, N_c$, рассматриваемая задача в общем случае может быть невыпуклой, многоэкстремальной. В связи с этим при решении задачи необходимо использовать какие-либо стратегии отыскания глобального оптимума. Например, проводить многократное решение оптимизационной задачи с различными начальными значениями синтезируемых параметров или же при применении локальных методов оптимизации, исходя из экспертной информации, использовать “хорошие” начальные приближения для оптимизируемых параметров.

3. Подход и формулы для численного решения задачи

Для численного решения полученной параметрической задачи оптимального управления предлагается использовать итерационные методы оптимизации первого порядка. Сначала рассмотрим случай задачи синтеза управления (2.12) с непрерывной обратной связью (2.10).

Ограничения (2.5) на управляющие воздействия запишем, используя (2.12), в виде

$$(3.1) \quad \underline{\vartheta}_i \leq \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u(\xi^j, t) - z_i^j \right] \leq \overline{\vartheta}_i, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N_c,$$

Введем обозначения

$$g_i(t; y) = |g_i^0(t; y)| - \frac{\overline{\vartheta}_i - \underline{\vartheta}_i}{2},$$

$$g_i^0(t; y) = \frac{\overline{\vartheta}_i + \underline{\vartheta}_i}{2} - \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j \left[u(\xi^j, t) - z_i^j \right], \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N_c.$$

Тогда ограничение (3.1) можно записать так:

$$(3.2) \quad g_i(t; y) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N_c.$$

К этим ограничениям добавим $N_c N_o$ условий из (2.16), введя обозначения

$$(3.3) \quad g_{N_c+(i-1)N_o+j}(\cdot; y) = d^2 - \left(\xi_1^j - \eta_1^i \right)^2 - \left(\xi_2^j - \eta_2^i \right)^2 \leq 0,$$

$$i = 1, \dots, N_c, \quad j = 1, \dots, N_o.$$

Общее число ограничений в (3.2), (3.3) равно $N = N_c(N_o + 1)$.

Для учета ограничения (3.2) в задаче синтеза параметров y используем метод внешнего штрафного функционала, добавив к функционалу (2.17), (2.18) штрафной член за нарушение ограничений (3.2) и (3.3):

$$(3.4) \quad \tilde{J}(y) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \tilde{I}(y; \varphi, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$(3.5) \quad \tilde{I}(y; \varphi, \theta) = I(y; \varphi, \theta) + I_{\text{штрп}}(y),$$

$$I_{\text{штрп}}(y) = \sum_{i=1}^{N_c} \Re_i \int_0^T [g_i^+(t; y)]^2 dt + \sum_{i=N_c+1}^N \Re_i [g_i^+(\cdot; y)]^2.$$

Функционал (3.4) минимизируется многократно при условии, что коэффициенты штрафа \Re_i , $i = 1, \dots, N$, стремятся к $+\infty$. Обозначение $g_i^+(\cdot)$ означает, что $g_i^+(\cdot) = g_i(\cdot)$, если $g_i(\cdot) > 0$ и $g_i^+(\cdot) = 0$, если $g_i(\cdot) \leq 0$.

Далее будет использоваться функция $\text{sgn}(\cdot)$, равная (-1) при отрицательных значениях аргумента, нулю – при аргументе равном 0 и 1 – для положительных значений аргумента.

При минимизации штрафного функционала (3.5) учет позиционных ограничений (2.6), (2.9), учитывая их простоту, будет проводиться с использованием оператора проектирования на множество, заданное этими ограничениями.

В целом, для решения задачи оптимального синтеза параметров обратной связи y предлагается использовать итерационные методы минимизации с комбинированием методов штрафной функции и проективных методов.

В частности, может быть использован метод проекции градиента штрафной функции, который запишем в виде

$$(3.6) \quad y^{m+1} = P_{(2.6),(2.9)}[y^m - \alpha_m \text{grad}_y \tilde{J}(y^m)], \quad m = 0, 1, \dots$$

Здесь $\text{grad}_y \tilde{J}(y^m)$ – градиент штрафного функционала (3.4), (3.5), $\alpha_m \geq 0$ – величина шага в направлении антиградиента функционала $\tilde{J}(y)$, $P_{(2.6),(2.9)}[\cdot]$ – оператор проектирования на позиционные ограничения (2.6) и (2.9) [11].

Ясно, что основным элементом, необходимым для реализации процедуры (3.6), является градиент функционала $\tilde{J}(y)$. Компоненты градиента штрафного функционала по параметрам непрерывной обратной связи в случае непрерывных множеств возможных начальных состояний Φ и температур внешней среды Θ определяются в теореме 1.

Теорема 1. Компоненты градиента штрафного функционала (3.4), (3.5) в задаче (2.14), (2.2), (2.3), (2.6), (2.9) по синтезируемым параметрам при непрерывной обратной связи (2.10) определяются формулами:

$$(3.7) \quad \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial k_i^j} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ - \int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re_i g_i^+(t; y) \text{sgn}(g_i^0(t; y))) [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + \right. \\ \left. + 2\varepsilon (k_i^j - \hat{k}_i^j) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$(3.8) \quad \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial z_i^j} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ k_i^j \int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re_i g_i^+(t; y) \text{sgn}(g_i^0(t; y))) dt + \right. \\ \left. + 2\varepsilon (z_i^j - \hat{z}_i^j) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$(3.9) \quad \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \xi_{\gamma}^j} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ - \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j \int_0^T u_{x_{\gamma}}(\xi^j, t) (\psi(\eta^i, t) + 2\Re_i g_i^+(t; y) \text{sgn}(g_i^0(t; y))) dt + \right. \\ \left. + 4 \sum_{i=1}^{N_c} \Re_{N_c+(i-1)N_o+j} (\eta_{\gamma}^i - \xi_{\gamma}^j) g_{N_c+(i-1)N_o+j}^+(\cdot; y) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 2\varepsilon \left(\xi_\gamma^j - \hat{\xi}_\gamma^j \right) \left. \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi, \\
\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \eta_\gamma^i} &= \int_\Phi \int_\Theta \left\{ - \sum_{j=1}^{N_o} \int_0^T \psi_{x_\gamma}(\eta^i, t) k_i^j \left[u(\xi^j, t) - z_i^j \right] dt + \right. \\
(3.10) \quad & + 4 \sum_{i=1}^{N_c} \Re_{N_c+(i-1)N_o+j} \left(\xi_\gamma^j - \eta_\gamma^i \right) g_{N_c+(i-1)N_o+j}^+(\cdot; y) + \\
& \left. + 2\varepsilon \left(\eta_\gamma^i - \hat{\eta}_\gamma^i \right) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

$i = 1, \dots, N_c, j = 1, \dots, N_o, \gamma = 1, 2$. Функция $\psi(x, t) = \psi(x, t; y, \varphi, \theta)$ при текущем векторе параметров y , допустимых начальном условии φ и температуре внешней среды θ является обобщенным решением сопряженной начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned}
(3.11) \quad & \psi_t(x, t) = -a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi(x, t)) + \lambda_0 \psi(x, t) - \\
& - \sum_{j=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j (\psi(\eta^i, t) + 2\Re_i g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) \delta(x - \xi^j), \quad (x, t) \in Q,
\end{aligned}$$

$$(3.12) \quad \psi(x, T) = -2\mu(x)[u(x, T; y) - U(x)], \quad x \in \Omega,$$

$$(3.13) \quad \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial n} = \lambda \psi(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T].$$

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в Приложении.

Существование и единственность обобщенных решений задач (3.11)–(3.13) и (2.14), (2.2), (2.3) при принятых предположениях на функции, участвующие в задачах, при размерности пространственной переменной ≤ 3 показаны в [16, 7].

Для задачи синтеза параметров управления с оптимизируемыми дискретными моментами времени обратной связи вида (2.13) в теореме 2 приведены формулы для градиента штрафного функционала (3.4), (3.5).

Теорема 2. Компоненты градиента штрафного функционала (3.4), (3.5) в задаче (2.15), (2.2), (2.3) по синтезируемым параметрам при дискретных наблюдениях (2.13) определяются формулами:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial k_i^j} &= \int_\Phi \int_\Theta \left\{ - \sum_{s=0}^{N_t} [u(\xi^j, \tau_s) - z_i^j] \left(\int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \psi(\eta^i, t) dt + 2\Re_i g_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right) + \right. \\
& \left. + 2\varepsilon \left(k_i^j - \hat{k}_i^j \right) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_\Phi(\varphi) d\theta d\varphi,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial z_i^j} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ k_i^j \sum_{s=0}^{N_t} \left(\int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \psi(\eta^i, t) dt + 2\Re_i g_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right) + 2\varepsilon (z_i^j - \hat{z}_i^j) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \xi_{\gamma}^j} &= \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ - \sum_{s=0}^{N_t} u_{x_{\gamma}}(\xi^j, \tau_s) \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j \left(\int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \psi(\eta^i, t) dt + 2\Re_i g_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right) + \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{i=1}^{N_c} \Re_{N_c+(i-1)N_o+j} (\eta_{\gamma}^i - \xi_{\gamma}^j) g_{N_c+(i-1)N_o+j}^+(\cdot; y) + \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon (\xi_{\gamma}^j - \hat{\xi}_{\gamma}^j) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \eta_{\gamma}^i} &= \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ - \sum_{s=0}^{N_t} \int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \psi_{x_{\gamma}}(\eta^i, t) dt \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, \tau_s) - z_i^j] + \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{i=1}^{N_c} \Re_{N_c+(i-1)N_o+j} (\xi_{\gamma}^j - \eta_{\gamma}^i) g_{N_c+(i-1)N_o+j}^+(\cdot; y) + 2\varepsilon (\eta_{\gamma}^i - \hat{\eta}_{\gamma}^i) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{J}(y)}{\partial \tau_s} &= \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j (\psi(\eta^i, \tau_s) [u(\xi^j, \tau_{s-1}) - u(\xi^j, \tau_s)] + \right. \\ &\quad \left. + (a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(\xi^j, \tau_s)) - \lambda_0 [u(\xi^j, \tau_s) - \theta]) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \psi(\eta^i, t) dt + 2\Re_i g_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right] + 2\varepsilon (\tau_s - \hat{\tau}_s) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, N_c, \quad j = 1, \dots, N_o, \quad \gamma = 1, 2, \quad s = 1, \dots, N_t.$ Функция $\psi(x, t) = \psi(x, t; y, \varphi, \theta)$ при текущем векторе параметров y и допустимых начальных условиях φ и температуре внешней среды θ является обобщенным решением сопряженной начально-краевой задачи:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \psi_t(x, t) &= -a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi(x, t)) + \lambda_0 \psi(x, t) - \\ &- \sum_{j=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j \left(\int_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \psi(\eta^i, t) dt + 2\Re_i g_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right) \delta(x - \xi^j, t - \tau_s), \\ &x \in \Omega, \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1}), \quad s = 0, \dots, N_t, \end{aligned}$$

$$(3.15) \quad \psi(x, T) = -2\mu(x)[u(x, T; y) - U(x)], \quad x \in \Omega,$$

$$(3.16) \quad \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial n} = \lambda \psi(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [\tau_s, \tau_{s+1}), \quad s = 0, \dots, N_t.$$

4. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты решения тестовой задачи управления процессом пластины с непрерывной обратной связью. В задаче использовались следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} a^2 = 1, \quad T = 1, \quad \lambda_0 = \lambda = 0,01, \quad \underline{a}_1 = \underline{a}_2 = 0, \quad \overline{a}_1 = \overline{a}_2 = 1, \quad N_c = N_o = 2, \\ \mu(x) = 1, \quad U(x) = 10, \quad x \in \Omega, \quad \underline{\vartheta}_i = -5, \quad \overline{\vartheta}_i = 20, \quad i = 1, \dots, N_c, \quad d = 0,05, \\ \Phi = [0,2; 0,5], \quad \Theta = [6,2; 6,5], \quad \rho_\Phi(\varphi) = \rho_\Theta(\theta) = 10/3, \quad \varphi \in \Phi, \quad \theta \in \Theta. \end{aligned}$$

Приведем общее описание алгоритма решения задачи синтеза вектора параметров y , размерность которого в данном случае равна $n = 2(N_c N_o + N_o + N_c) = 16$. При выбранных коэффициентах штрафа \mathfrak{R}_i и параметрах регуляризации ε , \hat{y} для реализации процедуры (3.5), на каждой итерации которой при текущих значениях оптимизируемых параметров y^m при всех возможных значениях $\varphi \in \Phi$ и $\theta \in \Theta$ выполняются шаги: 1) решается прямая начально-краевая задача (2.14), (2.2), (2.3); 2) решается сопряженная задача (3.11)–(3.13); 3) вычисляются компоненты (3.7)–(3.10) градиента штрафной функции; 4) в направлении спроектированного антиградиента функционала на позиционные ограничения (2.6), (2.9) проводится одномерная минимизация по $\alpha \geq 0$:

$$\alpha_m = \min_{\alpha \geq 0} \tilde{J} \left(P_{(2.6),(2.9)}[y^m - \alpha \text{grad}_y \tilde{J}(y^m)] \right), \quad m = 0, 1, \dots$$

Эти шаги совершаются до тех пор, пока не выполнится какой-либо критерий останова. Например, шаг α_m или изменение значения функционала на двух последовательных итерациях меньше заданной малой величины. Далее, согласно известным подходам, используя полученные значения параметров y^* , изменяются параметры регуляризации ε , \hat{y} [11, 18] (в частности, уменьшается (делится на пять) ε , а за \hat{y} принимается полученное оптимальное значение вектора y^*) и проводится процедура (3.6) до выполнения критерия останова. После трех корректировок параметров регуляризации коэффициенты штрафа \mathfrak{R}_i , начиная со значений $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}^1$, $i = 1, \dots, N_c$, $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}^2 = 10^3 \mathfrak{R}^1$, $i = N_c + 1, \dots, N$, $\mathfrak{R}^1 = 1$, увеличивались в пять раз, т.е. $\mathfrak{R}_i = 5\mathfrak{R}_i$, $i = 1, \dots, N$, и повторялись все приведенные выше операции. Коэффициент штрафа увеличивается до тех пор, пока оптимизируемые значения параметров y , полученные для двух последовательных значений коэффициента штрафа, изменяются на величину, превышающую заданную требуемую точность решения всей задачи.

Для решения двухмерных прямой (2.14), (2.2), (2.3) и сопряженной (3.11)–(3.13) нелокальных начально-краевых задач использовалась неявная схема метода переменных направлений с шагами по пространственным переменным $h_{x_1} = h_{x_2} = 0,01$, а по переменной во времени – $h_t = 0,005$ [23]. Для аппроксимации двухмерной δ -функции Дирака использовалась функция типа

Гаусса:

$$\delta_{\sigma_x} = \begin{cases} 0, & |x_1| > 3\sigma_{x_1} \text{ или } |x_2| > 3\sigma_{x_2}, \\ \frac{1}{2\pi\sigma_x} \exp\left(-\left(\frac{x_1^2}{2\sigma_{x_1}^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_{x_2}^2}\right)\right), & |x_1| \leq 3\sigma_{x_1} \text{ и } |x_2| \leq 3\sigma_{x_2}, \end{cases}$$

где

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-3\sigma_{x_1}}^{3\sigma_{x_1}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_{x_1}^2}\right) dx_1 \int_{-3\sigma_{x_2}}^{3\sigma_{x_2}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma_{x_2}^2}\right) dx_2.$$

Несложно проверить, что имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx_1 dx_2 = \int_{-3\sigma_{x_1}}^{3\sigma_{x_1}} \int_{-3\sigma_{x_2}}^{3\sigma_{x_2}} \delta_{\sigma_x}(x) dx_1 dx_2 = 1.$$

При численных расчетах величина σ_{x_i} выбиралась равной h_{x_i} , $i = 1, 2$ (т.е. значение δ -функции “размазывалось” по девяти соседним квадратам). Такая аппроксимация δ -функции Дирака, как известно [24], сглаживает зависимость целевого функционала $\tilde{J}(y)$ от оптимизируемых координат распо-

Результаты решения задачи для начальных приближений y_1^0 и y_2^0

y^0	$\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^2$	m	K	Z	ξ^1	ξ^2	η^1	η^2	$\tilde{J}(y)$
y_1^0	$1; 10^3$	0	-5,85 -3,48 -4,74 -6,15	14,91 11,45 16,84 12,38	0,6900 0,6500	0,4200 0,4700	0,8500 0,8600	0,2300 0,2300	102,40
		15	-3,40 -1,32 3,23 -2,72	9,55 9,35 14,72 14,24	0,6616 0,7714	0,3368 0,3469	0,7416 0,6914	0,2568 0,2669	2,4468
		25	-3,29 -1,33 2,46 -3,59	9,56 9,35 14,72 14,25	0,8178 0,7654	0,3377 0,3482	0,7378 0,6854	0,2577 0,2682	0,6928
	$25; 25 \cdot 10^3$	0	-2,28 0,03 2,37 -3,65	10,01 9,24 15,12 13,53	0,8049 0,9264	0,6182 0,6375	0,8849 0,8464	0,3332 0,3407	0,0218
		15	-2,12 0,18 2,44 -3,59	10,13 9,24 15,07 13,62	0,8017 0,9336	0,6008 0,6374	0,8817 0,8536	0,3310 0,3386	0,0136
		22	-2,09 0,21 2,46 -3,58	10,16 9,23 15,02 13,68	0,7935 0,9400	0,5650 0,6197	0,8827 0,8579	0,3493 0,3284	0,0092
y_2^0	$1; 10^3$	0	-2,12 1,24 2,38 2,58	8,50 7,40 7,70 9,50	0,6300 0,5200	0,8400 0,6800	0,4600 0,8500	0,2400 0,2400	15948
		10	-3,44 0,31 1,31 1,67	8,65 7,31 7,58 9,37	0,5331 0,3599	0,8700 0,8700	0,9500 0,9500	0,0500 0,1247	4,2100
		20	-2,21 -0,12 0,56 2,02	9,70 7,30 7,45 9,09	0,5331 0,3599	0,8700 0,8700	0,9500 0,9500	0,0500 0,1247	0,6159
	$25; 25 \cdot 10^3$	0	-1,82 0,05 -0,39 1,42	9,86 7,30 7,10 7,58	0,6034 0,3506	0,9474 0,9496	0,8674 0,8696	0,3770 0,4757	0,0544
		35	-1,86 0,29 -0,69 1,15	9,54 7,30 6,98 7,83	0,4906 0,2650	0,9494 0,9488	0,8675 0,8672	0,3826 0,4624	0,0011
		45	-1,87 0,30 -0,77 1,10	9,49 7,33 6,99 7,82	0,4911 0,2250	0,9485 0,9482	0,8683 0,8682	0,3825 0,4637	0,0004

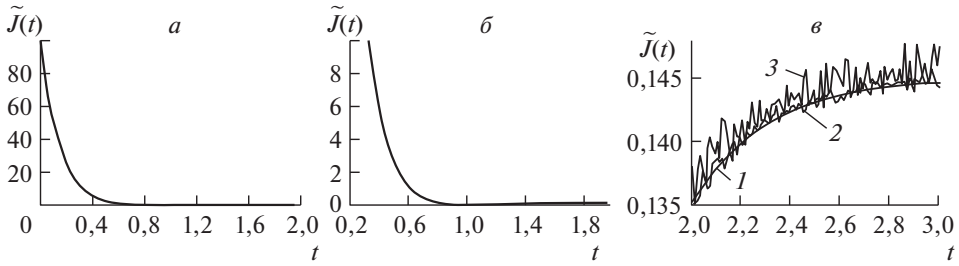


Рис. 1. Графики функции $\tilde{J}(y)$: а – при точных замерах; б и в – при наличии погрешностей в замерах (1 – 0%; 2 – 2%; 3 – 5%).

ложения источников и параметров обратной связи (контроля), $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i)$, $i = 1, \dots, N_c$, $\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j)$, $j = 1, \dots, N_o$, являющихся аргументами δ -функций в прямой и сопряженной начально-краевых задачах.

В таблице приведены значения оптимизируемых параметров на некоторых итерациях и на последних y_1^* и y_2^* , полученные из двух различных начальных значений y_1^0 и y_2^0 : $y_1^0 = ((-5,85, -3,48, -4,74, -6,15), (14,91, 11,45, 16,84, 12,38), (0,69, 0,65, 0,42, 0,47), (0,85, 0,86, 0,23, 0,23))$, $y_2^0 = ((-2,12, 1,24, 2,38, 2,58), (8,50, 7,40, 7,70, 9,50), (0,63, 0,52, 0,84, 0,68), (0,46, 0,85, 0,24, 0,24))$ – при различных двух значениях \mathfrak{R}^1 , \mathfrak{R}^2 для коэффициентов штрафа $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}^1$, $i = 1, \dots, N_c$ и $\mathfrak{R}_i = \mathfrak{R}^2$, $i = N_c + 1, \dots, N$ и значениях параметров регуляризации $\varepsilon = 0,01$, $\hat{y} = ((-2, 0,7, 0,71, -2,38), (7,96, 5,83, 7,68, 9,72), (0,50, 0,05, 0,95, 0,08), (0,42, 0,76, 0,41, 0,71))$. Элементы матриц K , Z (размеров 2×2) приведены по столбцам.

На рис. 1,а приведен график функции

$$(4.1) \quad \tilde{J}(t) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left\{ \iint_{\Omega} \mu(x) [u(x, T; y^*, \varphi, \theta) - U(x)]^2 dx \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

где $u(x, t; y^*, \varphi, \theta)$ – решение начально-краевой задачи (2.14), (2.2), (2.3) при полученных оптимальных параметрах обратной связи y_1^* и $\varphi = 0,3$, $\theta = 6,3$.

Функционал (4.1) характеризует интегральную по всей пластине величину суммарного отклонения всех траекторий пучка $W(x, t; y^*, \varphi, \theta)$ от заданной функции распределения $U(x)$, $x \in \Omega$, определяющей желаемую температуру пластины.

На рис. 1,б и 1,в приведены графики функции (4.1), полученные при оптимальных параметрах обратной связи y_1^* при наличии погрешностей в замерах текущего состояния $u_{\xi^j}(t)$, $j = 1, \dots, N_o$. Замеры с погрешностями задавались формулой

$$\tilde{u}_{\xi^j}(t) = u_{\xi^j}(t) [1 + \chi^j(t)], \quad j = 1, \dots, N_o,$$

где значения $\chi^j(t) \in [-\nu, \nu]$ определялись датчиком случайными чисел, распределенных по равномерному закону, значение ν соответствует уровню помех ($\nu = 0$ означает, что замеры проводились точно). Значения ν в экспери-

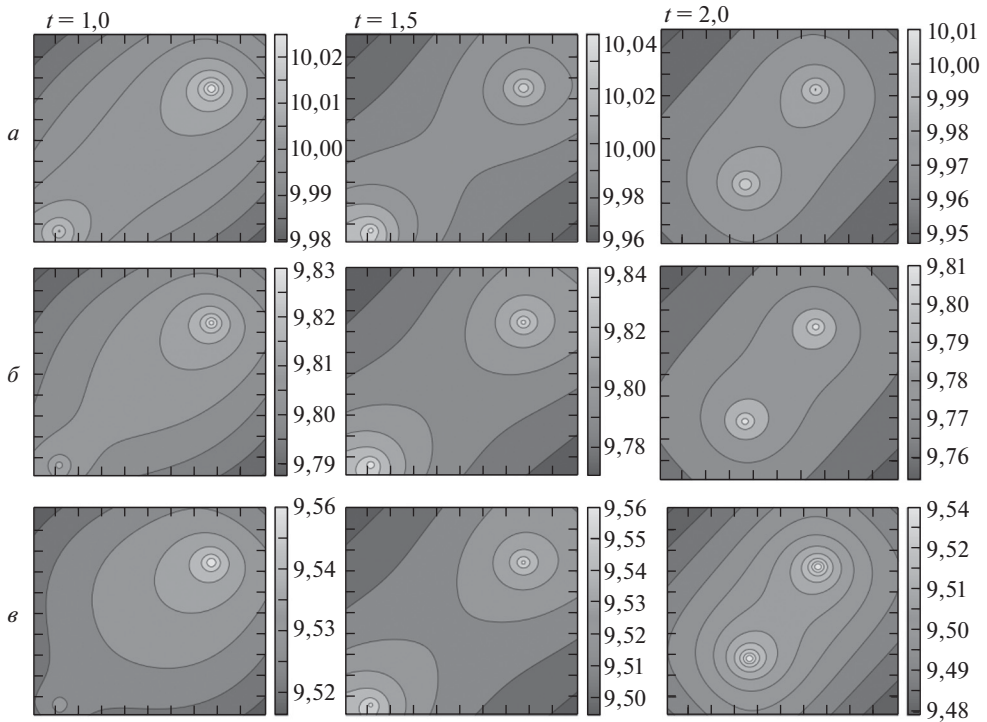


Рис. 2. Линии уровня функции распределения температуры $u(x, t; y^*; 0,3; 6,3)$ на пластине при $t = 1; 1,5; 2$ при замерах: а – без помех $\chi = 0\%$; б – с помехами $\chi = 2\%$ и в – $\chi = 5\%$.

ментах принимались равным 0,02 и 0,05, что соответствовало величинам погрешности замеров в 2% и 5%. Как видно из рис. 1,б и 1,в, траектория $\tilde{J}(t)$ и, следовательно, сам процесс нагрева достаточно устойчивы к погрешностям замера, причем эта устойчивость сохраняется при управлении процессом и при $t \geq T$. На рис. 1,б из-за малого масштаба значения функции $\tilde{J}(t)$ при $t \in [0; 2]$ при разных уровнях помех практически не различаются. Поэтому на рис. 1,в для $t \geq 2$ масштаб для оси значений функции увеличен.

Важно заметить следующее. Исходная задача синтеза управления решалась при $T = 1$, т.е. для временного отрезка $[0; 1]$. Тем не менее найденные оптимальные параметры обратной связи y^* таковы, что температура $U(x)$, $x \in \Omega$, как это видно из рис. 1, достаточно точно поддерживается и при $t > T$.

Это означает, что при $t > T$ синтезированное управление с обратной связью функционирует в режиме автоматического регулирования процессом нагрева. Изложенное подтверждается приводимыми на рис. 2 линиями уровня функции распределения температуры на пластине, полученными при синтезированных значениях параметров обратной связи. Как видно из рисунков, температура на пластине поддерживается с достаточной точностью (согласованной с точностями проводимых замеров и решений вспомогательных задач) в окрестности желаемой температуры $U(x) = 10$, $x \in \Omega$ и при $t > T = 1$, хотя задача синтеза решалась на временном отрезке $[0; 1]$.

5. Заключение

В статье для процесса управления нагревом тонкой пластины заданным числом точечных источников тепла предложен подход к синтезу управления и оптимальному размещению как источников, так и точек контроля (обратной связи) за состоянием объекта.

Синтезируемое управление в текущий момент времени ищется в виде линейной комбинации от замеренных значений температуры в точках контроля, количество которых задано.

В целом, рассматриваемая задача приводится к задаче параметрического оптимального управления. В задаче оптимизируемыми являются координаты размещения на пластине точечных источников, точек контроля, коэффициенты усиления и номинальные значения температуры в точках контроля. Рассмотрен случай, когда обратная связь осуществляется лишь в дискретные моменты времени, которые могут быть оптимизируемыми параметрами задачи.

Для численного решения задачи с использованием итерационных методов оптимизации первого порядка получены формулы для компонент градиента целевого функционала по всем оптимизируемым параметрам синтезируемого управления.

Приведены результаты численных экспериментов на тестовой задаче, исследовано влияние погрешностей в измерениях текущего состояния в точках обратной связи на качество управления процессом нагрева пластины.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Из независимости начальной температуры пластины φ и температуры внешней среды θ от синтезируемых управляющих параметров y следует справедливость соотношения

$$\begin{aligned}
 \text{grad}_y \tilde{J}(y) &= \text{grad}_y \int_{\Phi} \int_{\Theta} \tilde{I}(y; \varphi, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi = \\
 \text{(П.1)} \quad &= \int_{\Phi} \int_{\Theta} \text{grad}_y \tilde{I}(y; \varphi, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi.
 \end{aligned}$$

Поэтому займемся получением формул для компонент градиента целевого функционала $\tilde{I}(y; \varphi, \theta)$, определенного из (3.5), при каких-либо произвольно выбранных допустимых значениях $\varphi \in \Phi$ и $\theta \in \Theta$.

В уравнение (2.14) введем обозначение для управляющего слагаемого

$$V(x, t; y) = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j] \delta(x - \eta^i).$$

Тогда уравнение (2.14) запишем в виде

$$\text{(П.2)} \quad u_t(x, t) = a^2 \text{div}(\text{grad} u(x, t)) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + V(x, t; y), \quad (x, t) \in Q.$$

Для получения формул для компонент градиента $\tilde{I}(y; \varphi, \theta)$ используем метод приращения аргументов [11].

Правую часть уравнения (П.2) перенесем влево и получим равенство, равное нулю. Левую часть полученного равенства умножим на пока произвольную функцию $\psi(x, t)$ и, проинтегрировав по области Ω и $t \in [0, T]$, прибавим к функционалу $\tilde{I}(y; \varphi, \theta)$, значение которого не изменится:

$$(П.3) \quad \tilde{I}(y; \varphi, \theta) = \tilde{I}(y; \varphi, \theta) + \iiint_Q \psi(x, t) (u_t(x, t) - a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad}u(x, t)) + \lambda_0 [u(x, t) - \theta] - V(x, t; y)) dxdt.$$

Пусть управление $V(x, t; y)$ за счет изменения вектора синтезируемых параметров y получило приращение $\Delta V(x, t; y) = V(x, t; y + \Delta y) - V(x, t; y)$. Соответственно некоторое приращение $\Delta u(x, t)$ получит и решение начально-краевой задачи (П.2), (2.2), (2.3):

$$\Delta u(x, t) = u(x, t; y + \Delta y) - u(x, t; y).$$

Ясно, что функция $\Delta u(x, t)$ должна удовлетворять условиям начально-краевой задачи:

$$(П.4) \quad \Delta u_t(x, t) = a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad}\Delta u(x, t)) - \lambda_0 \Delta u(x, t) + \Delta V(x, t; y), \quad (x, t) \in Q,$$

$$(П.5) \quad \Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$(П.6) \quad \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial n} = \lambda \Delta u(x, t), \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T].$$

Тогда функционал $\tilde{I}(y; \varphi, \theta)$ получит приращение, которое после интегрирования по частям с учетом (П.3)–(П.6), несложных преобразований и группировки можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{I}(y; \varphi, \theta) = & \iint_{\Omega} (\psi(x, T) + 2\mu(x)[u(x, T; y) - U(x)]) \Delta u(x, T; y) dx - \\ & - a^2 \int_0^T \int_{\Gamma} \left[\lambda \psi(x, t) - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial n} \right] dxdt - \iiint_Q \left[\psi_t(x, t) + a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi(x, t)) - \right. \\ & \left. - \lambda_0 \psi(x, t) + \sum_{j=1}^{N_o} \sum_{i=1}^{N_c} k_i^j (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) \delta(x - \xi^j) \right] dxdt + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} \left[- \int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + \right. \\ & \left. + 2\varepsilon (k_i^j - \hat{k}_i^j) \right] \Delta k_i^j + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_o} \left[\int_0^T (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) k_i^j dt + 2\varepsilon (z_i^j - \hat{z}_i^j) \right] \Delta z_i^j + \\
& + \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{j=1}^{N_o} \left[- \sum_{i=1}^{N_c} \int_0^T u_{x_\gamma}(\xi^j, t) k_i^j (\psi(\eta^i, t) + 2\Re g_i^+(t; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(t; y))) dt + \right. \\
& + 4 \sum_{i=1}^{N_c} \Re_{N_c+(i-1)N_o+j} (\eta_\gamma^i - \xi_\gamma^j) g_{N_c+(i-1)N_o+j}^+(\cdot; y) + 2\varepsilon (\xi_\gamma^j - \hat{\xi}_\gamma^j) \left. \right] \Delta \xi_\gamma^j + \\
& + \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{i=1}^{N_c} \left[- \sum_{j=1}^{N_o} \int_0^T \psi_{x_\gamma}(\eta^i, t) k_i^j [u(\xi^j, t) - z_i^j] dt + \right. \\
& + 4 \sum_{j=1}^{N_o} \Re_{N_c+(i-1)N_o+j} (\xi_\gamma^j - \eta_\gamma^i) g_{N_c+(i-1)N_o+j}^+(\cdot; y) + 2\varepsilon (\eta_\gamma^i - \hat{\eta}_\gamma^i) \left. \right] \Delta \eta_\gamma^i + \\
& + o(\|\Delta u(x, t)\|_{L_2(Q)}) + o(\|\Delta y\|_{R^n}).
\end{aligned}$$

Учитывая произвольность функции $\psi(x, t)$, потребуем от нее, чтобы она была решением сопряженной начально-краевой задачи (3.11)–(3.13). Тогда главные части приращения функционала при приращениях компонент вектора y будут искомыми компонентами соответствующих производных функционала [11]. Отсюда следует справедливость формул (3.6)–(3.9). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 во многом совпадает с доказательством теоремы 1. Согласно (2.13) управляющие воздействия $\vartheta_i(t)$, $i = 1, \dots, N_c$, постоянны на временных полуинтервалах $t \in [\tau_s, \tau_{s+1})$, $s = 0, \dots, N_t$, и смена зависимости $\vartheta_i(t)$ от состояния пластины в наблюдаемых точках происходит в моменты времени τ_s , $s = 1, \dots, N_t$. Поэтому при доказательстве теоремы 2 интервал $(0, T)$ разбивается на полуинтервалы $[\tau_s, \tau_{s+1})$, $s = 0, \dots, N_t$, а для каждого полуинтервала проводятся такие же выкладки, что и при доказательстве теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
2. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории управления. М.: ИЛ, 1962.
3. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов I–IV // АиТ. 1960. № 4. С. 436–441. 1960. № 5. С. 561–568. 1960. № 6. С. 661–665. 1961. № 4. С. 425–435.
4. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
5. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

6. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
7. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
8. *Egorov A.I.* Optimal stabilization of the distributed parameter systems. Berlin-Heidelberg-N.Y.: Springer-Verlag, 1975.
9. *Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980.
10. *Ray W.H.* Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company, 1981.
11. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
12. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // *АиТ.* 2017. № 9. С. 49–66.
Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. Optimizing Placement of the Control Points at Synthesis of the Heating Process Control // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.
13. *Ахметзянов А.В.* Вычислительные аспекты управления процессами фильтрации жидкостей и газов в пористых средах // *АиТ.* 2008. № 1. С. 3–15.
Akhmetzyanov A.V. Computational Aspects in Controlling Filtration of Fluids and Gases in Porous Media // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 1. P. 1–12.
14. *Ахметзянов А.В., Кулибанов В.Н.* Проблемы оптимального управления фильтрацией грунтовых вод // *АиТ.* 1999. № 8. С. 51–60.
Akhmetzyanov A.V., Kulibanov V.N. Problems of Optimal Control of Percolation of Subterranean Water // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 8. Part 1. P. 1097–1105.
15. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
16. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
Lions J.-L., Magenes E. Problemes aux limites non homogenes at application. V. 1. Paris, 1968.
17. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
Lions J.-L. Control optimal de systemes gouvernes par des equations aux derivees partielles. Paris. Dunod Ganthier-Villars, 1969.
18. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. Kluwer Acad. Publishers, Netherlands, 1996.
19. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения. М.: Наука, 2012.
20. *Алиханов А.А., Березгов А.М., Шхануков-Лафисhev М.Х.* Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 2008. Т. 48. № 9. С. 1619–1628.
Alikhanov A.A., Berezgov A.M., Shkhanukov-Lafishev M.X. Boundary Value Problems for Certain Classes of Loaded Differential Equations and Solving Them by Finite Difference Methods // *Comp. Math. Math. Phys.* 2008. V. 48. No. 9. P. 1581–1590.
21. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 2016. Т. 56. № 1. С. 99–112.

- Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equations // *Comp. Math. Math. Phys.* 2016. V. 56. No. 1. P. 93–105.
22. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* О решении краевых задач с неразделенными многоточечными интегральными условиями // *Диф. уравнения.* 2013. Т. 49. № 9. С. 1152–1162.
- Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On the Solution of Boundary Value Problems with Non Separated Multipoint and Integral Conditions // *Differential Equations.* 2013. V. 49. No. 9. P. 1114–1125.
23. *Aida-zade K.R., Handzel A.V.* An Approach to Lumped Control Synthesis in Distributed Systems // *Int. J. Appl. Comput. Math.* 2007. No. 1. P. 69–79.
24. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 20.11.2018

После доработки 10.11.2019

Принята к публикации 28.11.2019