© 2020 г. Ю.Н. СОТСКОВ, д-р физ.-мат. наук (sotskov48@mail.ru)
(Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск)

ОБЛАСТЬ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРЕСТАНОВКИ ОБСЛУЖИВАНИЯ НА ОДНОМ ПРИБОРЕ ТРЕБОВАНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ

Исследуется задача оптимизации расписания обслуживания заданного множества требований на одном приборе. При составлении расписания для каждого требования известны нижняя граница и верхняя граница допустимой длительности его обслуживания. В качестве критерия оптимальности расписания рассматривается минимизация суммарного времени обслуживания заданного множества требований. Исследованы свойства области оптимальности перестановки обслуживания требований. Разработаны полиномиальные алгоритмы построения области оптимальности перестановки обслуживания требований и вычисления объема области оптимальности. Определены условия существования пустой области оптимальности для перестановки обслуживания требований. Установлен критерий существования перестановки обслуживания требований с максимально возможным объемом области оптимальности.

Ключевые слова: теория расписаний, неопределенные длительности обслуживания требований, минимизация суммарного времени, область оптимальности.

DOI: 10.31857/S0005231020050050

1. Введение

Оперативно-календарное планирование производства включает этап составления календарных планов выполнения поступивших заказов (составление расписаний обслуживания заданного множества требований) на имеющемся оборудовании (на множестве обслуживающих приборов). Оптимальное расписание производственного процесса является важным фактором его эффективности, поскольку позволяет сократить производственные расходы предприятия, уменьшить время реализации заявок заказчиков на продукцию предприятия, своевременно снабжать прозводственный процесс сырьем, материалами и комплектующими деталями, необходимыми для изготовления конечной продукции предприятия. Оптимальное расписание производственного процесса позволяет уменьшить расходы на хранение сырья, комплектующих деталей и материалов и в итоге повысить эффективность использования имеющихся ресурсов (обслуживающих приборов) и капитала.

Для практических задач оперативно-календарного планирования, как правило, не удается заранее определить точные значения длительностей обслуживания заданных требований, однако имеется возможность оценить снизу и сверху длительности их обслуживания. Для решения таких задач требуются алгоритмы построения расписаний, близких к оптимальным, в условиях неопределенности числовых параметров [1–9].

В разделе 2 данной статьи рассматривается задача построения близкого к оптимальному расписания обслуживания требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_n\}$ на одном приборе с критерием $\sum C_i$ минимизации суммы моментов C_i завершения обслуживания всех требований $J_i \in \mathcal{J}$ при условии, что при построении расписания известны только нижняя граница $p_i^L > 0$ и верхняя граница $p_i^U \geqslant p_i^L$ возможной длительности $p_i \in [p_i^L, p_i^U]$ обслуживания требования J_i. В разделе 3 определяется область оптимальности для перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n})$ обслуживания требований множества $\mathcal{J}$, которая содержит параллелепипед оптимальности для той же перестановки. Параллелепипед оптимальности для перестановки π_k был исследован в [10–17]. В разделе 4 разработаны полиномиальные алгоритмы для определения области оптимальности для перестановки π_k и для определения объема области оптимальности. Доказаны необходимые и достаточные условия, при выполнении которых область оптимальности для перестановки обслуживания заданных требований является пустым множеством. В разделе 5 исследованы свойства перестановки π_k обслуживания требований множества $\mathcal{J}$, которая имеет максимальный объем области оптимальности.

2. Постановка задачи и обзор известных результатов

Множество требований $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_n\}$ необходимо обслужить на одном приборе. Точное значение длительности p_i обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$ не известно на момент построения расписания обслуживания требований $\mathcal{J}$. Прерывания обслуживания требования запрещены. При реализации расписания обслуживания требований $\mathcal{J}$ длительность p_i обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$ может принимать любое действительное значение из заданного отрезка $\left[p_i^L, p_i^U\right]$, где $p_i^U \geqslant p_i^L > 0$. Точное значение длительности $p_i \in \left[p_i^L, p_i^U\right]$ становится известным лишь в момент C_i завершения обслуживания требования J_i. Пусть R^n обозначает пространство n-мерных действительных векторов, а R_+^n – подмножество R^n всех неотрицательных n-мерных действительных векторов, $R_+^n \subset R^n$. В пространстве R^n множество всех векторов $(p_1, \ldots, p_n)$ допустимых длительностей обслуживания требований множества $\mathcal{J}$ представляет собой n-мерный параллелепипед, т.е. множество всех векторов $p = (p_1, \ldots, p_n) \in R_+^n$, удовлетворяющих следующей системе неравенств:

$$p_1^L \leqslant p_1 \leqslant p_1^U; \ \ldots; \ p_n^L \leqslant p_n \leqslant p_n^U.$$

Множество допустимых длительностей $(p_1, \ldots, p_n) = p \in R_+^n$ обслуживания требований множества $\mathcal{J}$ представим как декартово произведение отрезков $[p_i^L, p_i^U]$: $\times_{i=1}^n [p_i^L, p_i^U] := [p_1^L, p_1^U] \times \ldots \times [p_n^L, p_n^U] = T = \big\{p \in R_+^n : p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U, i \in \{1, \ldots, n\}\big\}$. Вектор $p \in T$ будем называть сценарием. Пусть множество $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_{n!}\}$ содержит все перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n})$ требований $\mathcal{J}$. Для фиксированных сценария $p \in T$ и перестановки $\pi_k \in \Pi$ пусть $C_i = C_i(\pi_k, p)$ обозначает момент завершения обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$ в активном расписании [5, 18], однозначно определенном перестановкой π_k. Критерий $\sum C_i$ обозначает минимизацию суммы моментов завершения обслуживания требований $\mathcal{J}$:

$$\sum_{J_i \in \mathcal{J}} C_i(\pi_t, p) = \min_{\pi_k \in \Pi} \left\{ \sum_{J_i \in \mathcal{J}} C_i(\pi_k, p) \right\}. \tag{1}$$

Указанная в (1) перестановка $\pi_t = (J_{t_1}, \ldots, J_{t_n}) \in \Pi$ является оптимальной перестановкой обслуживания требований $\mathcal{J}$ для фиксированного сценария $p \in T$.

Поскольку число требований $n = |\mathcal{J}|$ известно на момент составления расписания π_t обслуживания требований $\mathcal{J}$, то критерий $\sum C_i$ означает также минимизацию среднего времени $\frac{\sum_{J_i \in \mathcal{J}} C_i(\pi_k, p)}{n}$ обслуживания требований множества $\mathcal{J}$.

Сформулированная неопределенная задача обозначается как $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant \leqslant p_i^U|\sum C_i$, если использовать введенную в [19] трехпозиционную форму $\alpha|\beta|\gamma$ обозначения задач теории расписаний. Здесь и далее α обозначает тип обслуживающей системы, β – условия обслуживания требований, а γ – целевую функцию.

Если сценарий $p \in T$ известен к моменту построения расписания, иными словами, для каждого требования $J_i \in \mathcal{J}$ выполняется равенство $\left[p_i^L, p_i^U\right] = = [p_i, p_i]$, то неопределенная задача $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ превращается в детерминированную задачу $1||\sum C_i$. Обозначение $1|p|\sum C_i$ будем использовать для детерминированной задачи $1||\sum C_i$, в которой зафиксирован сценарий $p \in T$ к моменту построения оптимального расписания. Как показано в [20], задачу $1|p|\sum C_i$ можно решить за время $O(n \log n)$ в силу следующего критерия оптимальности перестановки $\pi_k \in \Pi$.

Теорема 1. *Перестановка $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ обслуживания требований множества $\mathcal{J}$ является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства:*

$$p_{k_1} \leqslant \ldots \leqslant p_{k_n}. \tag{2}$$

Если $p_{k_u} < p_{k_v}$, то требование J_{k_u} предшествует требованию J_{k_v} в любой перестановке $\pi_k \in \Pi$, которая является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$.

Поскольку в неопределенной задаче $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ сценарий $p \in T$ не фиксирован на момент построения перестановки $\pi_k \in \Pi$ обслуживания требований $\mathcal{J}$, то точное время C_i завершения обслуживания требования $J_i \in \mathcal{J}$ определить невозможно до момента завершения обслуживания требования J_i. Следовательно, значение целевой функции $\sum C_i$ для перестановки π_k обслуживания требований $\mathcal{J}$ остается неизвестным вплоть до момента завершения обслуживания всех требований множества $\mathcal{J}$, если для требований $J_i \in \mathcal{J}$ выполняются строгие неравенства $p_i^L < p_i^U$.

Для неопределенной задачи $\alpha|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\gamma$, как правило, не существует расписания, которое оставалось бы оптимальным для всех сценариев из множества T мощности, большей единицы. Поэтому в литературе по исследованию таких некорректных задач теории расписаний вводят дополнительные целевые функции и (или) используют те или иные предположения. В частности, использование стохастического метода для решения задачи $\alpha|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\gamma$ основано на предположении о том, что все длительности обслуживания требований являются случайными величинами с известными законами распределения вероятностей [7, 18].

Если нет достаточной информации о распределении вероятностей случайных длительностей, то используют другие методы [5, 21]. Так, при использовании робастного метода [2, 22–24] лицо, принимающее решение, предпочитает исключить наихудший из возможных сценариев для искомого расписания, которое предлагается для реализации [4, 9, 23]. Для любой перестановки $\pi_k \in \Pi$ и любого сценария $p \in T$ разность $\gamma_p^k - \gamma_p^t = r(\pi_k, p)$ принято называть сожалением (regret) для перестановки π_k со значением целевой функции γ, равным γ_p^k для сценария p. Значение $Z(\pi_k) = \max\{r(\pi_k, p) \, : \, p \in T\}$ называется абсолютным сожалением в наихудшем случае (worst-case absolute regret), а значение $Z^*(\pi_k) = \max\left\{\frac{r(\pi_k,p)}{\gamma_p^t} \, : \, p \in T\right\}$ – относительным сожалением в наихудшем случае (worst-case relative regret).

Несмотря на то, что задача $1|p|\sum w_iC_i$ полиномиально разрешима [20] при любых весах $w_i > 0$, заданных для множества требований $J_i \in \mathcal{J}$, построение перестановки $\pi_t \in S$ с наименьшим значением $Z(\pi_t)$ (или перестановки с наименьшим значением $Z^*(\pi_t)$) для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ является NP-трудной задачей даже для двух допустимых сценариев [21, 24, 25]. В [3] разработан метод ветвей и границ для построения перестановки π_t с минимальным значением абсолютного сожаления $Z(\pi_t)$ для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum w_iC_i$. Вычислительные эксперименты на компьютере показали, что предложенный метод позволяет строить такую перестановку π_t для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum w_iC_i$ при условии, что число n заданных требований не превосходит 40.

Использование метода, основанного на нечетких множествах, позволяет строить расписания, которые являются оптимальными при нечетких длительностях обслуживания требований множества $\mathcal{J}$ на приборах заданного множества $\mathcal{M}$ [8, 9, 26]. Этот метод позволяет решать неопределенные задачи теории расписаний только при малых значениях числа n заданных требований.

В [1] было протестировано несколько эвристик для решения задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum w_iC_i$. В проведенных вычислительных экспериментах для $n \in \{100, 300, 400, 600, 800, 1000\}$ использовались различные законы распределения вероятностей для выбора фактических длительностей обслуживания требований. Вычислительные эксперименты позволили выделить наилучшую эвристику $U2$, которая по всем решенным тестовым примерам давала среднюю погрешность целевой функции $\sum w_iC_i$, равную 1,1% от значения целевой функции, полученного для фактических длительностей обслуживания требований.

Метод, основанный на устойчивости расписаний [6, 10–17] включает анализ устойчивости оптимальных расписаний к возможным вариациям длительностей обслуживания требований множества $\mathcal{J}$ и построение на основе такого анализа минимального доминирующего множества расписаний. Для любого сценария $p \in T$ минимальное доминирующее множество содержит хотя бы одно оптимальное расписание. В отличие от стохастического метода, робастного метода и метода, основанного на нечетких множествах, цель метода, основанного на устойчивости расписаний, заключается в поиске расписания, которое является оптимальным для максимально возможного числа допустимых сценариев из заданного множества T. В частности, если существует одноэлементное доминирующее множество $\{\pi_t\}$ для задачи $\alpha|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\gamma$, то расписание π_t является оптимальным для задачи $\alpha|p|\gamma$ при всех сценариях $p \in T$, несмотря на неопределенность длительностей обслуживания требований множества $\mathcal{J}$.

В [10–12, 14, 15] метод, основанный на устойчивости расписаний, использовался для решения задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum w_iC_i$. В [15] доказан критерий существования одноэлементного доминирующего множества для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum w_iC_i$. В [12] для $n \in \{50, 100, 500, 1000, 5000, 10000\}$ были случайным образом сгенерированы сложные примеры задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum w_iC_i$, которые были решены приближенно разработанным алгоритмом MAX-OPTBOX со средней погрешностью, равной 1,5%. В [10] примеры задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ были случайным образом сгенерированы для $n \in \{10, 20, \ldots, 100, 200, \ldots, 1000, 2000, \ldots, 10000\}$ и решены приближенно разработанным алгоритмом 3 со средней погрешностью, равной 0,74%.

Алгоритм MAX-OPTBOX (алгоритм 3) строит перестановку $\pi_k \in \Pi$, для которой параллелепипед оптимальности имеет наибольший полупериметр (наибольший относительный полупериметр соответственно). Алгоритм 3 учитывает следующую особенность целевой функции $\sum C_i$: увеличение δ значения целевой функции в результате нарушения неравенства (2) из-за фактической длительности p_{k_i} требования J_{k_i} влечет увеличение значения целевой функции на величину $\delta(n - i + 1)$. Поэтому ошибка при выборе порядка обслуживания требования J_{k_i} важнее такой же по величине ошибки при выборе порядка обслуживания требования J_{k_j}, если $i < j$.

Определение параллелепипеда оптимальности приведено в [10, 12]. Пусть $M = (k_{i_1}, \ldots, k_{i_{|M|}})$ представляет собой упорядоченное подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$, для которого выполняются следующие соотношения: $\{k_1, \ldots, k_{|M|}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $|M| \leqslant n$ и $k_{i_1} < \ldots < k_{i_{|M|}}$.

Определение 1. Максимальный по включению параллелепипед

$$\mathcal{OB}(\pi_k, T) = \left[l_{k_{i_1}}^{opt}, u_{k_{i_1}}^{opt}\right] \times \ldots \times \left[l_{k_{i_{|M|}}}^{opt}, u_{k_{i_{|M|}}}^{opt}\right] =: \times_{k_{i_r} \in M} \left[l_{k_{i_r}}^{opt}, u_{k_{i_r}}^{opt}\right] \subseteq T$$

называется параллелепипедом оптимальности для перестановки $\pi_k = (J_{k_{i_1}}, \ldots, J_{k_{i_n}}) \in \Pi$, *если перестановка* π_k, *будучи оптимальной для задачи* $1|p|\sum C_i$ *со сценарием* $p = (p_1, \ldots, p_n) \in T$, *остается оптимальной и для задачи* $1|p'|\sum C_i$ *с любым сценарием* $p' = (p'_1, \ldots, p'_n) \in [p_1, p_1] \times \ldots \times [p_{k_{i_r}-1}, p_{k_{i_r}-1}] \times \left[l_{k_{i_r}}^{opt}, u_{k_{i_r}}^{opt}\right] \times [p_{k_{i_r}+1}, p_{k_{i_r}+1}] \times \ldots \times [p_n, p_n] \in T$. *Если нет сценария* $p \in T$, *для которого перестановка* π_k *является оптимальной для задачи* $1|p|\sum C_i$, *то полагаем* $\mathcal{OB}(\pi_k, T) = \emptyset$.

Любая вариация $p'_{k_{i_r}}$ длительности $p_{k_{i_r}}$ обслуживания требования $J_{k_{i_r}} \in \mathcal{J}$, принадлежащая максимальному (по включению) отрезку $\left[l_{k_{i_r}}^{opt}, u_{k_{i_r}}^{opt}\right]$, указанному в определении 1, гарантирует оптимальность перестановки $\pi_k \in \Pi$ для любого сценария $p' = (p'_1, \ldots, p'_n)$, если для него выполняется включение $p'_{k_{i_r}} \in \left[l_{k_{i_r}}^{opt}, u_{k_{i_r}}^{opt}\right]$. Максимальный отрезок $\left[l_{k_{i_r}}^{opt}, u_{k_{i_r}}^{opt}\right]$ длины $u_{k_{i_r}}^{opt} - l_{k_{i_r}}^{opt} \geqslant 0$, $l_{k_{i_r}}^{opt} \leqslant u_{k_{i_r}}^{opt}$, указанный в определении 1, будем называть отрезком оптимальности для требования $J_{k_{i_r}} \in \mathcal{J}$ в перестановке π_k. Если не существует такого отрезка оптимальности $\left[l_{k_{i_r}}^{opt}, u_{k_{i_r}}^{opt}\right]$, $l_{k_{i_r}}^{opt} \leqslant u_{k_{i_r}}^{opt}$, для требования $J_{k_{i_r}} \in \mathcal{J}$, то будем говорить, что требование $J_{k_{i_r}}$ не имеет отрезка оптимальности в перестановке π_k.

3. Область оптимальности перестановки требований $\pi_k \in \Pi$

Определим область оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ для перестановки $\pi_k \in \Pi$, которая содержит параллелепипед оптимальности перестановки π_k: $\mathcal{OB}(\pi_k, T) \subseteq \mathcal{OR}(\pi_k, T)$.

Определение 2. Максимальное по включению замкнутое подмножество $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \subseteq T$ множества R_+^n называется областью оптимальности для перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ относительно T, если перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ при любом сценарии $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{OR}(\pi_k, T)$. Если не существует сценария $p \in T$, для которого перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$, то полагаем $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$.

В силу теоремы 1 будем различать три типа отрезков для каждого требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ в фиксированной перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$, а именно:

отрезок оптимальности $\left[l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt}\right] \subseteq \left[p_{k_r}^L, p_{k_r}^U\right]$;

отрезок условной оптимальности $\left[l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}\right] \subseteq \left[p_{k_r}^L, p_{k_r}^U\right]$ и

отрезок неоптимальности $\left[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}\right] \subseteq \left[p_{k_r}^L, p_{k_r}^U\right]$.

Отрезок оптимальности $\left[l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt}\right]$ для требования J_{k_r} в перестановке π_k указан в определении 1 параллелепипеда оптимальности.

Отрезком неоптимальности для требования J_{k_r} в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ будем называть максимальный по включению отрезок $\left[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}\right] \subseteq \left[p_{k_r}^L, p_{k_r}^U\right]$, для которого перестановка $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n})$ не может быть оптимальной для задачи $1|p'|\sum C_i$ ни при каком сценарии $p' = (p'_1, \ldots, p'_n) \in T$ таком, что

$$(p'_1, \ldots, p'_n) \in \left\{\times_{i=1}^{r-1} \left[p_{k_i}^L, p_{k_i}^U\right]\right\} \times \left[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}\right] \times \left\{\times_{i=r+1}^{n} \left[p_{k_i}^L, p_{k_i}^U\right]\right\}.$$

В силу необходимых и достаточных условий (2) оптимальности перестановки $\pi_k \in \Pi$ для задачи $1|p|\sum C_i$ для каждого отрезка неоптимальности $\left[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}\right]$ либо существует требование $J_{k_v} \in \mathcal{J}$ такое, что $r < v$ и выполняются соотношения

$$p^U_{k_v} = l^{non}_{k_r} < u^{non}_{k_r} = p^U_{k_r}, \tag{3}$$

либо существует требование $J_{k_w} \in \mathcal{J}$ такое, что $w < r$ и выполняются соотношения

$$p^L_{k_r} = l^{non}_{k_r} < u^{non}_{k_r} = p^L_{k_w}. \tag{4}$$

Из определения 1 также следует, что открытый интервал неоптимальности $(l^{non}_{k_r}, u^{non}_{k_r})$ для требования J_{k_r} в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ не может иметь общих точек с отрезком оптимальности $\left[l^{opt}_{k_r}, u^{opt}_{k_r}\right]$, т.е.

$$(l^{non}_{k_r}, u^{non}_{k_r}) \bigcap \left[l^{opt}_{k_r}, u^{opt}_{k_r}\right] = \emptyset. \tag{5}$$

Для демонстрации приведенных определений будем использовать пример 1 задачи $1|p^L_i \leqslant p_i \leqslant p^U_i|\sum C_i$ с 18 требованиями, $n = 18$. Отрезки $\left[p^L_i, p^U_i\right]$, определяющие допустимые длительности обслуживания требований $J_i \in \mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_{18}\}$, заданы в таблице. Отрезки $\left[p^L_i, p^U_i\right]$ представлены также на рис. 1 в системе прямоугольных координат для перестановки $\pi_1 = (J_1, \ldots, J_{18}) \in \Pi$. На рис. 1 ось абсцисс определяет отрезки $\left[p^L_i, p^U_i\right]$ допустимых длительностей обслуживания требований $J_i \in \mathcal{J}$. На оси ординат указаны требования J_i из множества $\mathcal{J}$.

Отрезком условной оптимальности для требования J_{k_r} в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ называется максимальный по включению отрезок $\left[l^{copt}_{k_r}, u^{copt}_{k_r}\right] \subseteq \left[p^L_{k_r}, p^U_{k_r}\right]$ такой, что любая точка $p^*_{k_r} \in \left[l^{copt}_{k_r}, u^{copt}_{k_r}\right]$ не принадлежит открытому интервалу неоптимальности, $p^*_{k_r} \notin (l^{non}_{k_r}, u^{non}_{k_r})$, и при этом существует хотя бы одно требование $J_{k_d} \in \mathcal{J}$, $d \neq r$, для которого выполняется включение $p^*_{k_r} \in \left[p^L_{k_d}, p^U_{k_d}\right]$.

Из определения отрезка условной оптимальности следует, что существуют точки $p^*_{k_r} \in \left[l^{copt}_{k_r}, u^{copt}_{k_r}\right]$ такие, что перестановка $\pi_k \in \Pi$ является оптимальной для задачи $1|p'|\sum C_i$ со сценарием $p' = (p'_1, \ldots, p'_n) \in [p_{k_1}, p_{k_1}] \times \ldots \times [p_{k_r-1}, p_{k_r-1}] \times [p^*_{k_r}, p^*_{k_r}] \times [p_{k_r+1}, p_{k_r+1}] \times \ldots \times [p_{k_n}, p_{k_n}]$, и при этом существуют другие точки $p^{**}_{k_r} \in \left[l^{copt}_{k_r}, u^{copt}_{k_r}\right]$ такие, что перестановка $\pi_k \in \Pi$ не является оптимальной для задачи $1|p''|\sum C_i$ со сценарием $p'' = (p''_1, \ldots, p''_n) \in \in [p_{k_1}, p_{k_1}] \times \ldots \times [p_{k_r-1}, p_{k_r-1}] \times [p^{**}_{k_r}, p^{**}_{k_r}] \times [p_{k_r+1}, p_{k_r+1}] \times \ldots \times [p_{k_n}, p_{k_n}]$. На рис. 1 отрезки условной оптимальности для требований $J_i \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_1 = (J_1, \ldots, J_{18})$ заштрихованы горизонтальными отрезками.

Исходные данные для примера 1 задачи $1|p^L_i \leqslant p_i \leqslant p^U_i|\sum C_i$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
p^L_i	1	3	2	7	2	4	11	12	11	14	7	27	30	9	36	37	38	21
p^U_i	8	5	8	9	10	6	15	15	20	18	23	34	32	40	42	40	40	41

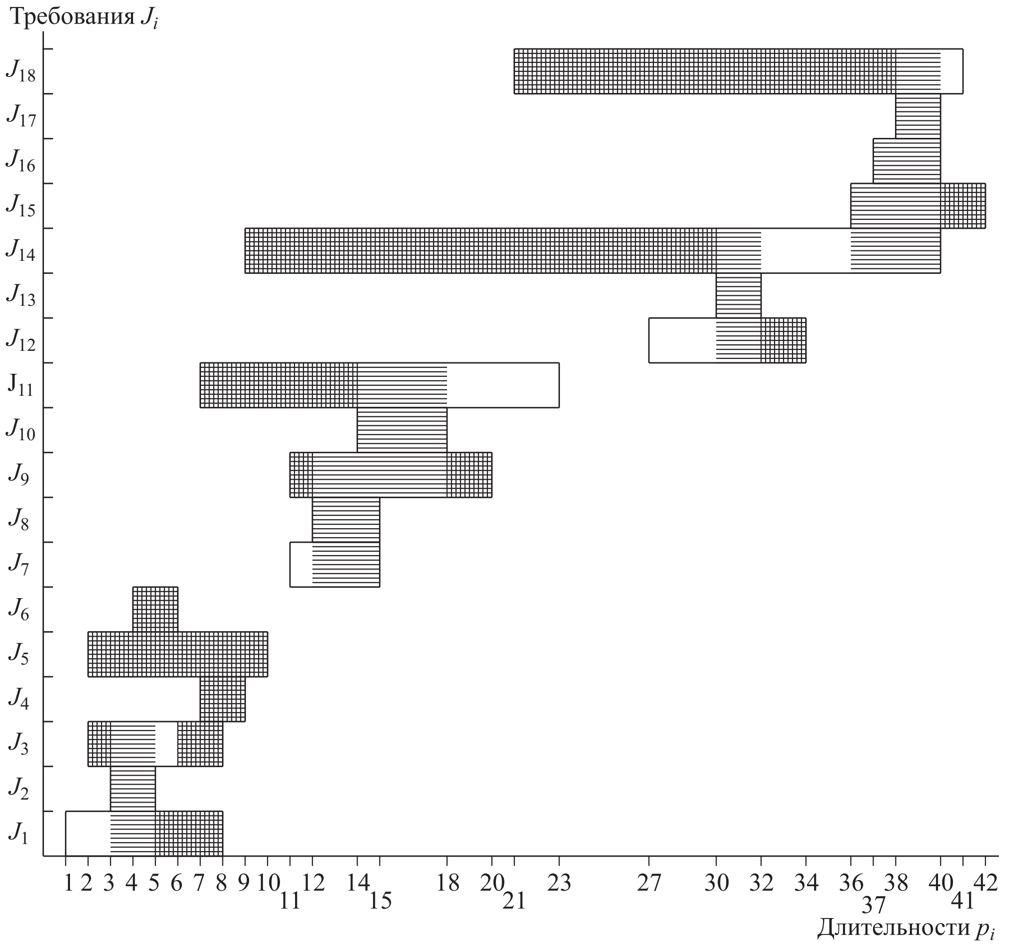


Рис. 1. Отрезки оптимальности, отрезки условной оптимальности (заштрихованы горизонтальными отрезками) и отрезки неоптимальности (заштрихованы горизонтальными и вертикальными отрезками) для требований $J_i \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_1 = (J_1, \ldots, J_{18})$ для примера 1 задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$.

Отметим также, что в любой фиксированной перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots$ $\ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ отрезок $\left[l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}\right]$ условной оптимальности для требования J_{k_r} не имеет общих точек с открытым интервалом оптимальности $(l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt})$ и с открытым интервалом неоптимальности $(l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non})$. Иными словами, выполняются следующие равенства:

$$\left[l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}\right] \bigcap \left(l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt}\right) = \emptyset, \tag{6}$$

$$\left[l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}\right] \bigcap \left(l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}\right) = \emptyset. \tag{7}$$

Если не существует отрезка $[l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}]$, $l_{k_r}^{copt} < u_{k_r}^{copt}$, условной оптимальности для требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ в перестановке π_k, то будем говорить, что требование J_{k_r} не имеет условной оптимальности в перестановке π_k.

На рис. 1 для всех требований $J_i \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_1 = (J_1, \ldots, J_{18})$ представлены отрезки оптимальности, отрезки условной оптимальности и отрезки неоптимальности. Отрезки неоптимальности для требований $J_i \in \mathcal{J}$ в перестановке π_1 заштрихованы дважды (горизонтальными и вертикальными отрезками).

Замечание 1. В силу теоремы 1 для каждого требования $J_i \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_k \in \Pi$ может существовать не более одного отрезка оптимальности, не более двух отрезков условной оптимальности и не более двух отрезков неоптимальности.

Как показано на рис. 1, для требования J_3 в перестановке $\pi_1 \in \Pi$ имеется два отрезка неоптимальности $[2, 3]$ и $[6, 8]$, один отрезок $[3, 5]$ условной оптимальности и один отрезок $[5, 6]$ оптимальности. Для требования J_5 в перестановке π_1 имеется два отрезка неоптимальности $[2, 7]$ и $[6, 10]$ с непустым пересечением $[6, 7] = [2, 7] \bigcap [6, 10]$.

Из определений отрезков оптимальности, неоптимальности и условной оптимальности для требования J_{k_r}, $r \in \{1, \ldots, n\}$, в перестановке $\pi_k \in \Pi$ следует

Лемма 1. Отрезок $[p^L_{k_r}, p^U_{k_r}]$ длительностей обслуживания требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ можно представить в виде объединения всех отрезков оптимальности, неоптимальности и условной оптимальности для требования J_{k_r}, $r \in \{1, \ldots, n\}$, в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots J_{k_n}) \in \Pi$. Для любого отрезка неоптимальности $[l^{non}_{k_r}, u^{non}_{k_r}]$ выполняется хотя бы одно из равенств $l^{non}_{k_r} = p^L_{k_r}$ или $u^{non}_{k_r} = p^U_{k_r}$.

Построение области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots$ $\ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ можно свести к построению области оптимальности перестановки π_k для соответствующей задачи $1|\widehat{p}^L_i \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}^U_i| \sum C_i$ с сокращенными отрезками допустимых длительностей $\left[\widehat{p}^L_i, \widehat{p}^U_i\right] \subseteq \left[p^L_i, p^U_i\right]$. Сокращенные отрезки $\left[\widehat{p}^L_{k_r}, \widehat{p}^U_{k_r}\right]$, $J_{k_r} \in \mathcal{J}$, для перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n})$ определяются по формулам

$$\widehat{p}^L_{k_r} = \max_{1 \leqslant j \leqslant r \leqslant n} p^L_{k_j}, \quad \widehat{p}^U_{k_r} = \min_{1 \leqslant r \leqslant j \leqslant n} p^U_{k_j} \tag{8}$$

для каждого требования $J_{k_r} \in \{J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}\} = \mathcal{J}$. Множество сокращенных сценариев, определенных по формулам (8), обозначим как $\widehat{T} = \left[\widehat{p}^L_1, \widehat{p}^U_1\right] \times \ldots$ $\ldots \times \left[\widehat{p}^L_n, \widehat{p}^U_n\right]$.

Теорема 2. Область оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ для перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ для задачи $1|p^L_i \leqslant p_i \leqslant p^U_i| \sum C_i$ совпадает с областью оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, \widehat{T})$ для той же перестановки для задачи $1|\widehat{p}^L_i \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}^U_i| \sum C_i$ с множеством $\widehat{T}$ допустимых сценариев.

Доказательство. Из необходимых и достаточных условий (2) оптимальности перестановки π_k для задачи $1|p| \sum C_i$ получаем, что из выполнения соотношений

$$p^L_{k_r} \leqslant p_{k_r} < \widehat{p}^L_{k_r} = \max_{1 \leqslant j \leqslant r \leqslant n} p^L_{k_j}$$

хотя бы для одной длительности p_{k_r} следует, что перестановка $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots$ $\ldots, J_{k_r}, \ldots, J_{k_n})$ не может быть оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ с каким-либо сценарием $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \left\{\times_{i=1}^{r-1}\left[p_{k_i}^L, p_{k_i}^U\right]\right\} \times \left[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}\right] \times$ $\times \left\{\times_{i=r+1}^{n}[p_{k_i}^L, p_{k_i}^U]\right\}$.

Аналогично, из выполнения соотношений

$$\min_{1 \leqslant r \leqslant j \leqslant n} p_{k_j}^U = \widehat{p}_{k_r}^U < p_{k_r} \leqslant p_{k_r}^U$$

хотя бы для одной длительности p_{k_r} следует, что перестановка $\pi_k =$ $= (J_{k_1}, \ldots, J_{k_r}, \ldots, J_{k_n})$ не может быть оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ с каким-либо сценарием $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \left\{\times_{i=1}^{r-1}\left[p_{k_i}^L, p_{k_i}^U\right]\right\} \times \left[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}\right] \times$ $\times \left\{\times_{i=r+1}^{n}\left[p_{k_i}^L, p_{k_i}^U\right]\right\}$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение: *множество всех сценариев $p \in T$, для которых перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$, содержится во множестве всех сценариев $p \in T$, для которых перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U|\sum C_i$ с множеством $\widehat{T}$ допустимых сценариев.*

Из включения $\widehat{T} \subseteq T$ следует обратное утверждение:

Утверждение. Множество всех сценариев $p \in T$, для которых перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U|\sum C_i$, содержится во множестве всех сценариев $p \in T$, для которых перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$.

Из доказанных утверждений следует, что для исходной задачи $1|p_i^L \leqslant$ $\leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ и для задачи $1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U|\sum C_i$ с множеством сценариев $\widehat{T} = \left[\widehat{p}_1^L, \widehat{p}_1^U \times\right] \times \ldots \times \left[\widehat{p}_n^L, \widehat{p}_n^U \times\right]$ области оптимальности совпадают для любой фиксированной перестановки $\pi_k \in \Pi$: $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \mathcal{OR}(\pi_k, \widehat{T})$. Теорема 2 доказана.

Из определения 2 и теоремы 2 нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 2. Для задачи $1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U|\sum C_i$ с множеством сценариев $\widehat{T}$ открытый интервал оптимальности $\left(l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt}\right)$ для требования J_{k_r} в перестановке $\pi_k \in \Pi$ не имеет общих точек с отрезком $\left[p_{k_d}^L, p_{k_d}^U\right]$ допустимых длительностей любого другого требования $J_{k_d} \in \mathcal{J}$, $d \neq r$, т.е. выполняется следующее равенство:

$$(l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt}) \bigcap [p_{k_d}^L, p_{k_d}^U] = \emptyset. \tag{9}$$

Докажем небходимые и достаточные условия, при выполнении которых область оптимальности для перестановки $\pi_k \in \Pi$ является пустым множеством.

Теорема 3. Область оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ для перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ является пустым множеством, $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$, тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно требование $J_{k_r} \in \mathcal{J}$, $r \in \{1, \ldots, n\}$, в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$, которое не имеет условной оптимальности и одновременно не имеет отрезка оптимальности.

Доказательство.

Достаточность. Пусть существует требование $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$, которое не имеет условной оптимальности и не имеет отрезка оптимальности. По лемме 1 получаем $\left[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}\right] = \left[p_{k_r}^L, p_{k_r}^U\right] \neq \emptyset$. Следовательно, либо существует требование $J_{k_v} \in \mathcal{J}$ такое, что $r < v$ и выполняются соотношения (3), либо существует требование $J_{k_w} \in \mathcal{J}$ такое, что $w < r$ и выполняются соотношения (4). В первом случае неравенство $p_{k_v} < p_{k_r}$ выполняется для каждой допустимой длительности $p_{k_r} \in \left[p_{k_r}^L, p_{k_r}^U\right]$ обслуживания требования J_{k_r} и для каждой допустимой длительности $p_{k_v} \in \left[p_{k_v}^L, p_{k_v}^U\right]$ обслуживания требования J_{k_v}. Во втором случае неравенство $p_{k_w} > p_{k_r}$ выполняется для каждой допустимой длительности $p_{k_r} \in \left[p_{k_r}^L, p_{k_r}^U\right]$ обслуживания требования J_{k_r} и для каждой допустимой длительности $p_{k_w} \in \left[p_{k_w}^L, p_{k_w}^U\right]$ обслуживания требования J_{k_w}.

В силу теоремы 1 в обоих случаях перестановка π_k не может быть оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ при каком-либо сценарии $p \in T$. Следовательно, согласно определению 2 область оптимальности для перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ является пустым множеством, $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$. Достаточность доказана.

Необходимость. Докажем необходимость методом от противного. Пусть равенство $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$ выполняется. Однако предположим, что не существует ни одного требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$, $r \in \{1, \ldots, n\}$, в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$, которое не имеет условной оптимальности и не имеет отрезка оптимальности.

Согласно определению 2 равенство $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$ означает, что не существует ни одного сценария $p \in T$ такого, что перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ со сценарием $p \in T$. Тем не менее покажем, как построить сценарий $p^* \in T$, который содержится в области оптимальности для перестановки π_k.

Если для требования J_{k_i} существует отрезок оптимальности $[l_{k_i}^{opt}, u_{k_i}^{opt}]$, $l_{k_i}^{opt} \leqslant u_{k_i}^{opt}$, в перестановке π_k, то существует хотя бы одна точка $p_{k_i}^* \in \left[l_{k_i}^{opt}, u_{k_i}^{opt}\right]$. Выберем такое значение $p_{k_i}^*$ в качестве длительности обслуживания требования J_{k_i}.

Если же не существует отрезка оптимальности для требования J_{k_j} в перестановке π_k, то согласно предположению существует отрезок условной оптимальности $\left[l_{k_j}^{copt}, u_{k_j}^{copt}\right]$ для требования J_{k_j}. Выберем значение $l_{k_j}^{copt}$ в качестве длительности обслуживания требования J_{k_j}: $p_{k_j}^* = l_{k_j}^{copt}$.

При таком выборе длительностей $p_{k_j}^*$ обслуживания всех требований $J_{k_j} \in \{J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}\} = \mathcal{J}$ получаем сценарий $p^* = (p_{k_1}^*, \ldots, p_{k_n}^*) \in T$. Из равенств (6), (7) и леммы 2 с равенством (9) следует, что перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p^*|\sum C_i$. Следовательно, имеет место включение $p^* \in \mathcal{OR}(\pi_k, T)$, которое противоречит предполагаемому равенству $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

Из теоремы 3 следует, что если $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$, то в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ для каждого требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$, $r \in \{1, \ldots, n\}$, существует хотя бы один отрезок оптимальности или отрезок условной оптимальности. Поэтому размерность непустой области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ равна $n = |\mathcal{J}|$. Поскольку из теоремы 3 следует и обратное утверждение, то получаем

Следствие 1. Размерность области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ равна $n = |\mathcal{J}|$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$.

На рис. 1 для отрезка неоптимальности $[l_4^{non}, u_4^{non}] = [7, 9]$ требования J_4 в перестановке $\pi_1 = (J_1, \ldots, J_{18})$ выполняются равенства $[l_4^{non}, u_4^{non}] = [7, 9] = [p_4^L, p_4^U]$, т.е. требование J_4 не имеет условной оптимальности и одновременно не имеет отрезка оптимальности в перестановке π_1. Из теоремы 3 следует, что область оптимальности для перестановки π_1 является пустым множеством, $\mathcal{OR}(\pi_1, T) = \emptyset$.

4. Построение области оптимальности и вычисление ее объема

В результате использования теоремы 3 разработан алгоритм 1 сложности $O(n)$ для проверки выполнения равенства $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$ для фиксированной перестановки $\pi_k \in \Pi$.

Если алгоритм 1 устанавливает, что для перестановки π_k справедливо соотношение $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$, то в соответствии с теоремой 2 алгоритм 1 строит по формулам (8) сокращенные отрезки $\left[\widehat{p}_i^L, \widehat{p}_i^U\right]$ допустимых длительностей обслуживания требований $J_i \in \mathcal{J}$. Тем самым определяются исходные данные для задачи $1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U| \sum C_i$ с множеством $\widehat{T}$ допустимых сценариев.

Алгоритм 1.

ВХОД: Отрезки $[p_i^L, p_i^U]$ длительностей обслуживания требований $J_i \in \mathcal{J}$; перестановка $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ обслуживания требований $\mathcal{J}$.

ВЫХОД: Отрезки $[\widehat{p}_i^L, \widehat{p}_i^U]$ для требований $J_i \in \mathcal{J}$, если установлено, что $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$.

Шаг 1: $\widehat{p}_{k_1}^L = p_{k_1}^L$, $t_L = p_{k_1}^L$, $r = 2$;

Шаг 2: **IF** $p_{k_r}^U \geqslant t_L$ **THEN GOTO** шаг 3 **ELSE GOTO** шаг 5;

Шаг 3: **IF** $p_{k_r}^L > t_L$ **THEN** $t_L = p_{k_r}^L$, $\widehat{p}_{k_r}^L = t_L$, $r := r + 1$;
  ELSE $\widehat{p}_{k_r}^L = t_L$, $r := r + 1$;
IF $r \leqslant n$ **THEN GOTO** шаг 2 **ELSE** $\widehat{p}_{k_n}^U = p_{k_n}^U$, $t_U = p_{k_n}^U$;

Шаг 4: **FOR** $r = n - 1$ **to** 1 **STEP** -1 **DO**
  IF $p_{k_r}^U < t_U$ **THEN** $t_U = p_{k_r}^U$, $\widehat{p}_{k_r}^U = t_U$ **ELSE** $\widehat{p}_{k_r}^U = t_U$;
END FOR STOP.

Шаг 5: $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$ **STOP**.

На шагах 1, 2 и 5 алгоритма 1 проверяется равенство $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$. На шагах 2–4 строятся сокращенные отрезки допустимых длительностей обслуживания требований множества $\mathcal{J}$ для задачи $1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U|\sum C_i$. Согласно теореме 2 область оптимальности для перестановки $\pi_k \in \Pi$ обслуживания требований для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ совпадает с областью оптимальности для той же перестановки π_k обслуживания требований для задачи $1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U|\sum C_i$ с множеством $\widehat{T}$ сокращенных сценариев. Нетрудно убедиться в том, что для реализации алгоритма 1 требуется выполнить $O(n)$ элементарных операций.

4.1. Область оптимальности для перестановки $\pi_k \in \Pi$ в частных случаях

Построим область оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ для двух частных случаев перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ и вычислим объем $Vol(\pi_k, T)$ области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$. В первом случае область оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ определяется только отрезками оптимальности всех требований $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ (лемма 3). Во втором случае область оптимальности определяется только отрезками условной оптимальности всех требований $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ (лемма 4).

Лемма 3. *Если $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$ и каждое требование $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ не имеет условной оптимальности в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$, то область оптимальности для перестановки π_k совпадает с параллелепипедом оптимальности для той же перестановки:*

$$\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \times_{r=1}^{n} \left[l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt} \right] = \mathcal{OB}(\pi_k, T). \tag{10}$$

Объем такой области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ равен

$$Vol(\pi_k, T) = \prod_{J_{k_r} \in \left\{\mathcal{J} \,:\, l_{k_r}^{opt} < u_{k_r}^{opt}\right\}} (u_{k_r}^{opt} - l_{k_r}^{opt}). \tag{11}$$

Доказательство. В силу теоремы 2 вместо задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ будем рассматривать задачу $1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U|\sum C_i$. Поскольку $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$, то по теореме 3 не существует ни одного требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$, которое не имеет условной оптимальности и одновременно не имеет отрезка оптимальности в перестановке π_k.

Поскольку каждое требование $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ не имеет условной оптимальности в перестановке π_k и для него существует не более одного отрезка оптимальности (замечание 1), то для каждого требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ выполняется равенство $\left[\widehat{p}_{k_r}^L, \widehat{p}_{k_r}^U\right] = \left[l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt} \right]$. Следовательно, в соответствии с определениями 1 и 2 область оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ для перестановки π_k совпадает с параллелепипедом оптимальности для той же перестановки π_k и представляет собой n-мерный параллелепипед $\times_{r=1}^{n} \left[l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt} \right] = \mathcal{OB}(\pi_k, T)$, объем которого равен $\prod_{J_{k_r} \in \{\mathcal{J} \,:\, l_{k_r}^{opt} < u_{k_r}^{opt}\}} (u_{k_r}^{opt} - l_{k_r}^{opt})$. Лемма 3 доказана.

На рис. 2 представлена перестановка $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_{10}\}$ для примера 2 задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$. Поскольку

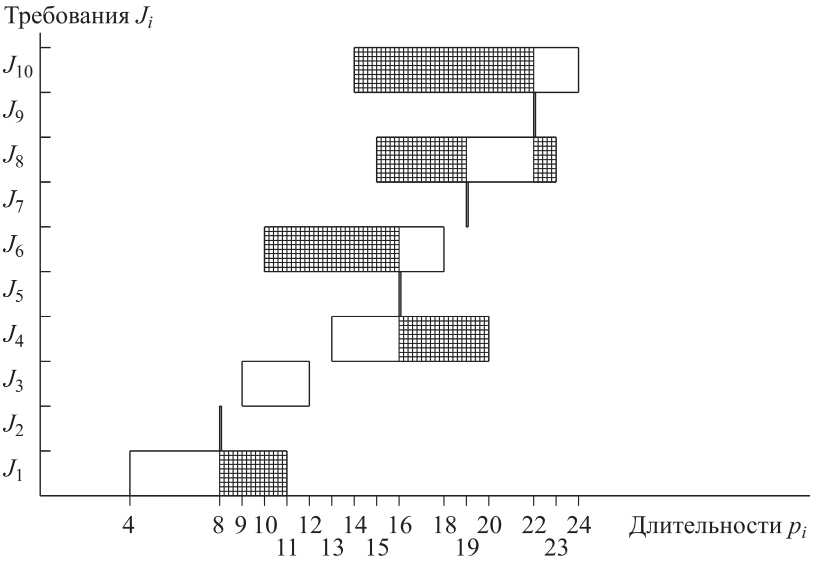


Рис. 2. Отрезки оптимальности и неоптимальности (заштрихованы) для требований $J_i \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ для примера 2 задачи $1|p_i^L \leqslant \leqslant p_i \leqslant p_i^U | \sum C_i$.

перестановка π_2 удовлетворяет условию леммы 3, то область оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_2, T)$ представляет собой следующий 10-мерный параллелепипед:

$$\mathcal{OR}(\pi_2, T) = \mathcal{OB}(\pi_2, T) = \left[l_1^{opt}, u_1^{opt}\right] \times \ldots \times \left[l_{10}^{opt}, u_{10}^{opt}\right] =$$
$$= [4, 8] \times [8, 8] \times [9, 12] \times [13, 16] \times [16, 16] \times [16, 18] \times$$
$$\times [19, 19] \times [19, 22] \times [22, 22] \times [22, 24],$$

объем которого вычисляется по формуле (11), а именно:

$$Vol(\pi_2, T) = \prod_{J_r \in \{\mathcal{J} \,:\, l_r^{opt} < u_r^{opt}\}} (u_r^{opt} - l_r^{opt}) =$$
$$= (8 - 4)(12 - 9)(16 - 13)(18 - 16)(22 - 19)(24 - 22) = 432.$$

В соответствии с теоремой 2 вместо задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U | \sum C_i$ будем рассматривать задачу $1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U | \sum C_i$ с множеством $\widehat{T}$ сокращенных сценариев.

Определение 3. Секцией перестановки $\pi_k \in \Pi$ называется максимальная по включению перестановка $s_v^{\pi_k} = (J_{k_v}, \ldots, J_{k_{v+m_v}})$, $1 \leqslant v \leqslant v + m_v \leqslant n$, такая что для любого числа $d \in \left(\widehat{p}_{k_v}^L, \widehat{p}_{k_{v+m_v}}^U\right)$ существует требование $J_{k_{v+i}}$, $i \in \{0, \ldots, m_v\}$, для которого $d \in \left(\widehat{p}_{k_{v+i}}^L, \widehat{p}_{k_{v+i}}^U\right)$. Отрезок $\left[\widehat{p}_{k_v}^L, \widehat{p}_{k_{v+m_v}}^U\right]$ называется охватом секции $s_v^{\pi_k}$.

Отметим, что множество $S(\pi_k) = \{s_v^{\pi_k}, \ldots, s_w^{\pi_k}\}$, $1 \leqslant v < \ldots < w \leqslant n$, всех секций каждой перестановки $\pi_k \in \Pi$ определено однозначно.

Замечание 2. Из определения 3 следует, что каждое требование $J_{k_i} \in \mathcal{J}$ либо содержится в единственной секции перестановки π_k, либо не содержится ни в одной секции перестановки π_k. Если существует хотя бы одно требование $J_{k_i} \in \mathcal{J}$, которое не содержится ни в одной секции перестановки π_k, то по теореме 3 получаем равенство $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = \emptyset$.

Из замечания 2 и доказательства теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Для того чтобы область оптимальности перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ *не была пустым множеством,* $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $\pi_k = (s_1^{\pi_k}, \ldots, s_w^{\pi_k})$.

Для перестановки $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ в примере 2, представленном на рис. 2, каждая секция состоит из единственного требования $s_1^{\pi_2} = (J_1)$, ..., $s_{10}^{\pi_2} = (J_{10})$ и выполняется равенство $\pi_2 = (s_1^{\pi_2}, \ldots, s_{10}^{\pi_2})$. Секцию, состоящую из единственного требования, будем называть тривиальной.

Для доказательства леммы 4 разобьем охват $\left[\widehat{p}_{k_j}^L, \widehat{p}_{k_{j+m_j}}^U\right]$ каждой секции $s_j^{\pi_k} \in S(\pi_k)$ на максимальные (по включению) подынтервалы условной оптимальности

$$
\begin{aligned}
(12) \quad \left[\widehat{p}_{k_j}^L, \widehat{p}_{k_{j+m_j}}^U\right] = \left[l_1^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_1^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right) \bigcup \ldots \bigcup \left[l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right) \bigcup \ldots \\
\ldots \bigcup \left[l_{n(j)}^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_{n(j)}^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right],
\end{aligned}
$$

которые отличаются один от другого тем, что для разных подмножеств $\mathcal{J}_i^j = \left\{J_{k_i}, \ldots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right\}$ множества $\left\{J_{k_j}, \ldots, J_{k_{j+m_j}}\right\}$, $j \leqslant i \leqslant j + m_j$, выполняются включения $\left[l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right] \subseteq \left[\widehat{p}_{k_r}^L, \widehat{p}_{k_r}^U\right]$ для всех требований $J_{k_r} \in \mathcal{J}_i^j$. Пусть $\widehat{J}_i^j = \left(J_{k_i}, \ldots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right)$ обозначает перестановку требований множества $\mathcal{J}_i^j = \left\{J_{k_i}, \ldots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right\}$.

Для иллюстрации введенных обозначений рассмотрим разбиения охватов секций $s_1^{\pi_2}$ и $s_8^{\pi_2}$ перестановки $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ в примере 3, представленном на рис. 3. Секция $s_1^{\pi_2}$ состоит из семи упорядоченных требований $s_1^{\pi_2} = (J_1, \ldots, J_7)$ и имеет охват $[\widehat{p}_1^L, \widehat{p}_7^U] = [4, 20]$. Получаем следующее разбиение (12): $[4, 20] = [4, 8) \cup [8, 9) \cup [9, 13) \cup [13, 16) \cup [16, 17) \cup [17, 18) \cup [18, 20]$ охвата $[\widehat{p}_1^L, \widehat{p}_7^U]$ на подынтервалы условной оптимальности. Здесь

$$
\begin{gathered}
\left[l_1^1(J_1, J_2), u_1^1(J_1, J_2)\right) = [4, 8); \quad \left[l_2^1(J_1, \ldots, J_4), u_2^1(J_1, \ldots, J_4)\right) = [8, 9); \\
\left[l_3^1(J_2, J_3, J_4), u_3^1(J_2, J_3, J_4)\right) = [9, 13); \quad \left[l_4^1(J_3, J_4), u_4^1(J_3, J_4)\right) = [13, 16); \\
\left[l_5^1(J_3, \ldots, J_6), u_5^1(J_3, \ldots, J_6)\right) = [16, 17); \\
\left[l_6^1(J_3, \ldots, J_7), u_6^1(J_3, \ldots, J_7)\right) = [17, 18]; \\
\left[l_7^1(J_4, \ldots, J_7), u_7^1(J_4, \ldots, J_7)\right] = [18, 20].
\end{gathered}
$$

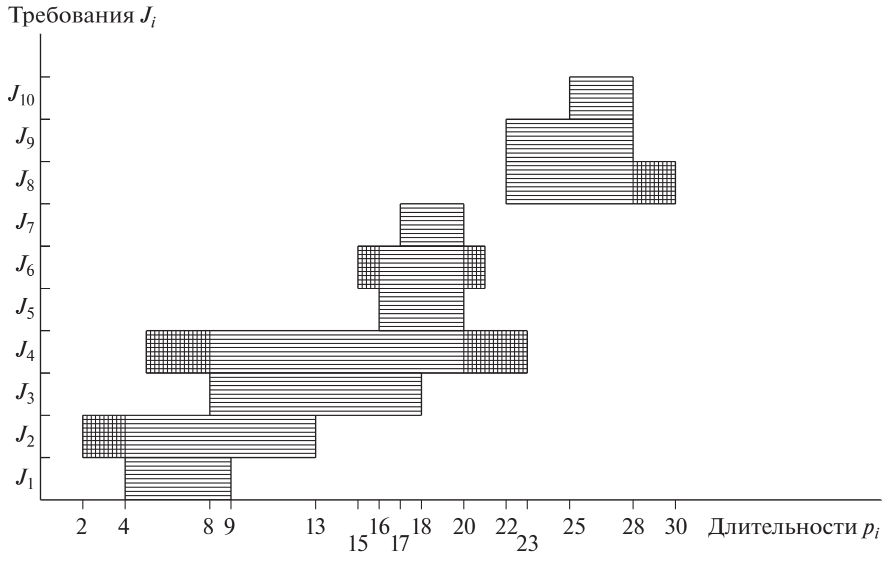


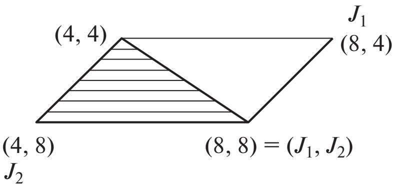
Рис. 3. Отрезки условной оптимальности (заштрихованы) и отрезки неоптимальности (заштрихованы дважды) для требований $J_i \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ для примера 3 задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U| \sum C_i$.

Отметим равенства $\widehat{J}_1^1 = (J_1, J_2)$, $\widehat{J}_2^1 = (J_1, \ldots, J_4)$, $\widehat{J}_3^1 = (J_2, J_3, J_4)$, $\widehat{J}_4^1 = (J_3, J_4)$, $\widehat{J}_5^1 = (J_3, \ldots, J_6)$, $\widehat{J}_6^1 = (J_3, \ldots, J_7)$, $\widehat{J}_7^1 = (J_4, \ldots, J_7)$. Секция $s_8^{\pi_2}$ состоит из трех требований $s_8^{\pi_2} = (J_8, J_9, J_{10})$ и имеет охват $[\widehat{p}_8^L, \widehat{p}_{10}^U] = [22, 28]$. Получаем разбиение $[22,28] = [22,25) \cup [25,28]$ охвата $[22,28]$ на подынтервалы условной оптимальности $[l_1^2(J_8, J_9), u_1^2(J_8, J_9))$ и $[l_2^2(J_8, J_9, J_{10}), u_2^2(J_8, J_9, J_{10})]$. Отметим равенства $\widehat{J}_1^2 = (J_8, J_9)$ и $\widehat{J}_2^2 = (J_8, J_9, J_{10})$.

Поскольку любая секция $s_j^{\pi_k} \in S(\pi_k)$ перестановки π_k и любое упорядоченное множество $\widehat{J}_i^j$ требований множества $\mathcal{J}_i^j \subseteq \mathcal{J}$ сами являются перестановками соответствующего подмножества требований множества $\mathcal{J}$, то для них можно рассматривать области оптимальности для всех тех требований, из которых состоят эти перестановки. Для обозначения таких областей оптимальности будем использовать те же обозначения $\mathcal{OR}(s_j^{\pi_k}, T)$ и $\mathcal{OR}(\widehat{J}_i^j, T)$, что и для области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ для перестановки $\pi_k \in \Pi$ всего множества требований $\mathcal{J}$. Для обозначения объемов областей оптимальности $\mathcal{OR}(s_j^{\pi_k}, T)$ и $\mathcal{OR}(\widehat{J}_i^j, T)$ будем использовать обозначения $Vol(s_j^{\pi_k}, T)$ и $Vol(\widehat{J}_i^j, T)$ соответственно.

Доказательство следующей леммы 4 приведено в Приложении. Там же дано определение d-мерной пирамиды оптимальности $Pir^{opt}\widehat{J}_i^j$, представляющей собой область оптимальности для перестановки требований $\mathcal{J}_i^j \subseteq \mathcal{J}$, т.е. показано, что выполняются равенства $d = |\mathcal{J}_i^j|$ и $\mathcal{OR}(\widehat{J}_i^j, T) = Pir^{opt}\widehat{J}_i^j$.

Л е м м а 4. *Если $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$ и каждое требование $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ не имеет отрезка оптимальности в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$, то область оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ для перестановки π_k представляет собой декар-*



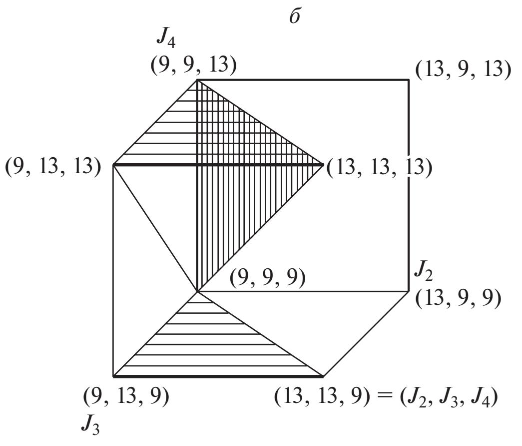


Рис. 4. (a) – Треугольник оптимальности $Pir^{opt}(J_1, J_2)$ с основанием $[(4,8),(8,8)]$ и высотой $[(4,8),(4,4)]$ для подынтервала условной оптимальности $[4,8)$ для перестановки $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ в примере 3. (b) – Пирамида оптимальности $Pir^{opt}(J_2, J_3, J_4)$ с основанием $[(9,9,13),(9,13,13),(13,13,13)]$ и высотой $[(9,9,13),(9,9,9)]$ для подынтервала условной оптимальности $[9,13)$ для перестановки π_2 в примере 3.

тово произведение $|S(\pi_k)|$ *областей оптимальности* $\mathcal{OR}(s_j^{\pi_k}, T)$ *всех секций* $S(\pi_k)$:

$$(13)\quad \mathcal{OR}\left(\pi_k, T\right) = \mathcal{OR}\left(s_1^{\pi_k}, T\right) \times \ldots \times \mathcal{OR}\left(s_j^{\pi_k}, T\right) \times \ldots \times \mathcal{OR}\left(s_{|S(\pi_k)|}^{\pi_k}, T\right),$$

где $\mathcal{OR}(s_j^{\pi_k}, T)$ *определяется как следующее объединение* d*-мерных пирамид оптимальности* $Pir^{opt}\widehat{J}_i^j$ *в пространстве* R^n, $d \in \left\{|\mathcal{J}_i^j|, \ldots, |\mathcal{J}_{n(j)}^j|\right\}$:

$$(14)\qquad \mathcal{OR}(s_j^{\pi_k}, T) = \bigcup_{i=1}^{n(j)} \mathcal{OR}(\widehat{J}_i^j, T) = \bigcup_{i=1}^{n(j)} Pir^{opt}\widehat{J}_i^j.$$

Объем области оптимальности для перестановки π_k *определяется равенством*

$$(15)\qquad Vol\left(\pi_k, T\right) = \prod_{j=1}^{|S(\pi_k)|} \sum_{i=1}^{n(j)} \frac{\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)^{|\mathcal{J}_i^j|}}{|\mathcal{J}_i^j|!}.$$

На рис. 3 представлена перестановка $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_{10}\}$ для примера 3 задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$. По теореме 3 область оптимальности для перестановки π_2 не является пустым множеством, и поскольку перестановка π_2 удовлетворяет условию леммы 4, то объем области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_2, T)$ вычисляется по формуле (15), а именно:

$$Vol(\pi_2, T) = \prod_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{n(j)} \frac{\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)^{|\mathcal{J}_i^j|}}{|\mathcal{J}_i^j|!} =$$

$$= \left[\frac{(8-4)^2}{2!} + \frac{(9-8)^4}{4!} + \frac{(13-9)^3}{3!} + \frac{(16-13)^2}{2!} + \frac{(17-16)^4}{4!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(18-17)^5}{5!} + \frac{(20-18)^4}{4!}\right]\left[\frac{(25-22)^2}{2!} + \frac{(28-25)^3}{3!}\right] =$$

$$= \left[\frac{16}{2} + \frac{1}{24} + \frac{64}{6} + \frac{9}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{16}{24}\right]\left[\frac{9}{2} + \frac{27}{6}\right] = 210\frac{33}{40}.$$

На рис. 4,a представлен указанный в равенстве (14) треугольник $Pir^{opt}\widehat{J}_1^1 = Pir^{opt}(J_1, J_2)$ для подынтервала условной оптимальности $[4, 8)$, принадлежащий области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_2, T)$ для перестановки $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ в примере 3, а на рис. 4,b представлена указанная в (14) 3-мерная пирамида $Pir^{opt}\widehat{J}_3^1 = Pir^{opt}(J_2, J_3, J_4)$ для подынтервала условной оптимальности $[9, 13)$, принадлежащая той же области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_2, T)$.

4.2. Объем области оптимальности для перестановки $\pi_k \in \Pi$ в общем случае

Пусть $S^*(\pi_k)$ обозначает подмножество тривиальных секций множества $S(\pi_k)$.

Отметим, что перестановка $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ в примере 2 удовлетворяет условию леммы 3 и все секции множества $S(\pi_2)$ являются тривиальными: $S(\pi_2) = S^*(\pi_2)$.

Перестановка $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ в примере 3 удовлетворяет условию леммы 4, и множество $S^*(\pi_2)$ ее тривиальных секций – пустое множество: $S^*(\pi_2) = \emptyset$.

Теорема 4. *Если $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$, то область оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ представляет собой декартово произведение* (13) *областей оптимальности секций $S(\pi_k)$ такое, что*

$$\mathcal{OR}\left(s_j^{\pi_k}, T\right) = \mathcal{OB}\left(s_j^{\pi_k}, T\right) = \left[l_{k_r}^{opt}, u_{k_r}^{opt}\right]$$

для каждой тривиальной секции $s_j^{\pi_k} = (J_{k_r})$ и

$$\mathcal{OR}(s_j^{\pi_k}, T) = \bigcup_{i=1}^{n(j)} \mathcal{OR}(\widehat{J}_i^j, T) = \bigcup_{i=1}^{n(j)} Pir^{opt}\widehat{J}_i^j$$

для каждой нетривиальной секции $s_j^{\pi_k} \in S(\pi_k) \setminus S^*(\pi_k)$. Объем области оптимальности равен

$$Vol(\pi_k, T) = \tag{16}$$

$$= \prod_{(J_{k_r}) \in \left\{ S^*(\pi_k)\,:\, l^{opt}_{k_r} < u^{opt}_{k_r} \right\}} \left(u^{opt}_{k_r} - l^{opt}_{k_r} \right) \prod_{s^{\pi_k}_j \in S(\pi_k) \setminus S^*(\pi_k)} \sum_{i=1}^{n(j)} \frac{\left(u^j_i \left(s^{\pi_k}_j \right) - l^j_i \left(s^{\pi_k}_j \right) \right)^{|\mathcal{J}^j_i|}}{|\mathcal{J}^j_i|!}.$$

Доказательство. В силу теоремы 2 вместо задачи $1|p^L_i \leqslant p_i \leqslant p^U_i|\sum C_i$ будем рассматривать задачу $1|\widehat{p}^L_i \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}^U_i|\sum C_i$. Поскольку $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$, то размерность области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ равна n (следствие 1). Из теоремы 3 следует, что не существует ни одного требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$, которое не имеет условной оптимальности и одновременно не имеет отрезка оптимальности в перестановке π_k.

Поскольку $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$, то из замечания 2 следует, что каждое требование $J_{k_i} \in \mathcal{J}$ содержится в единственной секции перестановки π_k. При этом согласно следствию 2 справедливо равенство $\pi_k = (s^{\pi_k}_1, \ldots, s^{\pi_k}_w)$.

На основе перечисленных свойств перестановки π_k покажем, как доказать равенство (13) и равенство (16) в результате последовательного применения леммы 3 или леммы 4 в частных случаях, когда очередная рассматриваемая перестановка состоит из единственной секции $s^{\pi_k}_v \in S(\pi_k)$ перестановки π_k.

Вначале рассмотрим первую секцию $s^{\pi_k}_1 = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_{1+m_1}})$ перестановки π_k. Если секция $s^{\pi_k}_1$ является тривиальной, т.е. $s^{\pi_k}_1 = (J_{k_1})$, то по лемме 3 получаем первый сомножитель $[l^{opt}_{k_1}, u^{opt}_{k_1}] = \mathcal{OR}(s^{\pi_k}_1, T)$ в искомом декартовом произведении (13) и первый сомножитель $(u^{opt}_{k_1} - l^{opt}_{k_1})$ в первом произведении равенства (16) при условии, что имеет место строгое неравенство $l^{opt}_{k_1} < u^{opt}_{k_1}$ (если $l^{opt}_{k_1} = u^{opt}_{k_1}$, то сомножитель $(u^{opt}_{k_1} - l^{opt}_{k_1}) = 0$ в равенство (16) не добавляется в соответствии с леммой 3).

Если же секция $s^{\pi_k}_1$ не является тривиальной, т.е.

$$s^{\pi_k}_1 \in S(\pi_k) \setminus S^*(\pi_k),$$

то по лемме 4 получаем первый сомножитель

$$\mathcal{OR}(s^{\pi_k}_1, T) = \bigcup_{i=1}^{n(1)} \mathcal{OR}(\widehat{J}^1_i, T) = \bigcup_{i=1}^{n(1)} Pir^{opt} \widehat{J}^1_i$$

в декартовом произведении (13) и первый сомножитель

$$\sum_{i=1}^{n(1)} \frac{(u^1_i(s^{\pi_k}_1) - l^1_i(s^{\pi_k}_1))^{|\mathcal{J}^1_i|}}{|\mathcal{J}^1_i|!}$$

во втором произведении равенства (16). Здесь необходимо отметить, что в разбиение (12) секции $s^{\pi_k}_1$ на подынтервалы условной оптимальности могут входить и подынтервалы $[l^1_i(s^{\pi_k}_1), u^1_i(s^{\pi_k}_1))$, для которых выполняется равенство $|\mathcal{J}^1_i| = 1$ (такая возможность в условии леммы 4 не предусмотрена). Покажем, однако, что равенство

$$\mathcal{OR}(\widehat{J}^j_i, T) = \frac{(u^j_i(s^{\pi_k}_j) - l^j_i(s^{\pi_k}_j))^{|\mathcal{J}^j_i|}}{|\mathcal{J}^j_i|!},$$

содержащееся в (16), справедливо и для случая $|\mathcal{J}_i^j| = 1$. Действительно, если $|\mathcal{J}_i^j| = 1$, то

$$\frac{\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)^{|\mathcal{J}_i^j|}}{|\mathcal{J}_i^j|!} = \frac{\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)^1}{1!} = \left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right),$$

что и требуется для выполнения равенства (16).

Аналогично рассмотрим вторую секцию $s_2^{\pi_k} = (J_{k_{m_1+1}}, \ldots, J_{k_{m_1+1+m_2}})$ перестановки π_k. Применяя лемму 3, если секция $s_2^{\pi_k}$ тривиальная, или лемму 4, если секция $s_2^{\pi_k}$ не является тривиальной, дополним уже построенную часть декартова произведения (13) вторым сомножителем и дополним вторым сомножителем одно (соответствующее) произведение из двух произведений равенства (16).

Продолжив описанный процесс вплоть до рассмотрения последней секции $s_w^{\pi_k}$ перестановки π_k и добавления соответствующих сомножителей, получим оба равенства (13) и (16). Теорема 4 доказана.

Следующий алгоритм вычисления объема $Vol(\pi_k, T)$ области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$ для перестановки $\pi_k \in \Pi$ основан на теоремах 2, 3 и 4.

Алгоритм 2.

ВХОД: Перестановка $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$, для которой $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$; отрезки $[\widehat{p}_i^L, \widehat{p}_i^U]$ длительностей обслуживания требований $J_i \in \mathcal{J}$.

ВЫХОД: Объем области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ для перестановки π_k.

Шаг 1: Определить множество секций $S(\pi_k) = \left\{s_1^{\pi_k}, s_{1+m_1}^{\pi_k}, \ldots, s_{j+m_j}^{\pi_k}, \ldots, s_w^{\pi_k}\right\}$;

Шаг 2: $j = 1,\ Vol = 1,\ Vol^* = 1,\ Sum = 0$;

Шаг 3: **IF** секция $s_j^{\pi_k} = (J_{k_j}, \ldots, J_{k_{j+m_j}})$ тривиальная $s_j^{\pi_k} = (J_{k_j})$ **THEN** **GOTO** шаг 7;

Шаг 4: **ELSE** для секции $s_j^{\pi_k} = (J_{k_j}, \ldots, J_{k_{j+m_j}})$ построить разбиение (12) охвата $\left[\widehat{p}_{k_j}^L, \widehat{p}_{k_{j+m_j}}^U\right]$ на подынтервалы условной оптимальности:

$$\left[l_1^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_1^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right) \bigcup \ldots \bigcup \left[l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right) \bigcup \ldots$$
$$\ldots \bigcup \left[l_{n(j)}^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_{n(j)}^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right];$$

Шаг 5: **FOR** $i = 1$ **to** $n(j)$ **DO** вычислить $OS = \frac{\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)^{|\mathcal{J}_i^j|}}{|\mathcal{J}_i^j|!}$; $Sum := Sum + OS$ **END FOR**

Шаг 6: $Vol := Vol \cdot Sum$, $j := j + m_j$ **IF** $j \leqslant w$ **THEN GOTO** шаг 3; **ELSE GOTO** шаг 10;

Шаг 7: $j := j + m_j$, $OS^* = u_{k_j}^{opt} - l_{k_j}^{opt}$ **IF** $u_{k_j}^{opt} > l_{k_j}^{opt}$ **THEN GOTO** шаг 9; **ELSE IF** $j \leqslant w$ **THEN GOTO** шаг 3;

Шаг 8: **ELSE GOTO** шаг 10;

Шаг 9: $Vol^* := Vol^* \cdot OS^*$ **IF** $j \leqslant w$ **THEN GOTO** шаг 3 **ELSE**

Шаг 10: $Vol(\pi_k, T) = Vol \cdot Vol^*$ **STOP**.

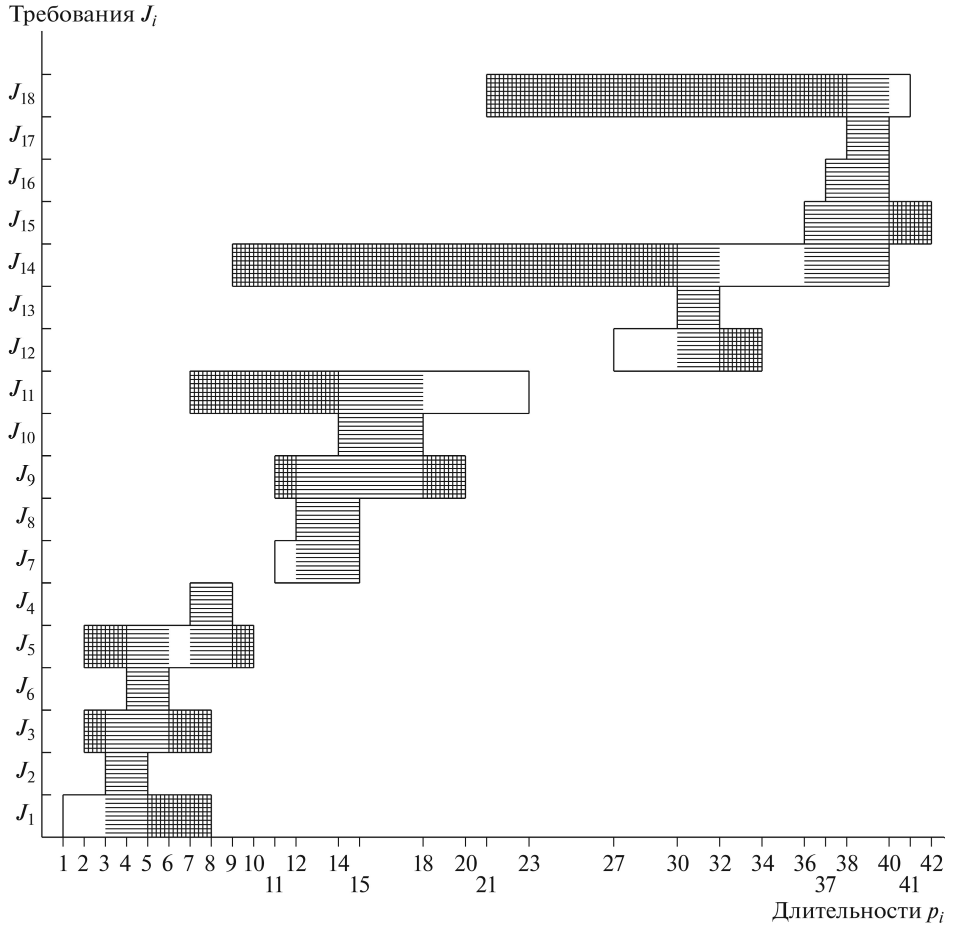


Рис. 5. Отрезки оптимальности, условной оптимальности (заштрихованы) и отрезки неоптимальности (заштрихованы дважды) для требований $J_i \in \mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_{18}\}$ в перестановке $\pi_3 = (J_1, \ldots, J_3, J_6, J_5, J_4, J_7, \ldots, J_{18})$ для примера 1.

Для реализации шага 1 требуется $O(n)$ операций. Выполнение шагов 3–6 требует $O(n^2)$ операций. Выполнение шагов 7–9 требует $O(n)$ операций. Всему алгоритму 2 требуется выполнить $O(n^2)$ операций для вычисления объема $Vol(\pi_k, T)$ области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ для фиксированной перестановки $\pi_k \in \Pi$.

На рис. 5 представлена перестановка $\pi_3 = (J_1, \ldots, J_3, J_6, J_5, J_4, J_7, \ldots, J_{18})$ требований множества $\mathcal{J} = \{J_1, \ldots, J_{18}\}$ для примера 3 задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$. По теореме 3 область оптимальности для перестановки π_3 не пустая, поэтому вычислим ее объем по формуле (16) из теоремы 4, учитывая равенство $S^*(\pi_3) = \emptyset$.

$$Vol(\pi_3, T) = \prod_{s_j^{\pi_3} \in S(\pi_3)} \sum_{i=1}^{n(j)} \frac{(u_i^j(s_j^{\pi_3}) - l_i^j(s_j^{\pi_3}))^{|\mathcal{J}_i^j|}}{|\mathcal{J}_i^j|!} =$$

$$= \left[\frac{(3-1)^1}{1!} + \frac{(4-3)^3}{3!} + \frac{(5-4)^5}{5!} + \frac{(6-5)^3}{3!} + \frac{(7-6)^1}{1!} + \frac{(9-7)^2}{2!}\right] \times$$
$$\times \left[\frac{(12-11)^1}{1!} + \frac{(14-12)^3}{3!} + \frac{(15-14)^5}{5!} + \frac{(18-15)^3}{3!} + \frac{(23-18)^1}{1!}\right] \times$$
$$\times \left[\frac{(30-27)^1}{1!} + \frac{(32-30)^3}{3!} + \frac{(36-32)^1}{1!} + \frac{(37-36)^2}{2!} + \frac{(38-37)^3}{3!} + \right.$$
$$\left. + \frac{(40-38)^5}{5!} + \frac{(41-40)^1}{1!}\right] = \left[\frac{2}{1} + \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1} + \frac{4}{2}\right] \times$$
$$\times \left[\frac{1}{1} + \frac{8}{6} + \frac{1}{120} + \frac{27}{6} + \frac{5}{1}\right] \times \left[\frac{3}{1} + \frac{8}{6} + \frac{4}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{32}{120} + \frac{1}{1}\right] = 657{,}85.$$

5. Перестановка π_k с максимальной областью оптимальности

Если существует одноэлементное доминирующее множество $\{\pi_k\}$ для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$, то перестановка π_k обслуживания требований множества $\mathcal{J}$ является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ при любом сценарии $p \in T$. В соответствии с определением 2 для такой перестановки π_k должно выполняться равенство $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = T$.

5.1. Максимально возможная область оптимальности для заданных сценариев

Докажем необходимые и достаточные условия для существования перестановки $\pi_k \in \Pi$ с максимально возможной областью оптимальности для заданного множества сценариев T, т.е. докажем критерий существования перестановки π_k, для которой справедливо равенство $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = T$.

Теорема 5. *Область оптимальности для перестановки $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots \ldots, J_{k_n}) \in \Pi$ является максимально возможной для заданного множества сценариев T, т.е. $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = T$, тогда и только тогда, когда в перестановке π_k для каждого требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ выполняется следующее равенство:*

$$\left[l_{k_s}^{opt}, u_{k_s}^{opt}\right] = \left[p_{k_s}^L, p_{k_s}^U\right]. \tag{17}$$

Доказательство.

Достаточность. Пусть равенство (17) выполняется для каждого требования $J_{k_s} \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \ldots, J_{k_n})$. Тогда по определению 1 должны выполняться и равенства $\mathcal{OB}(\pi_k, T) = \times_{k_{i_r} \in M} \left[l_{k_{i_r}}^{opt}, u_{k_{i_r}}^{opt}\right] = \times_{k_{i_r} \in M} \left[p_{k_{i_r}}^L, p_{k_{i_r}}^U\right] = T$, такие что множество $M = (k_{i_1}, \ldots, k_{i_{|M|}})$, $k_{i_1} < \ldots \ldots < k_{i_{|M|}}$, представляет собой упорядоченное множество $\{k_1, \ldots, k_n\} = \{1, \ldots, n\}$, для которого $n = |M|$. Из определения 1 следует, что перестановка π_k является оптимальной для задачи $1|p'|\sum C_i$ при любом сценарии $p' \in \mathcal{OB}(\pi_k, T) = T$. Согласно определению 2 получаем равенство $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = T$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть справедливо равенство $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = T$. Однако предположим (от противного), что существует требование $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \dots, J_{k_n}) \in \Pi$ такое, что равенство (17) не выполняется.

Тогда в силу леммы 1 существует непустой отрезок неоптимальности $[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}]$ или (и) существует непустой отрезок условной оптимальности $[l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}]$ для требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ в перестановке $\pi_k = (J_{k_1}, \dots, J_{k_n})$.

Если существует отрезок неоптимальности $[l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}]$, то выполняется равенство (5). Если же существует отрезок условной оптимальности $[l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}]$, то выполняется равенство (7). В обоих случаях существует сценарий $p^* \in (l_{k_r}^{non}, u_{k_r}^{non}) \bigcup (l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}) \subseteq T$ такой, что перестановка π_k не является оптимальной для задачи $1|p^*|\sum C_i$ со сценарием $p^* \in T$. Следовательно, в соответствии с определением 2 получаем соотношение $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq T$, противоречащее предположению о том, что равенство $\mathcal{OR}(\pi_k, T) = T$ выполняется. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Из теоремы 5 и следствия 1 получаем следующее утверждение.

С л е д с т в и е 3. *Если для каждого требования* $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ *в перестановке* $\pi_k = (J_{k_1}, \dots, J_{k_n})$ *выполняется равенство* (17), *то область оптимальности* $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$ *является* n*-мерным параллелепипедом* $T \subset R_+^n$ *с объемом* $Vol(\pi_k, T) = \prod_{J_i \in \{\mathcal{J}\,:\, p_i^L < p_i^U\}} (p_i^U - p_i^L)$.

Перестановка $\pi_k = (J_{k_1}, \dots, J_{k_n})$, для которой равенства (17) выполняются для всех требований $J_{k_r} \in \mathcal{J}$, является оптимальной для задачи $1|p|\sum C_i$ с любым допустимым сценарием $p \in T$. Следовательно, множество $\{\pi_k\}$ является минимальным доминирующим множеством для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$.

5.2. Как использовать перестановку с максимальной областью оптимальности

Оптимальная для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ перестановка π_k, критерий существования которой представлен в теореме 5 и следствии 3, встречается на практике довольно редко. Однако для конкретной задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$, возникающей на практике, как правило, одна перестановка должна быть выбрана из множества Π и затем реализована при обслуживании требований множества $\mathcal{J}$.

На основе доказанных в разделах 3–5.1 результатов можно рекомендовать выбирать для реализации такую перестановку π_t обслуживания требований множества $\mathcal{J}$, для которой объем области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_t, T)$ является максимальным среди всех перестановок множества Π. Если окажется, что фактический сценарий $p \in T$ обслуживания требований $\mathcal{J}$ будет принадлежать области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_t, T)$, то реализованная перестановка π_t будет оптимальной для фактического сценария обслуживания требований $\mathcal{J}$. Вообще говоря, чем больше объем области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_k, T)$, тем больше вероятность того, что перестановка π_k будет оптимальной для фактического сценария обслуживания требований $\mathcal{J}$. Поэтому важными задачами для дальнейших исследований представляются разработка эффективных алгоритмов построения перестановки π_t с максимальным объемом $Vol^{\max}(\pi_t, T) = \max\{ Vol^{\max}(\pi_k, T) : \pi_k \in \Pi\}$ области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_t, T)$ и тестирование таких алгоритмов на задачах $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ практической размерности.

В общем случае задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ разность

$$1 - \frac{Vol^{\max}(\pi_k, T)}{\prod_{J_i \in \{\mathcal{J}:\, l_i^{opt} < u_i^{opt}\}} (p_i^U - p_i^L)} =: \mu$$

можно рассматривать как меру неопределенности (или меру сложности) задачи. В частности, если $\mu = 0$, то имеется гарантия того, что перестановка π_t с максимальным объемом $Vol^{\max}(\pi_t, T)$ области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_t, T)$ будет оптимальной для фактического сценария обслуживания требований множества $\mathcal{J}$, несмотря на неопределенность заданных сценариев T. Наоборот, если значение μ равно единице (или близко к единице), то вероятность того, что перестановка π_t будет оптимальной для фактического сценария обслуживания требований множества $\mathcal{J}$, равна нулю (близка к нулю). В таких случаях для решения неопределенной задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ можно рекомендовать использование приближенных алгоритмов таких, как алгоритм U2, описанный в [1], или описанный в [10] алгоритм 3, который ориентирован на достижение наименьшей погрешности полученного решения.

6. Заключение

Задачи составления расписаний обслуживания требований с неопределенными числовыми данными на одном приборе возникают, например, при планировании рабочего времени работника на определенный период времени (рабочий день, неделю или месяц). Как правило, можно заранее оценить диапазоны возможных длительностей планируемых работ. Можно предполагать, что множество планируемых работ существенно не меняется в ходе реализации расписания. Критерий минимизации суммы моментов завершения обслуживания требований (среднего времени обслуживания требований) можно рассматривать как суммарный показатель эффективности выполнения работником заданного множества работ.

В [27] описан другой пример задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$, возникающей при поиске оптимального расписания доставки продукции от изготовителя в торговую сеть города при использовании одного транспортного средства. Время доставки продукции в магазин зависит от множества факторов таких, как автомобильные пробки, погодные условия, состояние транспортного средства и дорожного покрытия.

Задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ могут возникать и в некоторых многостадийных обслуживающих системах, если один обслуживающий прибор является "узким местом" производственного процесса и для длительностей обслуживания требований на этом приборе известны только границы возможных значений.

Полученные в разделах 3–5 результаты и алгоритмы 1 и 2 можно использовать при построении перестановки $\pi_t \in \Pi$ обслуживания заданных требований с наибольшим объемом $Vol^{\max}(\pi_t, T)$ области оптимальности $\mathcal{OR}(\pi_t, T)$.

Использование перестановки π_t для обслуживания заданных требований позволяет повысить вероятность получения фактически оптимального расписания, несмотря на то, что законы распределения вероятностей случайных длительностей обслуживания требований не известны при построении расписания для задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При доказательстве леммы 4 будем рассматривать задачу

$$1|\widehat{p}_i^L \leqslant p_i \leqslant \widehat{p}_i^U|\sum C_i$$

вместо задачи $1|p_i^L \leqslant p_i \leqslant p_i^U|\sum C_i$ (теорема 2). Поскольку $\mathcal{OR}(\pi_k, T) \neq \emptyset$, то согласно теореме 3 не существует ни одного требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$, которое не имеет условной оптимальности и одновременно не имеет отрезка оптимальности в перестановке π_k. По условию леммы 4 каждое требование $J_{k_r} \in \mathcal{J}$ не имеет отрезка оптимальности в перестановке π_k.

Учитывая замечание 1 и лемму 1, получаем равенство

$$\left[\widehat{p}_{k_r}^L,\ \widehat{p}_{k_r}^U\right] = [l_{k_r}^{copt}, u_{k_r}^{copt}],$$

которое выполняется для каждого требования $J_{k_r} \in \mathcal{J}$. Из полученного равенства следует, что множество $S(\pi_k)$ секций перестановки π_k не содержит ни одной тривиальной секции. Построим разбиение (12) охватов $\left[\widehat{p}_{k_j}^L,\ \widehat{p}_{k_{j+m_j}}^U\right]$ всех секций $s_j^{\pi_k} \in S(\pi_k)$ на следующие подынтервалы условной оптимальности:

$$\left[l_1^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_1^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)\bigcup \dots \bigcup\left[l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)\bigcup \dots$$
$$\dots\bigcup\left[l_{n(j)}^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_{n(j)}^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right] = \left[\widehat{p}_{k_j}^L,\ \widehat{p}_{k_{j+m_j}}^U\right].$$

Далее методом математической индукции по мощности $|\mathcal{J}_i^j|$ множества $\mathcal{J}_i^j$ докажем, что для каждого подынтервала $\left[l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)$ условной оптимальности в построенном разбиении (12) выполняются следующие равенства:

$$Vol\left(\widehat{J}_i^j, T\right) = \frac{\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)^{|\mathcal{J}_i^j|}}{|\mathcal{J}_i^j|!}, \tag{П.1}$$

$$\mathcal{OR}\left(\widehat{J}_i^j, T\right) = Pir^{opt}\widehat{J}_i^j = Pir^{opt}\left(J_{k_i}, \dots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right), \tag{П.2}$$

где основанием $|\mathcal{J}_i^j|$-мерной пирамиды $Pir^{opt}\widehat{J}_i^j = Pir^{opt}\left(J_{k_i}, \dots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right)$ является $(|\mathcal{J}_i^j| - 1)$-мерная пирамида, а длина высоты всех пирамид равна $\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)$.

Покажем вначале, что при $|\mathcal{J}_i^j| = 2$ пирамида $Pir^{opt}\widehat{J}_i^j = Pir^{opt}(J_{k_i}, J_{k_{i+1}})$ превращается в треугольник (как вырожденный случай пирамиды) с основанием $\left[l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right]$ и высотой той же длины $\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)$, что и длина основания треугольника. Такой треугольник $Pir^{opt}\widehat{J}_1^1 = Pir^{opt}(J_1, J_2)$ представлен на рис. 4,a для подынтервала

$$[4, 8) = \left[l_1^1(J_1, J_2),\, u_1^1(J_1, J_2)\right)$$

условной оптимальности для перестановки $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10}) \in \Pi$ для примера 3. Из теоремы 1 следует, что для того, чтобы порядок $(J_{k_i}, J_{k_{i+1}}) = \widehat{J}_i^j$ двух требований был оптимальным в перестановке $\pi_k \in \Pi$, необходимо и достаточно, чтобы длительности p_{k_i} и $p_{k_{i+1}}$ требований J_{k_i} и $J_{k_{i+1}}$ удовлетворяли неравенству $p_{k_i} \leqslant p_{k_{i+1}}$, а с учетом принадлежности допустимого сценария $(p_{k_1}, \ldots, p_{k_n})$ заданному множеству T допустимые длительности p_{k_i} и $p_{k_{i+1}}$ должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\text{(П.3)} \qquad \begin{cases} p_{k_i} \leqslant p_{k_{i+1}}, \\ p_{k_i}^L \leqslant p_{k_i} \leqslant p_{k_i}^U, \\ p_{k_{i+1}}^L \leqslant p_{k_{i+1}} \leqslant p_{k_{i+1}}^U. \end{cases}$$

Система (П.3) определяет треугольник $Pir^{opt}\widehat{J}_i^j = Pir^{opt}(J_{k_i}, J_{k_{i+1}})$. Иными словами, системе (П.3) удовлетворяют все точки, принадлежащие треугольнику $Pir^{opt}\widehat{J}_i^j$, и только они. Таким образом, равенство (П.2) доказано для случая $|\mathcal{J}_i^j| = 2$. Поскольку площадь треугольника $Pir^{opt}\widehat{J}_i^j$ равна произведению основания на половину высоты: $\frac{(u_i^j(s_j^{\pi_k}) - l_i^j(s_j^{\pi_k}))^2}{2}$, то и равенство (П.1) доказано для случая $|\mathcal{J}_i^j| = 2$.

Рассмотрим следующее по мощности множество $\mathcal{J}_i^j$, т.е. $|\mathcal{J}_i^j| = 3$, и покажем, что в этом случае область оптимальности

$$\mathcal{OR}(\widehat{J}_i^j, T) = \mathcal{OR}((J_{k_i}, J_{k_{i+1}}, J_{k_{i+2}}), T)$$

представляет собой 3-мерную пирамиду $Pir^{opt}\widehat{J}_i^j$, длина высоты которой равна $\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)$ и основанием которой является треугольник с высотой той же длины $\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right) - l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)$ и с основанием $\left[l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right]$. Отметим, что такая пирамида оптимальности $Pir^{opt}\widehat{J}_1^1 = Pir^{opt}(J_2, J_3, J_4)$ представлена на рис. 4,b для подынтервала

$$[9, 13) = \left[l_3^1(J_2, J_3, J_4),\, u_3^1(J_2, J_3, J_4)\right)$$

условной оптимальности для перестановки $\pi_2 = (J_1, \ldots, J_{10})$ для примера 3. Из теоремы 1 следует, что для того, чтобы порядок $(J_{k_i}, J_{k_{i+1}}, J_{k_{i+2}}) = \widehat{J}_i^j$ трех требований был оптимальным в перестановке $\pi_k \in \Pi$, необходимо и достаточно, чтобы длительности p_{k_i}, $p_{k_{i+1}}$ и $p_{k_{i+2}}$ требований J_{k_i}, $J_{k_{i+1}}$ и $J_{k_{i+2}}$

удовлетворяли неравенствам $p_{k_i} \leqslant p_{k_{i+1}} \leqslant p_{k_{i+2}}$, а с учетом принадлежности допустимого сценария $(p_{k_1}, \ldots, p_{k_n})$ заданному множеству T длительности p_{k_i}, $p_{k_{i+1}}$ и $p_{k_{i+2}}$ должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$
\begin{cases} p_{k_i} \leqslant p_{k_{i+1}} \leqslant p_{k_{i+2}}, \\ p^L_{k_i} \leqslant p_{k_i} \leqslant p^U_{k_i}, \\ p^L_{k_{i+1}} \leqslant p_{k_{i+1}} \leqslant p^U_{k_{i+1}}, \\ p^L_{k_{i+2}} \leqslant p_{k_{i+2}} \leqslant p^U_{k_{i+2}}. \end{cases} \tag{П.4}
$$

Система (П.4) определяет 3-мерную пирамиду

$$
Pir^{opt}\widehat{J}^j_i = Pir^{opt}(J_{k_i},\ J_{k_{i+1}},\ J_{k_{i+2}}),
$$

основанием которой является треугольник

$$
\left[\left(p^L_{k_i},\ p^L_{k_{i+1}},\ p^U_{k_{i+2}}\right),\ \left(p^L_{k_i},\ p^U_{k_{i+1}},\ p^U_{k_{i+2}}\right),\ \left(p^U_{k_i},\ p^U_{k_{i+1}},\ p^U_{k_{i+2}}\right)\right],
$$

а высотой – отрезок

$$
\left[\left(p^L_{k_i},\ p^L_{k_{i+1}},\ p^U_{k_{i+2}}\right),\ \left(p^L_{k_i},\ p^L_{k_{i+1}},\ p^L_{k_{i+2}}\right)\right].
$$

Следовательно, системе (П.4) удовлетворяют все точки пирамиды $Pir^{opt}\widehat{J}^j_i = Pir^{opt}(J_{k_i}, J_{k_{i+1}}, J_{k_{i+2}})$ и только они. Таким образом, равенство (П.2) доказано и для случая $|\mathcal{J}^j_i| = 3$. Поскольку объем 3-мерной пирамиды $Pir^{opt}\widehat{J}^j_i$ равен произведению площади основания, т.е. площади треугольника

$$
\left[\left(p^L_{k_i}, p^L_{k_{i+1}}, p^U_{k_{i+2}}\right), \left(p^L_{k_i}, p^U_{k_{i+1}}, p^U_{k_{i+2}}\right), \left(p^U_{k_i}, p^U_{k_{i+1}}, p^U_{k_{i+2}}\right)\right]
$$

на треть высоты:

$$
\frac{\left(u^j_i\left(s^{\pi_k}_j\right) - l^j_i\left(s^{\pi_k}_j\right)\right)^2}{2} \frac{\left(u^j_i\left(s^{\pi_k}_j\right) - l^j_i\left(s^{\pi_k}_j\right)\right)}{3} =
$$

$$
= \frac{\left(u^j_i\left(s^{\pi_k}_j\right) - l^j_i\left(s^{\pi_k}_j\right)\right)^3}{3!} = Vol\left(\widehat{J}^j_i, T\right),
$$

то равенство (П.1) доказано и для случая $|\mathcal{J}^j_i| = 3$.

Сделаем индуктивное предположение, т.е. предположим, что оба равенства (П.1) и (П.2) выполняются в случае $|\mathcal{J}^j_i| = d$, т.е. область оптимальности $\mathcal{OR}(\widehat{J}^j_i, T)$ представляет собой d-мерную пирамиду $Pir^{opt}\widehat{J}^j_i = Pir^{opt}(J_{k_i}, \ldots, J_{k_t})$, основанием которой является $(d-1)$-мерная пирамида, а $(u^j_i(s^{\pi_k}_j) - l^j_i(s^{\pi_k}_j))$ – это длина высоты каждой из этих пирамид. Покажем, что на основе индуктивного предположения можно получить равенства (П.1) и (П.2) для случая $|\mathcal{J}^j_i| = d + 1$.

Рассмотрим подынтервал $\left[l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right), u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)$ условной оптимальности, для которого

$$\widehat{J}_i^j = \left(J_{k_i}, \ldots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right) \quad \text{и} \quad |\mathcal{J}_i^j| = d+1.$$

Из индуктивного предположения следует, что для множества требований $\mathcal{J}_i^j \setminus \left\{J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right\}$ оба равенства (П.1) и (П.2) выполняются, и область оптимальности $\mathcal{OR}\left(\left(J_{k_i}, \ldots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}\right), T\right)$ представляет собой d-мерную пирамиду

$$Pir^{opt}\left(J_{k_i}, \ldots, J_{k_t}\right) = \mathcal{OR}\left(\left(J_{k_i}, \ldots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}\right), T\right).$$

Следовательно, по теореме 1 для того, чтобы порядок обслуживания требований $\left(J_{k_i}, \ldots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}\right)$ был оптимальным в перестановке $\pi_k \in \Pi$, необходимо и достаточно, чтобы длительности $p_{k_i}, \ldots, p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}$ требований $J_{k_i}, \ldots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}$ удовлетворяли следующей системе неравенств:

$$\text{(П.5)} \qquad \begin{cases} p_{k_i} \leqslant \ldots \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}, \\ p_{k_i}^L \leqslant p_{k_i} \leqslant p_{k_i}^U, \\ \ldots \\ p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}^L \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}} \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}^U. \end{cases}$$

Добавив к системе (П.5) неравенства

$$p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}} \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}} \quad \text{и} \quad p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}^L \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}} \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}^U,$$

получим следующую систему неравенств:

$$\text{(П.6)} \qquad \begin{cases} p_{k_i} \leqslant \ldots \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}, \\ p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}} \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}, \\ p_{k_i}^L \leqslant p_{k_i} \leqslant p_{k_i}^U, \\ \ldots \\ p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}^L \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}} \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}^U, \\ p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}^L \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}} \leqslant p_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}^U, \end{cases}$$

которая определяет $(d+1)$-мерную пирамиду

$$Pir^{opt}\widehat{J}_i^j = Pir^{opt}\left(J_{k_i}, \ldots, J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right),$$

основанием которой является d-мерная пирамида $Pir^{opt}\left(J_{k_i},\ldots,J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}\right)$, а разность $\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)-l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)$ равна длине высоты каждой из двух пирамид.

Из сделанного предположения и теоремы 1 следует, что область оптимальности $\mathcal{OR}\left(\left(J_{k_i},\ldots,J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right),T\right)$ представляет собой $(d+1)$-мерную пирамиду $Pir^{opt}\left(J_{k_i},\ldots,J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right)=\mathcal{OR}\left(\left(J_{k_i},\ldots,J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|}}\right),T\right)$. Следовательно, равенство (П.2) установлено и для случая $|\mathcal{J}_i^j|=d+1$. Поскольку объем $(d+1)$-мерной пирамиды $Pir^{opt}\widehat{J}_i^j$ равен произведению объема основания, т.е. объема d-мерной пирамиды $Pir^{opt}\left(J_{k_i},\ldots,J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}\right)=\mathcal{OR}\left(\left(J_{k_i},\ldots,J_{k_{|\mathcal{J}_i^j|-1}}\right),T\right)$ на высоту, деленную на $(d+1)$:

$$\frac{\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)-l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)^d}{d!}\frac{\left(u_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)-l_i^j\left(s_j^{\pi_k}\right)\right)}{d+1}=$$
$$=\frac{(u_i^j(s_j^{\pi_k})-l_i^j(s_j^{\pi_k}))^{d+1}}{(d+1)!}=Vol(\widehat{J}_i^j,T),$$

то равенство (П.1) установлено и для случая $|\mathcal{J}_i^j|=d+1$. Таким образом, равенства (П.1) и (П.2) доказаны методом математической индукции.

Равенство (14) следует из равенства (П.2) и того, что при любом сценарии $p\in T$ длительность каждого требования $J_i\in\mathcal{J}$ принимает единственное значение p_i. Равенство (13) следует из замечания 2 и равенства (14). Равенство (15) следует из равенств (13), (14) и (П.1). Лемма 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Allahverdi A., Aydilek H., Aydilek A.* Single machine scheduling problem with interval processing times to minimize mean weighted completion times // Comput. Oper. Res. 2014. V. 51. P. 200–207.
2. *Goren S., Sabuncuoglu I.* Robustness and stability measures for scheduling: single-machine environment // IIE Transact. 2008. V. 40. P. 66–83.
3. *Pereira J.* The robust (minmax regret) single machine scheduling with interval processing times and total weighted completion time objective // Comput. Oper. Res. 2016. V. 66. P. 141–152.
4. *Lu C.-C., Lin S.-W., Ying K.-C.* Robust scheduling on a single machine total flow time // Comput. Oper. Res. 2012. V. 39. P. 1682–1691.
5. *Sotskov Y.N., Werner F.* Sequencing and Scheduling with Inaccurate Data. N.Y., USA: Nova Science Publishers, Hauppauge, 2014.
6. *Braun O., Lai T.C., Schmidt G., Sotskov Y.N.* Stability of Johnson's schedule with respect to limited machine availability // Int. J. Product. Res. 2002. V. 40. No. 17. P. 4381–4400.
7. *Davis W., Jones A.* A real-time production scheduler for a stochastic manufacturing environment // Int. J. Product. Res. 1988. V. 1. No. 2. P. 101–112.

8. *Grabot B., Geneste L.* Dispatching rules in scheduling: a fuzzy approach // Int. J. Product. Res. 1994. V. 32. No. 4. P. 903–915.
9. *Kasperski A., Zielinski P.* Possibilistic minmax regret sequencing problems with fuzzy parameters // IEEE Transact. Fuzzy Syst. 2011. V. 19. P. 1072–1082.
10. *Sotskov Y.N., Egorova N.G.* Single machine scheduling problem with interval processing times and total completion time objective // Algorithms. 2018. V. 11. No. 66. P. 21–40.
11. *Sotskov Y.N., Lai T.-C.* Minimizing total weighted flow time under uncertainty using dominance and a stability box // Comput. Oper. Res. 2012. V. 39. No. 6. P. 1271–1289.
12. *Lai T.-C., Sotskov Y.N., Egorova N.G., Werner F.* The optimality box in uncertain data for minimising the sum of the weighted job completion times // Int. J. Product. Res. 2018. V. 56. No. 19. P. 6336–6362.
13. *Сотсков Ю.Н., Егорова Н.Г.* Многогранники устойчивости оптимальной перестановки обслуживания требований // АиТ. 2014. № 7. С. 136–154.

    Sotskov Y.N., Egorova N.G. Stability polyhedra of optimal permutation of jobs servicing // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 7. P. 1267–1282.
14. *Sotskov Y.N., Lai T.-C., Werner, F.* Measures of problem uncertainty for scheduling with interval processing times // OR Spectrum. 2013. V. 35. P. 659–689.
15. *Sotskov Y.N., Egorova N.G., Lai T.-C.* Minimizing total weighted flow time of a set of jobs with interval processing times // Math. Comput. Modell. 2009. V. 50. P. 556–573.
16. *Lai T.-C., Sotskov Y.N., Sotskova N., Werner F.* Optimal makespan scheduling with given bounds of processing times // Math. Comput. Modell. 1997. V. 26. No. 3. P. 67–86.
17. *Сотсков Ю.Н., Егорова Н.Г., Вернер Ф.* Минимизация суммарного взвешенного времени обслуживания требований с неопределенными данными: метод, основанный на устойчивости // АиТ. 2010. № 10. С. 26–49.

    Sotskov Y.N., Egorova N.G., Werner F. Minimizing total weighted completion time with uncertain data: a stability approach // Automat. Remote Control. 2010. V. 71. No. 10. P. 2038–2057.
18. *Pinedo M.* Scheduling: Theory, Algorithms and Systems. N.J., USA: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 2002.
19. *Graham R.E., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.* Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey // Ann. Discret. Math. 1979. V. 5. P. 287–326.
20. *Smith W.* Various optimizers for single-stage production // Naval Res. Logist. Quarterly. 1956. V. 3. No. 1. P. 59–66.
21. *Kouvelis P., Yu G.* Robust Discrete Optimization and its Application. Boston, USA: Kluwer Academ. Publish., 1997.
22. *Burdett R.L., Kozan E.* Techniques to effectively buffer schedules in the face of uncertainties // Comput. Industr. Engineer. 2015. V. 87. P. 16–29.
23. *Kasperski A., Zielinski P.* A 2-approximation algorithm for interval data minmax regret sequencing problems with total flow time criterion // Oper. Res. Lett. 2008. V. 36. P. 343–344.
24. *Daniels R.L., Kouvelis P.* Robust scheduling to hedge against processing time uncertainty in single stage production // Management Sci. 1995. V. 41. No. 2. P. 363–376.

25. *Yang J., Yu G.* On the robust single machine scheduling problem // J. Combinat. Optim. 2002. V. 6. P. 17–33.

26. *Harikrishnan K.K., Ishii H.* Single machine batch scheduling problem with resource dependent setup and processing time in the presence of fuzzy due date // Fuzzy Optim. Decision Making. 2005. V. 4. P. 141–147.

27. *Sotskov Y.N., Egorova N.G.* Single-machine scheduling with uncertain durations for optimizing service logistics with one truck // EURO Mini-conf. Logist. Anal., June 18–19, 2018, Minsk, Belarus. 29 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 03.07.2019

После доработки 14.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019