Автоматика и телемеханика, № 5, 2020

© 2020 г. А.Б. ДОЛГИЙ, д-р техн. наук (alexandre.dolgui@imt-atlantique.fr),
(Высшая национальная школа горного дела и телекоммуникаций Бретани и земель Луары — ИМТ Атлантик, Нант),
Г.М. ЛЕВИН, д-р техн. наук (levin@newman.bas-net.by),
Б.М. РОЗИН, канд. техн. наук (rozin@newman.bas-net.by),
(Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск)

СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСА ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ МНОЖЕСТВ ОПЕРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕСТАЦИОНАРНОГО СПРОСА[1]

Рассматривается задача оптимизации агрегирования операций, программы выпуска и интенсивностей выполнения операций при групповой серийной обработке заданного семейства продуктов на многопозиционной реконфигурируемой производственной системе в заданных (временных) интервалах при нестационарном детерминированном спросе. Допускается отложенный спрос. Агрегирование операций неизменно на весь период планирования, состав группы и интенсивности выполнения операций обработки неизменны в пределах интервала, но могут меняться от интервала к интервалу.

В качестве целевой функции используется планируемая прибыль. Инвестиционные затраты определяются вариантом агрегирования. Материальные и временные затраты на выпуск группы продуктов в каждом интервале зависят от агрегирования операций, интенсивностей их выполнения и затрат на реконфигурацию оборудования. Логистические затраты включают стоимость хранения невостребованных продуктов, упущенную добавленную стоимость и штрафы за неудовлетворенный спрос.

Предложен трехуровневый декомпозиционный метод решения задачи.

Ключевые слова: производственная система, группа продуктов, агрегирование операций, интенсивность обработки, нестационарный спрос, максимизация прибыли, декомпозиционный метод.

DOI: 10.31857/S0005231020050037

1. Введение

Задачам планирования процессов выполнения комплексов операций в системах различного назначения в последние десятилетия уделялось значительное внимание [1–9]. В ряде публикаций (в том числе в работах [7–9] авторов настоящей статьи) предлагаются модели и методы решения ряда задач, связанных с оптимизацией управления интенсивностью выполнения комплекса взаимосвязанных операций в предположении, что структура этого комплекса, а также структура реализующей его системы уже определены.

Вместе с тем значительный научный и практический интерес представляет также разработка моделей и методов решения более сложных задач совместной оптимизации как структуры комплекса операций в многопозиционных

[1] Авторы благодарны региональному правительству Земель Луары (Франция) за финансовую поддержку этого проекта.

производственных системах групповой обработки продуктов, так и программы выпуска семейства продуктов наряду с интенсивностями выполнения операций комплекса. Под «операцией» понимается набор взаимосвязанных шагов обработки, рассматриваемый как неделимое действие, выполняемое на одной рабочей станции системы посредством общего исполнительного органа. Под интенсивностью операции подразумевается некоторый параметр, определяющий время выполнения единицы ее объема.

В данной статье исследуется одна из ситуаций, когда структура комплекса определяется выбираемым вариантом агрегирования его операций в непересекающиеся группы (блоки операций), каждая из которых выполняется посредством своего исполнительного органа системы, причем все операции одного блока в любой момент времени выполняются с одной и той же интенсивностью. Объединение операций в блоки, как правило, способствует снижению инвестиционных затрат на производственную систему и на ее обслуживание, но одновременно приводит к возрастанию текущих эксплуатационных материальных и временных затрат на выполнение каждой из операций комплекса в отдельности. Последнее объясняется тем, что объединение операций в блоки исключает возможность индивидуального выбора для каждой из них наилучших (с точки зрения текущих затрат) интенсивностей их выполнения.

Динамически изменяющиеся потребности рынка диктуют необходимость модификации от одного (временного) интервала к другому состава группы выпускаемых продуктов посредством реконфигурации системы.

Классификации задач планирования производства партий продуктов с учетом затрат на их выпуск и хранение посвящены, в частности, обзоры [10, 11] и др.

Большая часть исследований в области детерминированных задач планирования выпуска продуктов на конечном горизонте с динамически изменяющимся спросом и ограничениями на мощность производственной системы касается выпуска продуктов одного наименования [12]. Вместе с тем большое внимание уделяется также многопродуктовым задачам [13]. Поскольку классические постановки обоих типов этих задач являются NP-трудными [14–16], большинство предложенных алгоритмов их решения являются эвристическими (см., например, [17–19]). Здесь особо следует отметить эвристики, предполагающие использование при их формулировке и реализации методов математического программирования ([18] и др.), а также эвристики, основанные на методе «ветвей и границ» [19].

Для решения однопродуктовых задач с динамически изменяющимся спросом часто применялись методы динамического программирования [20–22]. В последнее время внимание многих исследователей однопродуктовых задач с ограниченной мощностью системы привлекали вполне полиномиальные многошаговые аппроксимационные схемы [12], позволяющие находить приближенное решение задачи с заданной относительной погрешностью оптимального значения целевой функции.

Исследуемая в статье комплексная задача заключается в выборе варианта агрегирования операций в блоки, в определении для каждого временного интервала состава группы, количества выпускаемых групп и интенсивностей выполнения операций, максимизирующих в совокупности планируемую прибыль при ограничениях на общую длительность выполнения комплексов операций в каждом временном интервале.

Компонента рассматриваемой задачи, связанная с планированием выпуска семейства продуктов, относится к задачам среднесрочного планирования серийного выпуска системой ограниченной мощности групп переменного состава продуктов заданной номенклатуры с детерминированным динамическим спросом. Невыполненные заказы по каждому из продуктов остаются в системе и могут быть удовлетворены на последующих интервалах (допускается отложенный спрос).

В качестве основных особенностей исследуемой постановки можно отметить следующие. Выбранный вариант агрегирования операций в блоки остается неизменным на всем периоде планирования. Как состав группы продуктов, так и интенсивности операций не изменяются в рамках текущего интервала, но могут быть изменены в следующем интервале. Объемы спроса на различные продукты семейства в различных интервалах не связаны между собой. Решения о количестве выпускаемых групп в любом интервале принимаются одновременно с выбором интенсивностей операций обработки продуктов группы, определяющих как возможность такого размера выпуска, так и стоимость самого выпуска. Следует отметить, что если пропорции спроса на различные продукты группы не изменяются от интервала к интервалу, то такую задачу можно свести к однопродуктовой, где в качестве продукта рассматривается группа в целом. Таким образом, рассматриваемая задача занимает промежуточное место между многопродуктовыми и однопродуктовыми задачами.

Рассмотренные в [7, 9] задачи являются фрагментами исследуемой, получаемыми при фиксации варианта агрегирования операций на единственном временном интервале и при некоторых дополнительных предположениях. Наличие в исследуемой задаче комбинаторной составляющей, связанной с поиском наилучшего агрегирования операций, а также дискретной составляющей, связанной с выбором варианта состава группы, делает эту задачу достаточно сложной, требующей специальных методов решения. Ниже предлагается один из возможных подходов к разработке таких методов.

2. Общая постановка задачи и ее математическая модель

Рассматривается одна из задач, возникающих при проектировании производственных систем для группового выпуска продуктов d заданной номенклатуры D на периоде $\Im$ планирования, состоящем из n временных интервалов с длительностями T_t, в условиях, когда известен ожидаемый спрос λ_{dt} на продукт $d \in D$ в интервале $t \in T = \{1, \ldots, n\}$. Система состоит из ряда специализированных рабочих станций, на каждой из которых может выполняться некоторое множество операций. Операции, выполняемые на различных станциях, считаются различными. В дальнейшем J – множество всех операций в системе.

Продукты в систему поступают последовательно. Входная последовательность в интервале t состоит из циклически повторяющихся идентичных подпоследовательностей (групп) $\pi_t = (d_{t1}, \ldots, d_{tr}, \ldots, d_{t\bar{h}(\pi_t)})$ из $\bar{h}(\pi_t)$ продуктов $d_{tr} \in D$, причем отдельные продукты могут входить в группу π_t в количестве $h_d(\pi_t)$ экземпляров. Каждый продукт группы последовательно один за другим проходит обработку на каждой станции системы в порядке нумерации станций, причем в каждый момент времени на каждой станции обрабатывается один продукт. Работа системы состоит из последовательности тактов. В каждом такте при заданной группе π_t на каждой рабочей станции параллельно выполняются множества операций над соответствующими (станции, группе и моменту времени) продуктами. По завершении такта все находящиеся в системе продукты синхронно перемещаются на следующие (для каждого из них) станции, с последней станции сходит готовый продукт, а на первую станцию поступает очередной продукт из входной последовательности. Затем выполняется очередной такт. Обработка одной группы π_t в интервале t состоит из $\bar{h}(\pi_t)$ тактов. Эта последовательность тактов образует цикл обработки группы π_t в интервале t. В общем случае цикл может содержать идентичные такты, но для простоты изложения будем считать все такты цикла различными. В дальнейшем $I(\pi_t) = \{1, \ldots, i, \ldots, \bar{h}(\pi_t)\}$ – множество номеров тактов обработки группы π_t продуктов. Без ограничения общности будем считать, что в интервале t в такте 1 цикла на первой рабочей станции обрабатывается продукт d_{t1} текущей группы π_t. Тогда в такте i операция j будет выполняться для продукта $d_{t\chi(\pi_t,i,j)} \in D$ этой группы, где $\chi(\pi_t, i, j) = 1 + \mathrm{mod}((\bar{h}(\pi_t) + i - \mathrm{mod}(k(j), \bar{h}(\pi_t))), \bar{h}(\pi_t))$ и $k(j)$ – номер станции, на которой выполняется операция $j \in J$.

Поскольку в разных тактах на одной и той же станции обрабатываются, вообще говоря, разные продукты операциями из одного и того же набора операций, то в данном случае цикл обработки группы представляет собой выполнение последовательности пересекающихся множеств операций, причем все операции одного множества выполняются параллельно. Эти множества образуют совокупности операций соответствующих тактов. Следует отметить, что одни и те же операции для разных продуктов могут иметь различные параметры, а для некоторых продуктов отдельные операции могут вообще не выполняться.

При проектировании системы операции могут агрегироваться в один либо несколько блоков операций. Каждый блок выполняется с единой интенсивностью посредством одного общего для операций блока исполнительного органа.

Агрегирование операций способствует, как правило, снижению капитальных затрат на систему и затрат на ее обслуживание, но одновременно может приводить к возрастанию текущих материальных и временных затрат на выполнение каждой из агрегируемых операций в отдельности. Последнее объясняется, в частности, тем, что такое агрегирование операций исключает возможность индивидуального выбора для каждой из них наилучших (с точки зрения производственных затрат) интенсивностей их выполнения.

Возможности агрегирования операций задаются семейством W непересекающихся неединичных подмножеств из множества J, каждое из которых является потенциальным блоком операций, причем любое подмножество $w \in W$

может содержать такие операции, выполнение которых для некоторых продуктов не требуется. В данной работе ограничимся случаем, когда каждое из множеств операций $w \in W$ может выполняться либо только полностью агрегированным (т.е. как один блок), либо полностью разагрегированным (т.е. каждая операция автономна). В этом случае множество возможных вариантов агрегирования представимо множеством Q допустимых значений двоичного вектора $\mathbf{q} = (q_w | w \in W)$, где $q_w = 0$ при агрегированном выполнении операций множества $w \in W$ и $q_w = 1$ в противном случае.

В работе исследуется ситуация, когда структура системы (число рабочих станций, множества операций, выполняемых на каждой станции, и выбранный вариант $\mathbf{q}$ их агрегирования) остается неизменной на всем периоде планирования, в то время как состав группы π_t продуктов, планируемое количество x_t выпуска групп и интенсивности z_{jt} выполнения операций $j \in J$ могут изменяться от интервала к интервалу. Ограничимся случаем, когда интенсивность z_{jt} выполнения каждой операции (а значит, и блока операций) для каждого интервала выбирается однократно, не зависит от такта, в составе которого эта операция выполняется, и не изменяется во времени.

Искомыми параметрами в рамках рассматриваемой проектной задачи являются вариант $\mathbf{q}$ агрегирования операций, вектора $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_t, \ldots, \pi_n)$ и $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_t, \ldots, x_n)$ планируемых к выпуску групп продуктов и планов выпуска этих групп на периоде планирования, а также вектор $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_t = (z_{jt} | j \in J) | t \in T)$ интенсивностей выполнения операций в различных интервалах.

Диапазон $Z_{jd} = [z_{1jd}, z_{2jd}]$ возможных значений интенсивности z_{jt} выполнения операции $j \in J$ для продукта $d \in D$ предполагается заданным. Поскольку интенсивность z_{jt} выполнения операции $j \in J$ в интервале $t \in T$ одинакова для всех $d \in D$, то предполагается, что диапазон $Z_j = \bigcap\limits_{d \in D} Z_{jd}$ возможных значений интенсивности z_{jt} операции $j \in J$ не пуст, в дальнейшем $Z_j = [z_{1j}, z_{2j}]$. Аналогично, предполагается, что для любого $w \in W$ диапазон $Z_w = [z_{1w} = \max\{z_{1j} | j \in w\}, z_{2w} = \min\{z_{2j} | j \in w\}]$ возможных значений интенсивности z_{wt} операций блока в интервале t также не пуст. В противном случае все операции из w не могут быть агрегированы в одном блоке и, следовательно, это множество должно быть исключено из W.

В работе при выборе наиболее рационального значения набора $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ искомых проектных параметров учитываются как добавленная стоимость продукции, выпущенной системой за общий период планирования, так и общие производственные и логистические затраты за этот период.

Указанная добавленная стоимость $Д(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{x})$ может быть оценена как суммарная добавленная стоимость каждого произведенного и поставленного (в соответствии с ожидаемым спросом) продукта $d \in D$:

$$\begin{aligned} Д(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}) &= \sum_{d \in D} \sigma_d \min \left\{ \sum_{t=1}^{n} h_d(\pi_t) x_t, \sum_{t=1}^{n} \lambda_{dt} \right\} = \\ &= \sum_{d \in D} \sigma_d \sum_{t=1}^{n} \lambda_{dt} - \sum_{d \in D} \sigma_d \max \left\{ 0, \sum_{t=1}^{n} \lambda_{dt} - \sum_{t=1}^{n} h_d(\pi_t) x_t \right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\sigma_d > 0$ – добавленная стоимость одного продукта d. Здесь $Д(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}) = \sum_{d \in D} \sigma_d \max \left\{0, \sum_{t=1}^{n} \lambda_{dt} - \sum_{t=1}^{n} h_d(\pi_t) x_t \right\}$ можно рассматривать как недополученную добавленную стоимость (что эквивалентно недополученной прибыли).

Анализ реальных ситуаций показывает, что для многих из них с достаточной для практики точностью можно считать, что общие как материальные, так и временные затраты на выпуск продукции на всем периоде планирования складываются из:

— инвестиционных затрат на систему за вычетом ее остаточной стоимости, амортизационных затрат, включая затраты на оборудование, производственные площади и т.п.;

— текущих эксплуатационных затрат в процессе функционирования системы (далее – эксплуатационные затраты), включающих оплату труда основного и вспомогательного персонала и накладные расходы на нее, стоимости расходуемых ресурсов и затрат на их восстановление, затраты на реконфигурацию системы при переходе системы на выпуск в очередном временном интервале другой группы продуктов;

— логистических затрат, включающих затраты на хранение произведенной, но невостребованной продукции и/или штрафы за неудовлетворенный спрос для каждого из интервалов времени периода планирования.

Инвестиционные и амортизационные затраты зависят от принимаемого в процессе проектирования варианта $\mathbf{q}$ агрегирования операций. Во многих реальных ситуациях с достаточной для практики точностью эта зависимость может быть представлена функцией $C^{\text{ин}}(\mathbf{q}) = C_0 + \sum_{w \in W} C_w q_w$, где C_0 и C_w предполагаются известными для всех $w \in W$.

Рассмотрим зависимости материальных и временных затрат в процессе эксплуатации проектируемой системы от значений набора $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ искомых проектных параметров для каждого интервала $t \in T$.

Длительность выполнения в интервале t для продукта $d \in D$ операции $j \in J$ при фиксированной ее интенсивности z_{jt} равна $V_{jd} z_{jt}$, где V_{jd} – заданный объем операции $j \in J$ для продукта d. Предполагается, что $V_{jd} = 0$, если операция j для продукта d не выполняется. Учитывая параллельность выполнения операций как на каждой станции, так и операций различных станций, длительность выполнения всех операций такта i равна $\max\{V_{ij}(\pi_t) z_{jt} | j \in J\}$, где $V_{ij}(\pi_t) = V_{j d_{t\chi(\pi_t, i, j)}}$ – объем операции $j \in J$ для обрабатываемого в этом такте продукта $d_{t\chi(\pi_t, i, j)}$ из группы π_t. В дальнейшем условно предполагается, что при $V_{jd} = 0$ диапазон Z_{jd} не ограничен.

Анализ реальных ситуаций показывает, что для многих из них с достаточной для практики точностью можно считать, что общие эксплуатационные как материальные, так и временные затраты складываются из двух основных частей. Первой является сумма затрат, связанных с восстановлением ресурсов, расходуемых при выполнении каждой из операций. Вторую часть представляют дополнительные материальные и временные затраты, связанные со вспомогательными временами тактов, зарплатой персонала с накладными расходами, обслуживанием оборудования, реконфигурацией системы и т.д.

Рассматривается ситуация, когда максимально возможный объем каждого из расходуемых ресурсов в системе ограничен и заранее известен. Предполагается, что восстановление любого из ресурсов осуществляется после завершения последнего обеспеченного соответствующим ресурсом такта. Выполнение следующего такта может начаться лишь после восстановления этого ресурса. Материальные и временные затраты на восстановление каждого из ресурсов, как правило, известны. Известна обычно также и зависимость скорости расхода соответствующих ресурсов на выполнение единицы объема операции $j \in J$ для продукта $d \in D$ от интенсивности z_{jt} ее выполнения [23, 24]. На базе этой информации для каждой пары (j, d) могут быть построены определенные на диапазоне Z_{jd} функции $f_{pjd}(z_{jt})$, представляющие зависимости удельных (отнесенных к единице объема операции) материальных ($p = 1$) и временных ($p = 2$) затрат на ресурсы и их восстановление от принимаемой интенсивности z_{jt} операции j в интервале t. Как правило, функции $f_{pjd}(z_{jt})$ являются невозрастающими в области их определения для любых j, d, p.

Материальные ($p = 1$) и временные ($p = 2$) затраты на реконфигурацию системы в начале интервала t зависят от групп продуктов, планируемых к выпуску в интервалах t и $t - 1$. Эти затраты $c_p(\pi_{t-1}, \pi_t)$ предполагаются известными.

Остальные общие материальные и временные затраты при эксплуатации системы можно рассматривать относительно каждого цикла. Эти затраты также можно считать состоящими из двух частей, первая из которых пропорциональна числу тактов в цикле, а вторая пропорциональна сумме длительностей всех тактов цикла. Коэффициенты пропорциональности $E_{pt}(\mathbf{q})$, $R_{pt}(\mathbf{q})$ этих зависимостей для группы π_t и интервала t предполагаются заданными для каждого из возможных вариантов агрегирования $\mathbf{q} \in Q$, где $p = 1$ для материальных затрат и $p = 2$ для временных. Аналогично предыдущему во многих реальных ситуациях с достаточной для практики точностью можно считать, что зависимости коэффициентов $E_{pt}(\mathbf{q})$ (как и коэффициентов $R_{pt}(\mathbf{q})$) от варианта агрегирования $\mathbf{q}$ имеют следующую структуру:

$$E_{pt}(\mathbf{q}) = e'_{pt} + \sum_{w \in W} e_{ptw} q_w,$$

где $e'_{pt} > 0$ – величина удельных затрат в случае агрегированного выполнения операций для всех множеств $w \in W$; $e_{piw} > 0$ – дополнительные удельные затраты при автономном выполнении операций множества $w \in W$. Здесь параметры e'_{pt} и e_{piw} предполагаются известными для всех $w \in W$.

Таким образом, в интервале $t \in T$ общие эксплуатационные материальные ($p = 1$) и временные ($p = 2$) затраты на цикл обработки группы π_t продуктов при фиксированных значениях искомых параметров $\mathbf{q}$ и $\mathbf{z}_t$ равны

$$F_{pt}(\mathbf{q}, \pi_t, \mathbf{z}_t) = E_{pt}(\mathbf{q})\bar{h}(\pi_t) + R_{pt}(\mathbf{q}) \sum_{i \in I(\pi_t)} \max\{V_{ij}(\pi_t) z_{jt} | j \in J\} +$$

$$+ \sum_{i \in I(\pi_t)} \sum_{j \in J} V_{ij}(\pi_t) f_{pij}(z_{jt}),$$

где $f_{pij}(z_{jt}) = f_{pjd_{t\chi(\pi_t,i,j)}}(z_{jt})$ – материальные ($p = 1$) и временные ($p = 2$) затраты на единицу объема операции j для обрабатываемого в такте i продукта $d_{t\chi(\pi_t,i,j)}$ при фиксированном значении z_{jt}. В функциях $F_{pt}(\mathbf{q}, \pi_t, \mathbf{z}_t)$ целочисленность числа тактов за время расходования восстановленного ресурса не учитывается, поскольку это число обычно достаточно велико.

При оценке логистических затрат рассматривается ситуация, когда допускается отложенный спрос, т.е. заказы, не выполненные к концу текущего интервала, могут быть удовлетворены в последующие интервалы с выплатой штрафов за просрочку. Логистические затраты рассматриваются по каждому продукту в отдельности и задаются посредством функций $H_{dt}(y)$, представляющих затраты на хранение (при $y > 0$) либо штраф за неудовлетворенный спрос (при $y < 0$) для $|y|$ единиц продуктов $d \in D$ в интервале t. Предполагается, как обычно, что функции $H_{dt}(y)$ не возрастают при $y < 0$, не убывают при $y > 0$ и $H_{dt}(0) = 0$.

Суммарные логистические затраты в системе, выпускающей заданную номенклатуру D продуктов, за весь период планирования при фиксированных значениях искомых проектных параметров $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ равны

$$L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{d \in D} H_{dt} \left(\sum_{r=1}^{t} h_d(\pi_r) x_r - \Lambda_{dt} \right),$$

где

$$\Lambda_{dt} = \sum_{r=1}^{t} \lambda_{dr}$$

— ожидаемый кумулятивный спрос на продукт $d \in D$ за первые t интервалов.

Общие затраты (инвестиционные, эксплуатационные и логистические) на выпуск и реализацию заданной номенклатуры D продуктов за весь период планирования при фиксированных значениях искомых проектных параметров $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$ равны

$$\varPhi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = C_0 + \sum_{w \in W} C_w q_w + \sum_{t=1}^{n} c_1(\pi_{t-1}, \pi_t) +$$
$$+ \sum_{t=1}^{n} x_t F_{1t}(\mathbf{q}, \pi_t, \mathbf{z}_t) + \sum_{t=1}^{n} \sum_{d \in D} H_{dt} \left(\sum_{r=1}^{t} h_d(\pi_r) x_r - \Lambda_{dt} \right).$$

Рассматриваемая проектная задача заключается в нахождении такого допустимого набора $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ проектных параметров, который максимизирует планируемую прибыль $\varPi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = Д(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}) - \varPhi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ от эксплуатации системы за весь период планирования.

С учетом (1) максимизации прибыли $\varPi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ соответствует минимизация суммы общих затрат $\varPhi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ и недополученной добавленной стоимости $Д(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{x})$. Последнюю условно можно рассматривать как сумму дополнительных штрафов за недопоставку каждого из продуктов $d \in D$ в конце интервала n. В дальнейшем предполагается, что эти дополнительные штрафы включены в модифицированные функции $H_{dn}(\bullet)$. В этом случае решение рассматриваемой проектной задачи сводится к решению следующей задачи смешанного математического программирования:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\mathbf{q},\pi_t,\mathbf{x},\mathbf{z}) = \sum_{t=1}^{n} c_1(\pi_{t-1},\pi_t) + \sum_{t=1}^{n} F_{1t}(\mathbf{q},\pi_t,\mathbf{z}_t)x_t + \\ + \sum_{t=1}^{n}\sum_{d\in D} H_{dt}\left(\sum_{r=1}^{t} h_d(\pi_r)x_r - \Lambda_{dt}\right) \to \min\end{aligned} \tag{2}$$

при ограничениях

$$F_{2t}(\mathbf{q},\pi_t,\mathbf{z}_t)x_t \le T_t - c_2(\pi_{t-1},\pi_t), \quad t \in T, \tag{3}$$

$$\mathbf{q} \in Q, \tag{4}$$

$$\pi_t \in \boldsymbol{D}_t, \quad t \in T, \tag{5}$$

$$x_t \le \bar{x}_t(\pi_t), \quad t \in T, \tag{6}$$

$$z_t \in Z(\mathbf{q}), \quad t \in T, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{D}_t$ – множество допустимых вариантов групп π_t во временном интервале t, определяемое возможностями системы; $\bar{x}_t(\pi_t)$ – предельное количество групп π_t продуктов из D, которое может быть произведено системой в интервале t; $Z(\mathbf{q})$ – множество таких векторов $(z_j | j \in J) \in \prod_{j\in J} Z_j$, что для любых $w \in W$ и $j \in w$ выполняется $z_j = z_w \in Z_w$ при $q_w = 0$.

Здесь ограничение (3) учитывает возможность выпуска x_t групп π_t продуктов с учетом длительности T_t интервала t и общих временных затрат $F_{2t}(\bullet)$ на цикл выпуска этой группы. Задачу (2)–(7) в дальнейшем будем называть задачей **A**.

3. Декомпозиционная схема метода решения задачи

Задача **A** представляет собой достаточно сложную задачу смешанного нелинейного программирования, в которой искомыми являются переменные различной природы: $\mathbf{q}$ – $|W|$-мерный двоичный вектор, π_t – размещение с повторениями элементов множества D, $\mathbf{x}$ – n-мерный целочисленный вектор, а $\mathbf{z}_t$ – $|J|$-мерный вещественный вектор, $t \in T$.

Отметим некоторые особенности задачи **A**:

— для любого $t \in T$ структура функции $F_{2t}(\mathbf{q},\pi_t,\mathbf{z}_t)x_t$ в левой части ограничения (3) совпадает со структурой слагаемого $F_{1t}(\mathbf{q},\pi_t,\mathbf{z}_t)x_t$ в первой части целевой функции (2);

— если векторы $\mathbf{q}',\mathbf{q}'' \in Q$ таковы, что $q'_w \le q''_w$ для всех $w \in W$, то $Z(\mathbf{q}')\subseteq Z(\mathbf{q}'')$ и для всех $z \in Z(\mathbf{q}')$, $t \in T$ и $p = 1,2$ выполняется $F_{pt}(\mathbf{q}',\pi_t,z_t) \le F_{pt}(\mathbf{q}'',\pi_t,z_t)$, если при этом $\mathbf{q}' \ne \mathbf{q}''$, то $F_{pt}(\mathbf{q}',\pi_t,\mathbf{z}_t) < F_{pt}(\mathbf{q}'',\pi_t,\mathbf{z}_t)$.

Учитывая указанные особенности задачи **A** предлагается следующий трехуровневый подход к ее решению.

На нижнем уровне для фиксированных значений набора $(\mathbf{q}, \pi_t, x_t)$ искомых переменных и $t \in T$ решаются автономные подзадачи $\mathbf{B1}_t(\mathbf{q}, \pi_t, x_t)$ нелинейного программирования, каждая из которых заключается в определении такого значения $z_t^*(\mathbf{q}, \pi_t, x_t)$ вектора $\mathbf{z}_t \in Z(\mathbf{q})$, которое минимизирует функцию $\tilde{F}_{1t}(\mathbf{q}, \pi_t, \mathbf{z}_t)$ при условии, что $\tilde{F}_{2t}(\mathbf{q}, \pi_t, \mathbf{z}_t) \le T_t^0(\mathbf{q}, \pi_{t-1}, \pi_t, x_t)$, где

$$\tilde{F}_{pt}(\mathbf{q}, \pi_t, \mathbf{z}_t) = F_{pt}(\mathbf{q}, \pi_t, \mathbf{z}_t) - \bar{h}(\pi_t)E_{pt}(\mathbf{q}) =$$
$$= R_{pt}(\mathbf{q}) \sum_{i \in I(\pi_t)} \max\{V_{ij}(\pi_t)z_{jt} | j \in J\} + \sum_{i \in I(\pi_t)} \sum_{j \in J} V_{ij}(\pi_t) f_{pij}(z_{jt}), \quad p = 1, 2,$$

и

$$T_t^0(\mathbf{q}, \pi_{t-1}, \pi_t, x_t) = \frac{T_t - c_2(\pi_{t-1}, \pi_t)}{x_t} - \bar{h}(\pi_t)E_{2t}(\mathbf{q}).$$

Обозначим через $\Theta(\mathbf{q}, \pi_t, x_t)$ оптимальное значение $\tilde{F}_{1t}(\mathbf{q}, \pi_t, \mathbf{z}_t^*(\mathbf{q}, \pi_t, x_t))$ целевой функции $\tilde{F}_{1t}(\mathbf{q}, \pi_t, \mathbf{z}_t)$ в этой подзадаче. Предполагается, что $\Theta(\mathbf{q}, \pi_t, x_t) = \infty$, если подзадача $\mathbf{B1}_t(\mathbf{q}, \pi_t, x_t)$ не имеет решения.

На среднем уровне для фиксированных значений вектора $\mathbf{q}$ решаются подзадачи $\mathbf{B2}(\mathbf{q})$ дискретного программирования по поиску такого значения $(\boldsymbol{\pi}^*(\mathbf{q}), \mathbf{x}^*(\mathbf{q}))$ набора $(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{x})$, который минимизирует функцию

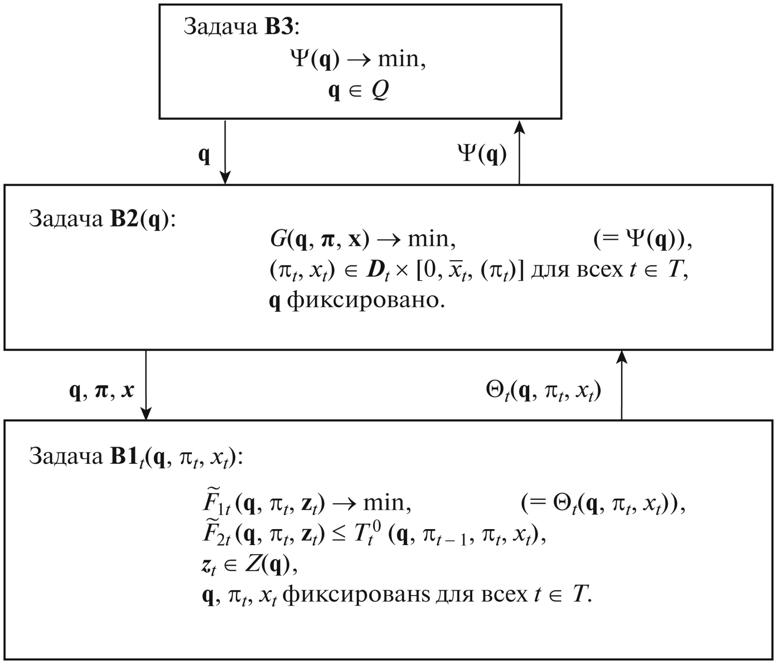
$$G(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{n} c_1(\pi_{t-1}, \pi_t) +$$
$$+ \sum_{t=1}^{n} \left[\left(\Theta_t(\mathbf{q}, \pi_t, x_t) + \bar{h}(\pi_t)E_{1t}(\mathbf{q}) \right) x_t + \sum_{d \in D} H_{dt} \left(\sum_{r=1}^{t} h_d(\pi_r)x_r - \Lambda_{dt} \right) \right]$$

при условии, что $(\pi_t, x_t) \in \boldsymbol{D}_t \times [0, \bar{x}_t(\pi_t)]$ для всех $t \in T$. Оптимальное значение $G(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}^*(\mathbf{q}), \mathbf{x}^*(\mathbf{q}))$ функции $G(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x})$ обозначим через $\Psi(\mathbf{q})$. Если $\Psi(\mathbf{q}) = \infty$ для некоторого $\mathbf{q} \in Q$, то исходная задача $\mathbf{A}$ с этим значением $\mathbf{q}$ не имеет решения.

На верхнем уровне решается подзадача $\mathbf{B3}$ дискретного программирования по определению значения $\mathbf{q}^*$ двоичного вектора $\mathbf{q} \in Q$, минимизирующего функцию $\Psi(\mathbf{q})$. Очевидно, если $\Psi(\mathbf{q}) = \infty$ для всех $\mathbf{q} \in Q$, то исходная задача $\mathbf{A}$ не имеет решения. В противном случае, если $\mathbf{q}^*, \boldsymbol{\pi}^*(\mathbf{q}), \mathbf{x}^*(\mathbf{q})$ и $\mathbf{z}^*(\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{x})$ являются точными решениями соответствующих подзадач, то набор $(\mathbf{q}^*, \boldsymbol{\pi}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{z}^*(\mathbf{q}^*, \boldsymbol{\pi}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*)))$ искомых параметров $\mathbf{q}, \boldsymbol{\pi}^*, \mathbf{x}, \mathbf{z}$ является точным решением исходной задачи. Если какие-либо из подзадач $\mathbf{B1}_t(\bullet)$, $\mathbf{B2}(\bullet)$ или $\mathbf{B3}$ решаются приближенно, то набор $(\mathbf{q}^*, \boldsymbol{\pi}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{z}^*(\mathbf{q}^*, \boldsymbol{\pi}^*(\mathbf{q}^*), \mathbf{x}^*(\mathbf{q}^*)))$ можно принять в качестве приближенного решения этой задачи.

Укрупненная схема предлагаемого подхода приведена на рисунке.

Рассмотрим некоторые подходы к решению выделенных подзадач. Целесообразность того или иного подхода к решению подзадач $\mathbf{B1}_t(\bullet)$ во многом зависит от свойств функций $f_{pjd}(z)$ на областях их определения. Остановимся



Укрупненная схема декомпозиции задачи **A**.

на широко распространенном на практике случае, когда эти функции (следовательно, и функции $f_{pij}(z)$) выпуклы на отрезках Z_j для всех $j \in J$, $d \in D$ и $p = 1, 2$. В этом случае задача $\mathbf{B1}_t(\bullet)$ является задачей выпуклого программирования и для ее решения могут быть использованы известные общие методы решения задач этого класса. Вместе с тем специфика этих задач (вид первых слагаемых функций $\tilde{F}_{1t}(\bullet)$ и $\tilde{F}_{2t}(\bullet)$, сепарабельность их последних слагаемых и невозрастание функций $f_{pij}(z_{jt})$ на отрезках Z_j) позволяют предложить для их решения специальные методы.

Один из них основан на параметрической декомпозиции [24] задачи $\mathbf{B1}_t(\bullet)$ с параметризацией $\max\{V_{ij}(\pi_t)z_{jt} | j \in J\} = \tau_i$, $i \in I(\pi_t)$. Пусть

$$W^0(\mathbf{q}) = \{w \in W \mid q_w = 0\}, \quad J^0(\mathbf{q}) = \{j \in w \mid w \in W^0(\mathbf{q})\}, \quad \boldsymbol{\tau} = (\tau_i \mid i \in I(\pi_t)),$$

$$\tau_{ki}(\mathbf{q}, \pi_t) = \max\Big\{\max\big\{V_{ij}(\pi_t)z_{kj} \mid j \in J \backslash J^0(\mathbf{q})\big\}, \max\big\{V_{ij}(\pi_t)z_{kw} \mid w \in W^0(\mathbf{q})\big\}\Big\},$$

$$z_{jt}^*(\boldsymbol{\tau}) = \min\Big\{z_{2j}, \min\big\{\tau_{2i}(\mathbf{q}, \pi_t)/V_{ij}(\pi_t) \mid i \in I(\pi_t)\big\}\Big\} \quad \text{при} \quad j \in J \backslash J^0(\mathbf{q})$$

и

$$z_{jt}^*(\boldsymbol{\tau}) = \min\Big\{z_{2w}, \min\big\{\tau_{2i}(\mathbf{q}, \pi_t)/V_{ij}(\pi_t) \mid i \in I(\pi_t)\big\}\Big\} \quad \text{при} \quad j \in w \in W^0(\mathbf{q}).$$

Тогда задача $\mathbf{B1}_t(\bullet)$ сводится к следующей задаче выпуклого программирования:

$$(8) \qquad \hat{F}_{1t}(\mathbf{q}, \pi_t, \boldsymbol{\tau}) = R_{1t}(\mathbf{q}) \sum_{i \in I(\pi_t)} \tau_i + \sum_{i \in I(\pi_t)} \sum_{j \in J} V_{ij}(\pi_t) f_{1ij}(z_{jt}^*(\boldsymbol{\tau})) \to \min,$$

$$\hat{F}_{2t}(\mathbf{q}, \pi_t, \boldsymbol{\tau}) = R_{2t}(\mathbf{q}) \sum_{i \in I(\pi_t)} \tau_i + \qquad\qquad (9)$$
$$+ \sum_{i \in I(\pi_t)} \sum_{j \in J} V_{ij}(\pi_t) f_{2ij}(z^*_{jt}(\boldsymbol{\tau})) \le T^0_t(\mathbf{q}, \pi_{t-1}, \pi_t, x_t),$$

$$\tau_i \in [\tau_{1i}(\mathbf{q}, \pi_t), \tau_{2i}(\mathbf{q}, \pi_t)], \quad i \in I(\pi_t). \qquad (10)$$

В качестве начального решения задачи (8)–(10) можно принять такое значение $\boldsymbol{\tau}^0$ вектора $\boldsymbol{\tau}$, которое минимизирует функцию $\hat{F}_{2t}(\mathbf{q}, \pi_t, \boldsymbol{\tau})$. Если $\hat{F}_{2t}(\mathbf{q}, \pi_t, \boldsymbol{\tau}^0) > T^0_t(\mathbf{q}, \pi_{t-1}, \pi_t, x_t)$, то задача $\mathbf{B1}_t(\bullet)$ не имеет решения. Заметим, что $\bar{x}_t(\mathbf{q}, \pi_t) = (T_t - c_2(\pi_{t-1}, \pi_t))/(\hat{F}_{2t}(\mathbf{q}, \pi_t, \boldsymbol{\tau}^0) + \bar{h}(\pi_t)E_{2t}(\mathbf{q}))$ является верхней оценкой допустимого значения параметра x_t в задаче $\mathbf{B2}(\mathbf{q})$.

Для приближенного решения задачи $\mathbf{B1}_t(\bullet)$ может быть адаптирован подход, предложенный в [9] для решения аналогичных задач и основанный на их аппроксимации задачей линейного программирования.

Подзадача $\mathbf{B2}(\mathbf{q})$ может быть сформулирована в терминах многошаговой оптимизации с последующим использованием методов динамического программирования для ее решения. При этом в качестве управляющего на шаге $t \in T$ может быть принят вектор $\mathbf{u}_t = (\pi_t, x_t)$, а в качестве состояния – вектор $\mathbf{s}_t = (\pi_t, \mathbf{a}_t)$, где $\mathbf{a}_t = \left(a_{dt} = \sum\limits_{r=1}^{t} h_d(\pi_t)x_r | d \in D\right)$. При большой размерности пространства состояний для приближенного решения подзадачи $\mathbf{B2}(\mathbf{q})$ можно воспользоваться соответствующими приближенными методами (например, методом «блуждающих трубок») в сочетании с некоторыми эвристиками. Одной из эвристик при построении начального приближения является выбор на очередном шаге $t \in T$ такого управления $\mathbf{u}_t = (\pi_t, x_t)$ из всех возможных, которое для получаемого кумулятивного выпуска и ожидаемого кумулятивного спроса минимизирует сумму затрат на реконфигурацию, производство, хранение запасов продуктов и штрафов за их недопоставку либо (в более упрощенном варианте) лишь два последних слагаемых этой суммы.

В подзадаче $\mathbf{B3}$ верхнего уровня верхняя граница числа возможных значений вектора $\mathbf{q}$ равна $2^{|W|}$, поэтому ее решение полным перебором всего множества Q требует значительных затрат времени даже при сравнительно небольших значениях $|W|$ и практически нереализуемо при больших $|W|$. Для сокращения перебора могут быть использованы известные методы, основанные на идеях случайного поиска, эвристиках и метаэвристиках в сочетании с предлагаемым ниже вариантом метода последовательной фиксации переменных (МПФП).

Пусть имеется некоторое значение $\mathbf{q}^0$ вектора $\mathbf{q} \in Q$, полученное с использованием перечисленных выше эвристических подходов. Для последующей оптимизации $\mathbf{q}^0$ предлагается следующий алгоритм МПФП. Алгоритм формирует последовательность векторов из Q такую, что каждый следующий вектор отличается от предыдущего только значением ровно одной его компоненты. Компоненты, значения которых были изменены, считаются зафиксированными и в дальнейшем не меняются. Выбор очередного вектора последовательности на текущей итерации выполняется следующим образом. Для текущего вектора $\mathbf{q}^c$ формируется подмножество $Q(\mathbf{q}^{\text{тек}}) \subset Q$ векторов, которые отличаются от $\mathbf{q}^{\text{тек}}$ одной из его нефиксированных компонент. Для каждого вектора $\mathbf{q} \in Q(\mathbf{q}^{\text{тек}})$ решается подзадача $\mathbf{B2}(\mathbf{q})$. В качестве следующего вектора последовательности выбирается вектор $\mathbf{q}' \in Q(\mathbf{q}^{\text{тек}})$, которому соответствует минимальное значение функции $\Psi(\mathbf{q})$ среди этих подзадач. Компонента, по которой векторы $\mathbf{q}'$ и $\mathbf{q}^{\text{тек}}$ различаются между собой, фиксируется. Число векторов в подмножествах $Q(\mathbf{q}^c)$ от итерации к итерации уменьшается с $|W|$ до 1. Соответственно сокращается и число решаемых подзадач. На каждой итерации в общем случае получается новый лучший вектор $\mathbf{q} \in Q$. Алгоритм завершает работу, когда либо значение $\Psi(\mathbf{q}^{\text{тек}})$ не уменьшилось, либо подмножество $Q(\mathbf{q}^{\text{тек}}) = \varnothing$. Полученный вектор $\mathbf{q}^c$ принимается в качестве решения подзадачи **B3**. Общее число подзадач $\mathbf{B2}(\mathbf{q})$ вычисления функции $\Psi(\mathbf{q})$ для различных $\mathbf{q}$ не превышает числа $0{,}5(|W|^2 + |W|)$.

Алгоритм МПФП может быть применен повторно для нового начального значения $\mathbf{q}^0$. В качестве такового может быть принято, в частности, полученное ранее решение.

Одно из возможных направлений развития алгоритма МПФП связано с проверкой целесообразности изменения одновременно нескольких компонент вектора $\mathbf{q}^{\text{тек}}$, отбираемых по полученным значениям $\Psi(\mathbf{q})$.

4. Заключение

Предложены математическая модель и метод решения задачи комплексной оптимизации агрегирования операций, программы выпуска и интенсивностей выполнения пересекающихся множеств операций при групповой серийной обработке заданного семейства продуктов на многопозиционной реконфигурируемой производственной системе в заданных временных интервалах при нестационарном детерминированном спросе.

Рассмотрен частный случай задачи, когда выбранный вариант агрегирования операций системы остается неизменным на всем периоде планирования, все операции каждого из заданных подмножеств могут выполняться либо агрегированно с общей для этого множества интенсивностью, либо каждая операция со своей индивидуальной интенсивностью, состав группы продуктов и интенсивности операций в рамках текущего интервала неизменны, но могут быть изменены при переходе к следующему интервалу, зависимости материальных и временных затрат на выполнение любой операции от ее интенсивности представимы выпуклыми функциями, объемы спроса на различные продукты в различных интервалах известны и не связаны между собой.

Описана трехуровневая декомпозиционная схема решения рассматриваемой задачи. Метод приближенного решения задачи верхнего уровня основан на комбинации эвристических методов и методе последовательной фиксации переменных. Метод для задачи среднего уровня выбора состава группы обрабатываемых продуктов и плана выпуска групп на каждом из временных интервалов при фиксированном варианте агрегирования операций в блоки с учетом затрат на сам выпуск, на хранение излишне произведенных продуктов, штрафов за не поставленные в срок заказчику продукты и упущенной добавленной стоимости основан на идеях метода динамического программирования.

Для подзадачи нижнего уровня поиска оптимальных интенсивностей операций в случае выпуклых функций затрат на операции при фиксированных варианте агрегирования, составе группы продуктов и объеме выпуска предложен метод параметрической декомпозиции для точного ее решения и метод аппроксимации задачей линейного программирования для приближенного решения.

В дальнейшем предполагается исследовать более общие постановки рассмотренной выше задачи, в которых, в частности, варианты агрегирования операций в составе заданных подмножеств операций определяются различными комбинациями подмножеств этих операций, фактический спрос и степень его удовлетворения на отдельные продукты в начальные временные интервалы влияет на последующих интервалах как на возможный спрос на эти продукты, так и на штрафы за их возможную недопоставку. Интерес представляет также исследование возможностей эффективного решения подзадачи нижнего уровня для невыпуклых (в частности, квазивыпуклых, вогнутых, и др.) функций $f_{pjd}(z_{jt})$, представляющих зависимости удельных материальных и временных затрат на ресурсы и их восстановление от принимаемой интенсивности z_{jt} операции j.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alting L., Zhang H.* Computer Aided Process Planning: the state-of-the-art survey // Int. J. Prod. Res. 1989. V. 27. No. 4. P. 553–585.
2. *Halevi G.* Process and Operation Panning. Springer, 2003.
3. *Bukchin J., Tzur M.* Design of flexible assembly line to minimize equipment cost // IIE Transact. 2000. V. 32. P. 585–598.
4. *Burkov V.N., Novikov D.A.* Models and methods of multiprojects' management // Syst. Sci. 1999. V. 256. No. 2. P. 5–4.
5. *Dolgui A., Guschinsky N., Levin G.* Enhanced mixed integer programming model for a transfer line design problem / A. Dolgui // Comput. Industr. Engineer. 2012. V. 62. No. 2. P. 570–578.
6. *Левин Г.М., Розин Б.М.* Оптимизация режимов параллельной многоинструментальной обработки деталей на агрегатном оборудовании с учетом групповой смены инструментов // Информатика. 2011. № 3. С. 33–47.
7. *Левин Г.М., Розин Б.М.* Оптимизация последовательно-параллельного выполнения комплекса взаимосвязанных операций // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2013. № 1. С. 111–116.
8. *Dolgui A., Rozin B., Levin G.* Optimisation of processing conditions for multi-product batch production lines with series-parallel operations under uncertainty on demands for finished products // Proc. 18th APIEMS Conf. Industr. Engineer. Management Syst. Bandung, Indonesia, 2017. P. A2-7–A2-12.
9. *Левин Г.М., Розин Б.М., Долгий А.Б.* Линейная аппроксимация задачи оптимизации интенсивностей последовательно-параллельного выполнения пересекающихся множеств операций // Информатика. 2014. № 3. С. 44–51.
10. *Karimi B., Fatemi Ghomi S.M.T., Wilson J.M.* The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms // Omega. 2003. V. 31. No. 5. P. 365–378.

11. *Ullah H., Parveen S.* A Literature Review on Inventory Lot Sizing Problems // Global J. Res. Engineer. 2010. V. 10. No. 5. P. 21–36.
12. *Chubanov S., Pesch E.* An FPTAS for the single-item capacitated economic lot-sizing problem with supply and demand // Oper. Res. Lett. 2012. V. 40. No. 6. P. 445–449.
13. *Absi N., Kedad-Sidhoum S.* The multi-item capacitated lot-sizing problem with safety stocks and demand shortage costs // Comput. Oper. Res. 2009. V. 36. No. 11. P. 2926–2936.
14. *Florian M., Lenstra J.K., Kan A.H.G.R.* Deterministic production planning: Algorithms and complexity // Management Sci. 1980. V. 26. P. 669–679.
15. *Bitran G.R., Yanasse H.H.* Computational complexity of the capacitated lot size problem // Management Sci. 1982. V. 28. No. 10. P. 1174–1186.
16. *Chen W.H., Thizy J.M.* Analysis of relaxations for the multi-item capacitated lot-sizing problem // Ann. Oper. Res. 1990. V. 26. P. 29–72.
17. *Dixon P.S., Silver E.A.* A heuristic solution procedure for the multi-item, single level, limited capacity, lot sizing problem // J. Oper. Management. 1981. V. 21. No. 1. P. 23–40.
18. *Thizy J.M., Van Wassenhove L.N.* Lagrangean relaxation for the multi-item capacitated lot-sizing problem: a heuristic implementation // IIE Transact. 1985. V. 17. No. 4. P. 308–313.
19. *Gelders L.F., Maes J., Van Wassenhove L.N.* A branch and bound algorithm for the multi item single level capacitated dynamic lotsizing problem / Axaster S., Schneeweiss CH., Silver E., ed. Multistage production planning and inventory control. Lecture notes in economics and mathematical systems. V. 266. Berlin: Springer, 1986. P. 92–108.
20. *Wagelmans A., Van Hoesel S., Kolen A.* Economic lotsizing: an O(n log n) algorithm that runs in linear time in the Wagner–Whitin case // Oper. Res. 1992. V. 40. P. 145–155.
21. *Aggarwal A., Park J.K.* Improved algorithms for economic lot-size problem // Oper. Res. 1993. V. 41. No. 3. P. 549–571.
22. *Federgruen A., Tzur M.A.* A simple forward algorithm to solve general dynamic lot sizing models with n periods in O(n log n) or O(n) time // Management Sci. 1991. V. 37. No. 8. P. 909–925.
23. *Левин Г.М. Розин Б.М., Долгий А.Б.* Оптимизация выпуска и интенсивностей обработки группы деталей при нестационарном спросе // Весці Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2016. № 3. С. 102–109.
24. *Левин Г.М., Танаев В.С.* Декомпозиционные методы оптимизации проектных решений. Минск.: Наука и техника, 1978.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 17.07.2019

После доработки 12.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019