Автоматика и телемеханика, № 4, 2020

Управление в социально-экономических системах

© 2020 г. **Ю.И. ПАРАЕВ, д-р техн. наук (paraev@mail.ru),**
К.О. ПОЛУЭКТОВА (poluekt.kseni@mail.ru)
(Национальный исследовательский Томский государственный университет)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКОЙ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ОСНОВНОГО КАПИТАЛА И ТРУДОВЫХ РЕСУРСОВ

Получено аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения накоплений на заданном периоде производства. Решение проводится с помощью метода динамического программирования.

Ключевые слова: односекторная экономика, основной капитал, трудовые ресурсы, накопления, оптимальное управление, динамическое программирование.

DOI: 10.31857/S000523102004011X

1. Введение

Проблема управления односекторной экономикой возникла в [1, 2]. К настоящему времени ей посвящено большое количество публикаций, в которых рассматриваются и решаются разные варианты задач, в том числе и задачи оптимального управления такой экономикой (например, [3–7]). Естественным продолжением этих исследований является решение задач с учетом какихлибо случайных возмущений, действующих в процессе производства.

Состояние односекторной экономики определяется двумя величинами: основным капиталом и трудовыми ресурсами. Вообще говоря, изменение основного капитала во времени происходит случайным образом из-за таких факторов, как случайный износ основных производственных фондов, приобретение новых фондов, цена на которые зависит от курса валют, производственная неопределенность, экономическая конъюнктура и т.п. Трудовые ресурсы могут изменяться случайным образом за счет экономических факторов, по демографическим причинам, из-за миграции населения и т.п. В [8] на основании изучения статистических данных приводится определенное обоснование того, что влияние экзогенных случайных факторов на экономическую динамику можно моделировать процессом броуновского движения.

В настоящей статье рассматривается задача оптимального управления односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов. В качестве критерия оптимальности выбирается максимум среднего значения накоплений (непроизводственного потребления, благосостояния и т.п.) на заданном периоде производства. Решение задачи проводится с помощью метода динамического программирования.

2. Постановка задачи

За исходную модель задачи выбирается модель из [2]. Но в нее вносятся некоторые изменения и дополнения для более четкого и удобного, по мнению авторов, изложения материала. Состояние экономики определяется величинами $K(t)$ – основной капитал, $L(t)$ – трудовые ресурсы и производственной функцией $Y(K, L)$. Качество управления экономикой определяется величиной накоплений $C(t)$, полученных в течение отрезка времени $[0, t]$. Значение $Y(K, L)$ есть валовый продукт, произведенный в единицу времени. Поэтому $Y(K, L)\Delta t$ есть валовый продукт, произведенный за время Δt. Управление экономикой состоит в том, что на каждом временно́м отрезке длиной Δt часть этого продукта $uY\Delta t$ идет на увеличение основного капитала, а часть $(1-u)Y\Delta t$ – на увеличение накоплений $C(t)$. Таким образом, управляющим параметром является коэффициент u, который определяет долю валового продукта, которая идет на увеличение основного капитала. При этом всегда

$$0 \le u \le 1. \tag{1}$$

Для переменных $K(t)$, $C(t)$ и $L(t)$ можно записать дифференциальные уравнения [6]

$$\begin{gathered}\dot{K} = uY(K, L) - \lambda K(t), \quad K(0) = K_0 > 0,\\ \dot{C} = \rho C + (1-u)Y(K, L), \quad C(0) = 0,\\ \dot{L} = \nu L, \quad L(0) = L_0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\lambda\,(\ge 0)$ – коэффициент амортизации, $\rho\,(\ge 0)$ – норма дисконтирования, ν – темп изменения трудовых ресурсов. Здесь $\lambda K(t)$ – темп потери капитала за счет амортизации; $u(t)Y(K(t), L(t))$ – темп увеличения капитала за счет доли валового продукта (инвестиций); $\rho C(t)$ и $(1-u(t))Y(K(t), L(t))$ – темп увеличения накоплений за счет дисконтирования и за счет доли валового продукта соответственно.

В стохастическом случае в уравнения (2) нужно добавить какие-то случайные воздействия. В данной статье предлагается следующая модель стохастической односекторной экономики:

$$\begin{gathered}\dot{K} = uY(K, L) - \lambda K(t) + \sigma_K K\xi_K(t), \quad K(0) = K_0 > 0,\\ \dot{C} = \rho C + (1-u)Y(K, L), \quad C(0) = 0,\\ \dot{L} = \nu L + \sigma_L L\xi_L(t), \quad L(0) = L_0 > 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\xi_K(t)$ и $\xi_L(t)$ – стандартные независимые между собой белые гауссовские шумы, σ_K и σ_L – соответствующие коэффициенты волатильности. Такое включение в модель случайных воздействий достаточно традиционно в экономико-математических задачах [9–11].

Как обычно, для дальнейшего исследования вводятся удельные переменные: $k(t) = K(t)/L(t)$ – фондовооруженность труда и $c(t) = C(t)/L(t)$ – удельные накопления, т.е. накопления, приходящиеся на одного работника, а также функция $F(k) = Y/L$ – производительность труда (валовый продукт на одного работника).

В детерминированном случае для этих переменных на основании (2) получаются уравнения

$$
\begin{gathered}
\dot{k} = -\mu k + uF(k), \quad k(0) = k_0, \\
\dot{c} = \delta c + (1-u)F(k), \quad c(0) = 0,
\end{gathered} \tag{4}
$$

где $\mu = \lambda + v$, $\delta = \rho - v$. Далее будем считать, $\mu = \lambda + v > 0$ и $\delta = \rho - v > 0$. Это означает, что если трудовые ресурсы возрастают ($v > 0$), то темп их роста не может превышать норму дисконтирования ρ. Если трудовые ресурсы убывают ($v < 0$), то темп их убывания не может превышать коэффициента амортизации λ. Иначе возникают "экзотические" варианты.

Детерминированная задача: *для уравнений* (4) *в течение заданного конечного планируемого периода производства* $[0, T]$ *найти такое кусочно-непрерывное управление* $u(t)$ *с учетом* (1), *при котором величина* $C(T)$ *максимальна.*

В стохастическом случае для удельных переменных из (3) с помощью формулы Ито получаются следующие уравнения:

$$
\begin{gathered}
\dot{k} = -\mu k + uF(k) + \sigma_K k \xi_K(t) - \sigma_L k \xi_L(t), \quad k(0) = k_0, \\
\dot{c} = \delta c + (1-u)F(k) - \sigma_L c \xi_L(t), \quad c(0) = 0.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Здесь и далее

$$
\mu = \lambda + v + \sigma_K \sigma_L - \sigma_L^2, \quad \delta = \rho - v + \sigma_L^2, \quad k_0 = K_0/L_0.
$$

Стохастическая задача: для уравнений (5) *в течение заданного отрезка времени* $[0, T]$ *найти такое кусочно-непрерывное управление* $u(t)$ *с учетом* (1), *при котором среднее значение величины* $c(T)$ *максимально.*

Далее будет использоваться производственная функция Кобба–Дугласа $Y(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где A – масштаб темпа производства ($A > 0$), α – коэффициент эластичности по основным фондам, $\beta = 1 - \alpha$ – коэффициент эластичности по трудовым ресурсам ($\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$). Отсюда следует, что $F(k) = Y/L = Ak^{\alpha} > 0$.

3. Решение стохастической задачи

Для решения задачи используется метод динамического программирования. Введем функцию Беллмана $s(k, c; t, T)$ – среднее значение величины $c(T)$ при условии, что процесс продолжается на отрезке $[t, T]$ с начальными условиями $k(t) = k$ и $c(t) = c$ и на этом отрезке применяется оптимальное управление. Таким образом, величина $J = s(k_0, 0; 0, T)$ есть максимальное среднее значение величины $c(T)$ для данной задачи. Для этой функции можно записать уравнение Беллмана [12]:

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & -\frac{\partial s(k,c;t,T)}{\partial t} = \max_{0\le u(t)\le 1}\left\{\frac{\partial s(k,c;t,T)}{\partial k}(uF(k)-\mu k) + \right.\\
& \left. + \frac{\partial s(k,c;t,T)}{\partial c}(\delta c + (1-u)F(k)) + G(s(k,c;t,T))\right\}, \quad s(k,c;T,T) = c,
\end{aligned}
$$

где

$$
(7)\qquad G(s) = \frac{1}{2}(\sigma_K^2 + \sigma_L^2)k^2\frac{\partial^2 s}{\partial k^2} + \sigma_L^2 kc\frac{\partial^2 s}{\partial k\partial c} + \frac{1}{2}\sigma_L^2 c^2\frac{\partial^2 s}{\partial c^2}
$$

– гессиан функции $s(k,c;t,T)$. Уравнение (6) – детерминированное. Здесь и далее переменные k и c – просто аргументы функции, а не случайные процессы. Из решения (6) получается решение задачи. Существование этого решения означает существование решения стохастической задачи. Далее при решении отрезок $[0,T]$ разбивается на три временны́х отрезка, на каждом из которых записывается свое уравнение в частных производных (6). Затем решения этих уравнений сшиваются. Можно показать, что эти решения существуют и единственны [13].

Уравнение (6) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & -\frac{\partial s(k,c;t,T)}{\partial t} = \\
& = \max_{0\le u(t)\le 1}\left\{\left(\frac{\partial s}{\partial k} - \frac{\partial s}{\partial c}\right)uF(k) - \mu k\frac{\partial s}{\partial k} + \frac{\partial s}{\partial c}(\delta c + F(k)) + G(k,c)\right\}.
\end{aligned}
$$

Максимум правой части этого уравнения по u с учетом (1) достигается при

$$
(9)\qquad u(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \dfrac{\partial s}{\partial k} > \dfrac{\partial s}{\partial c}, \\ u_{\text{ос}}, & \text{если } \dfrac{\partial s}{\partial k} = \dfrac{\partial s}{\partial c}, \\ 0, & \text{если } \dfrac{\partial s}{\partial k} < \dfrac{\partial s}{\partial c}. \end{cases}
$$

Здесь $u_{\text{ос}}$ – так называемое особое управление [14, 15], которое будет определено ниже. В рассматриваемой задаче отрезок времени, в течение которого имеет место особое управление, соответствует участку сбалансированного равновесного состояния экономики и называется *магистралью*.

Можно допустить, что если коэффициенты σ_K и σ_L малы, то решение стохастической задачи будет близко к решению детерминированной задачи, которая с помощью принципа максимума Понтрягина подробно решена в [6]. Если период производства $[0,T]$ достаточно велик, то основное решение состоит в том, что отрезок $[0,T]$ точками t_1 и t_2 $(0 < t_1 < t_2 < T)$ разбивается на три отрезка: $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]$ и $[t_2,T]$ длительностью $r_1 = t_1$,

$r_2 = t_2 - t_1$ и $r_3 = T - t_2$ соответственно. Отрезок $[0, t_1]$ соответствует выходу (если $k_0 < k_{\text{ос}}$ при $u = u_1 = 1$) или сходу (если $k_0 > k_{\text{ос}}$ при $u = u_1 = 0$) на магистраль; отрезок $[t_1, t_2]$ – магистрали (предполагается, что она существует); отрезок $[t_2, T]$ – заключительному этапу (сходу с магистрали). На магистрали $k = k_{\text{ос}} = \text{const}$, причем

$$k_{\text{ос}}^{\beta} = \frac{\alpha A}{\delta + \mu} \quad \text{и} \quad u_{\text{ос}} = \frac{\mu k}{F}. \tag{10}$$

На заключительном отрезке $[t_2, T]$ $u = 0$. Таким образом, согласно (9) структура оптимального управления имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad 0 < t < t_1, \\ u_{\text{ос}} & \text{при} \quad t_1 < t < t_2, \\ 0 & \text{при} \quad t_2 < t < T. \end{cases} \tag{11}$$

Фактически получается, что решение детерминированной задачи сводится к нахождению значений t_1 и t_2. Можно предположить, что в стохастическом случае при достаточно малых коэффициентах σ_K и σ_L решение будет близко к решению детерминированной задачи, т.е. структура оптимального управления имеет такой же вид (11). Таким образом, решение стохастической задачи также сводится к нахождению значений t_1 и t_2. Заметим, что при решении детерминированной задачи методом динамического программирования уравнение Беллмана имеет вид (6) при $G(s) = 0$. Оно является однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка и может решаться методом характеристик [16]. Его решение (оно не приводится) дает определенные сведения о свойствах решения уравнения (6). Уравнение (6) при заданном управлении u является неоднородным уравнением второго порядка, причем неоднородное слагаемое $G(s)$ есть гессиан функции Беллмана. Это обстоятельство с учетом свойств функции $F(k)$ позволяет получить аналитические решения.

Как обычно, решение уравнения (6) или (8) начнем с правого конца. Обозначим через $s_1(k, c; t, T)$, $s_2(k, c; t, T)$ и $s_3(k, c; t, T)$ функции Беллмана, если момент t относится к отрезкам $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и $[t_2, T]$ соответственно. Обозначим также $k_i = k(t_i)$ и $c_i = c(t_i)$, $i = 1, 2$.

4. Сход с магистрали

На отрезке $[t_2, T]$ $u = 0$. Поэтому уравнение (8) принимает вид

$$\begin{gathered} -\frac{\partial s_3(k, c; t, T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_3(k, c; t, T)}{\partial k} + \frac{\partial s_3(k, c; t, T)}{\partial c}(\delta c + F(k)) + G(k, c), \\ s_3(k, c; T, T) = c. \end{gathered} \tag{12}$$

Пользуясь методом разделения переменных, его решение будем искать в виде

$$s_3(k, c; t, T) = c e^{\delta(T - t)} + F(k) w(t, T), \tag{13}$$

где $w(t,T)$ – искомая функция, причем такая, что $w(T,T)=0$. Подставляя (13) в (7) и (12) и сокращая подобные слагаемые, получаем, что

$$-F(k)\dot{w}(t,T) = -\mu k F'(k) w(t,T) + e^{\delta(T-t)} F(k) + \sigma k^2 F''(k) w(t,T),$$

где $\sigma = (\sigma_K^2 + \sigma_L^2)/2$. Параметр σ можно назвать *общим коэффициентом волатильности*. Учитывая, что

$$F(k) = Ak^{\alpha}, \quad F'(k) = \alpha A k^{\alpha-1} = \alpha \frac{F(k)}{k}, \quad F''(k) = \alpha(\alpha-1) A k^{\alpha-2} = -\alpha\beta \frac{F(k)}{k^2},$$

из последнего выражения получаем

$$-F(k)\dot{w}(t,T) = -\alpha\mu F(k) w(t,T) - \alpha\beta\sigma F(k) w(t,T) + F(k) e^{\delta(T-t)}.$$

Сократив здесь на $F(k)$, приходим к уравнению

$$-\dot{w}(t,T) = -\vartheta w(t,T) + e^{\delta(T-t)}, \quad w(T,T) = 0,$$

где $\vartheta = \alpha\mu + \alpha\beta\sigma$. Решение этого уравнения имеет вид

$$w(t,T) = \frac{e^{\delta(T-t)} - e^{-\vartheta(T-t)}}{\delta + \vartheta}. \tag{14}$$

Поскольку рассматриваемая задача – терминальная, то на оптимальной траектории $\{k(t), c(t)\}$ функция Беллмана должна быть постоянной. Поэтому полная производная по t функции $s_3(k,c;t,T)$, определенной в (13), должна равняться нулю. Как показывает анализ, чтобы последнее выполнялось, на отрезке $[t_2, T]$ оптимальные переменные $k(t)$ и $c(t)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\dot{k} = -\frac{\vartheta}{\alpha} k, \quad \dot{c} = c\delta + F(k). \tag{15}$$

5. Магистраль

Как следует из (9), на магистрали должно выполняться условие

$$\frac{\partial s_2(k,c;t,T)}{\partial k} \equiv \frac{\partial s_2(k,c;t,T)}{\partial c}. \tag{16}$$

При этом уравнение (8) принимает вид

$$-\frac{\partial s_2(k,c;t,T)}{\partial t} = -\mu k \frac{\partial s_2}{\partial k} + \frac{\partial s_2}{\partial c}(\delta c + F(k)) + G(k,c). \tag{17}$$

Решение (17) будем искать в виде

$$s_2(k,c;t,T) = (c + H(k)) e^{\delta(T-t)} + B, \tag{18}$$

где $H(k)$ – искомая функция, B – какая-то константа. Подставляя (18) в (7) и (17), сокращая на $\exp\{\delta(t_2 - t)\}$ и приводя подобные члены, получаем

$$\delta H(k) = -\mu k H'(k) + F(k) + \sigma k^2 H''(k). \tag{19}$$

Из подстановки (18) в (16) следует, что функция $H(k)$ должна удовлетворять условию $H'(k) = 1$. Если последнее условие выполняется, то и $H''(k) = 0$. Поэтому из (19) следует, что

$$H(k) = \frac{F - \mu k}{\delta}. \tag{20}$$

К выражению (20) еще раз применим требование $H'(k) = 1$. Получаем, что

$$H'(k) = \frac{\alpha A k^{\alpha-1} - \mu}{\delta} = 1.$$

Отсюда следует выражение (10) для $k = k_{\text{ос}}$. Как уже отмечено, функция Беллмана должна быть постоянной. Поэтому полная производная по t функции $s_2(k, c; t, T)$, определенной в (18), должна равняться нулю. Отсюда можно получить, что переменная $k(t)$ должна удовлетворять уравнению (5) при $\sigma_K = \sigma_L = 0$. А так как на отрезке $[t_1, t_2]$ $k = k_{\text{ос}} = \text{const}$, то отсюда следует выражение (10) для $u_{\text{ос}}$.

Константа B в (18) определяется из условия $s_2(k_2, c_2; t_2, T) = s_3(k_2, c_2; t_2, T)$. Подставляя сюда (13), (14) и (18), получаем

$$B = B(t_2) = (Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)} - Q(k_2)e^{-\vartheta(T-t_2)}, \tag{21}$$

где

$$Q(k) = \frac{F(k)}{\delta + \vartheta}.$$

Здесь и далее $k = k_{\text{ос}}$. Подставляя (21) в (18), получаем выражение для $s_2(k, c; t, T)$. Видно, что эта функция зависит от параметра t_2, который пока не определен. Естественно выбрать его так, чтобы достигался максимум функции $s_2(k, c; t, T)$ или, что то же самое, функции $B(t_2)$. Вычислим первую производную этой функции по t_2 и приравняем ее к нулю

$$\frac{d}{dt_2} = -\delta(Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)} - \vartheta Q(k_2)e^{-\vartheta(T-t_2)} = 0.$$

Отсюда получаем

$$e^{-(\delta+\vartheta)(T-t_2)} = \frac{\delta(H(k_2) - Q(k_2))}{\vartheta Q(k_2)} \tag{22}$$

и

$$T - t_2 = r_3 = \frac{1}{\delta + \vartheta} \ln\left(\frac{\vartheta Q(k_2)}{\delta(H(k_2) - Q(k_2))}\right). \tag{23}$$

Анализ второй производной функции $B(t_2)$ показывает, что при условии (22) она всегда отрицательна и, следовательно, эта функция имеет максимум. Подставляя (22) в (18), получаем окончательно, что на отрезке $[t_1, T]$

$$(24)\quad J = s_2(k_1, c_1; t_1, T) = (c_1 + H(k_1))e^{\delta(T-t_1)} + \frac{\vartheta+\delta}{\vartheta}(Q(k_2) - H(k_2))e^{\delta(T-t_2)}.$$

Здесь $k_1 = k_2 = k_{\text{ос}}$. Так как функция Беллмана на оптимальной траектории постоянна, то выражение (24) определяет максимальное среднее значение непроизводственного потребления на отрезке $[0, T]$. Только сюда следует добавить значения c_1 и t_1, которые определяются далее при анализе отрезка $[0, t_1]$.

6. Выход на магистраль

На отрезке $[0, t_1]$ имеют место два варианта, связанных с соотношением между $k(0)$ и $k_{\text{ос}}$.

1-й вариант. При $k(0) < k_{\text{ос}}$ на отрезке $[0, t_1]$ $u = 1$. Поэтому уравнение (8) принимает вид

$$(25)\quad -\frac{\partial s_1(k, c; t, T)}{\partial t} = \frac{\partial s_1(k, c; t, T)}{\partial k}(F(k) - \mu k) + \delta c \frac{\partial s_1(k, c; t, T)}{\partial c} + G(k, c).$$

Согласно (4) при $u = 1$ на отрезке $[0, t_1]$ накопления отсутствуют, т.е. $C(t) \equiv 0$. Следовательно, $c(t) = C(t)/L(t) \equiv 0$. Поэтому $s_1(k, c; t, T) = \text{const}$ и $G(k, c) = 0$. С другой стороны, при $G(k, c) = 0$ уравнение (25) является однородным уравнением в частных производных первого порядка, которое решается методом характеристик [16]. Соответствующие характеристические уравнения имеют вид:

$$\dot{k} = -\mu k + F(k), \quad k(0) = k_0,$$
$$\dot{c} = \delta c, \quad c(0) = 0.$$

Отсюда следует, что на отрезке $[0, t_1]$ $c(t) \equiv 0$, а решение первого уравнения имеет вид

$$k^\beta(t) = \frac{A}{\mu}\left(1 - e^{-\beta\mu t}\right) + k_0^\beta e^{-\beta\mu t}.$$

Это решение получается в результате подстановки:

$$k(t) = \exp\{y(t) + z(t)\},$$

где $y(t)$ и $z(t)$ – произвольные функции. Момент t_1 определяется из условия $k(t_1) = k_{\text{ос}}$ или из выражения

$$\frac{A}{\mu}\left(1 - e^{-\beta\mu t_1}\right) + k_0^\beta e^{-\beta\mu t_1} = k_{\text{ос}}^\beta\,.$$

Отсюда

$$t_1 = r_1 = \frac{1}{\mu\beta} \ln \left(\frac{A - \mu k_0^\beta}{A - \mu k_{\text{ос}}^\beta} \right). \tag{26}$$

Значения $c_1 = 0$ и t_1 следует подставить в (24).

2-й вариант. При $k(0) > k_{\text{ос}}$ на отрезке $[0, t_1]$ $u = 0$. Поэтому функция $s_1(k, c; t, t_1)$ удовлетворяет уравнению (12). Повторяя приведенное ранее решение уравнения (12), можно найти эту функцию. Однако главное состоит в том, что на отрезке $[0, t_1]$ оптимальные переменные $k(t)$ и $c(t)$ должны удовлетворять уравнениям (15). Отсюда получаем

$$k(t_1) = k_0 e^{-\vartheta t_1/\alpha}, \quad c(t_1) = F(k_0) \frac{e^{\delta t_1} - e^{-\vartheta t_1}}{\delta + \vartheta}.$$

Момент t_1 находится из условия $k(t_1) = k_{\text{ос}}$. Это дает, что

$$t_1 = r_1 = \frac{\alpha}{\vartheta} \ln \frac{k_0}{k_{\text{ос}}}. \tag{27}$$

Значения $c(t_1)$ и t_1 следует подставить в (24).

Отметим, что для существования магистрали необходимо, чтобы $r_2 = T - r_1 - r_3 > 0$. Поэтому отрезок $[0, T]$ должен быть достаточно велик.

7. Иллюстративный пример

На рис. 1 и 2 приведены результаты моделирования уравнений (5) при $A = 1$, $\alpha = \beta = 0{,}5$, $\mu = 0{,}1$, $\delta = 0{,}1$, $T = 12$. Отдельно рассмотрены случаи, когда $k(0) < k_{\text{ос}}$ и когда $k(0) > k_{\text{ос}}$. На этих рисунках кривая *1* соответствует случаю $\sigma_K = \sigma_L = 0$ (детерминированный вариант), кривая *2* – случаю $\sigma_K = \sigma_L = 0{,}25$, кривая *3* – случаю $\sigma_K = \sigma_L = 0{,}5$.

Видно, что с увеличением коэффициентов волатильности происходит больший разброс траекторий.

Рис. 1. Изменение фондовооруженности труда во времени.

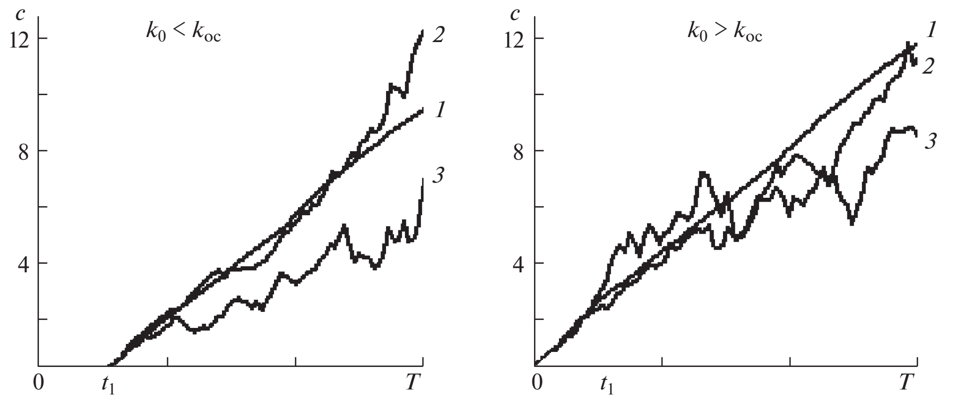

Рис. 2. Изменение удельных накоплений во времени.

8. Заключение

В заключение рассмотрим, как влияют коэффициенты волатильности σ_K и σ_L на результат решения задачи.

1. Решение зависит только от общего коэффициента волатильности σ.

2. Структура управления (11), полученная в предположении малости, в силу непрерывности решения остается справедливой и при больших σ.

3. Значение фондовооруженность труда на магистрали не зависит от σ.

4. Поскольку $\vartheta = \alpha\mu + \alpha\beta\sigma$, то, как видно из (23) и (27), параметр σ влияет на длину отрезка $[0, t_1]$ в случае, когда $k(0) > k_{\text{ос}}$, т.е. там, где $u = 0$. При этом с ростом σ длины этих отрезков убывают до нуля пропорционально $1/\sigma$. Можно проверить, что при увеличении параметра σ величина максимального среднего значения J убывает. Это объясняется тем, что при увеличении σ уменьшаются отрезок, где $u = 0$, и увеличивается отрезок $[t_1, t_2]$ $(r_2 = T - r_1 - r_3,)$ где прирост накоплений меньше $(u_{\text{ос}} < 1)$, чем на отрезках, где $u = 0$.

5. В пределе при $\sigma \to \infty$ получаем следующее. Если $k(0) > k_{\text{ос}}$, то весь отрезок $[0, T]$ состоит из магистрали. Если $k(0) < k_{\text{ос}}$, то на отрезке $[0, t_1]$ $u = 1$, а на отрезке $[t_1, T]$ – магистраль. Соответствующие значения величины J можно получить из (24) путем предельного перехода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
2. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
3. *Лобанов С.Г.* К теории оптимального экономического роста // Эконом. журн. ВШЭ. 1999. № 1. С. 28–41.
4. *Демин Н.С., Кулешова Е.В.* Управление односекторной экономикой на конечном интервале времени с учетом потребления работодателей // АиТ. 2008. № 9. С. 140–155.

Demin N.S., Kuleshova E.V. Control of Single-sector Economy over a Finite Time Interval with Allowance for Employer Consumption // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 9. P. 1576–1590.

5. *Демин Н.С., Кулешова Е.В.* Принцип магистрали в задаче управления односекторной экономикой при наличии ограничений на накопление и потребление // Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. № 2(7). С. 5–23.
6. *Параев Ю.И., Грекова Т.И., Данилюк Е.Ю.* Аналитическое решение задачи оптимального управления односекторной экономикой на конечном интервале времени // Вестн. ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 4(17). С. 5–15.
7. *Анисимов А.В., Григоренко Н.Л., Лукьянова Л.Н.* Задача оптимального управления для односекторной модели экономического роста со смешанными ограничениями // Прикл. математика и информатика. Тр. факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. Т. 44. С. 5–21. М.: МАКС Пресс, 2013.
8. *Соловьев В.И.* Стохастические методы в экономике и финансах. М.: ГУУ, 2000.
9. *Merton R.C.* Life Time Portfolio Selection under Uncertainity: the Continuous Time Case // Rev. Econ. Stat. 1969. V. 51. No. 3. P. 47–257.
10. *Merton R.C.* An Asymptotic Theory of Growth under Uncertainty // Rev. Econ. Stu. 1975. V. 42. No. 3. P. 375–393.
11. *Merton R.C., Samuelson P.A.* Continuous-time Finance. Cambridge: Blackwell, 1990.
12. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
13. *Курант Р.* Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964.
14. *Параев Ю.И.* Об особом управлении в оптимальных процессах, линейных относительно управляющих воздействий // АиТ. 1962. № 9. С. 1202–1209.
15. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
16. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: ГИФМЛ, 1966.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 11.07.2018

После доработки 27.02.2019

Принята к публикации 18.07.2019