Автоматика и телемеханика, № 5, 2020

© 2020 г. Я. ЗИНДЕР (yakov.zinder@uts.edu.au)
(Технологический университет, Сидней, Австралия),
А.А. ЛАЗАРЕВ, д-р физ.-мат. наук (jobmath@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва),
Е.Г. МУСАТОВА, канд. физ.-мат. наук (nekolyap@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

КОРРЕКТИРОВКА РАСПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НА ЧАСТИЧНО ЗАБЛОКИРОВАННОМ СЕГМЕНТЕ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ С РАЗЪЕЗДОМ[1]

Представлен полиномиальный алгоритм корректировки расписания движения поездов для случая, когда один из путей двухпутной железной дороги становится недоступным, оставшийся путь содержит разъезд, а все поезда делятся на две категории: приоритетные поезда, например пассажирские, и обычные поезда, к которым относятся большинство грузовых поездов. Представленный алгоритм минимизирует негативное влияние, оказываемое блокировкой пути, сначала для приоритетных поездов, а затем для обычных поездов на множестве всех расписаний, оптимальных для приоритетных поездов.

Ключевые слова: однопутная железная дорога, динамическое программирование, перепланирование, полиномиальный алгоритм.

DOI: 10.31857/S0005231020050062

1. Введение

Сбои, такие как аварии или повреждение пути, часто приводят к врéменному закрытию одной колеи на двухпутном участке железной дороги. В таких ситуациях необходимо планировать движение поездов в обоих направлениях на оставшемся пути с целью минимизации влияния блокировки. Корректировка железнодорожных расписаний является областью активных исследований в течение нескольких десятилетий [1]. В статье добавляется к этим исследованиям полиномиальный алгоритм на основе динамического программирования для случая, когда оставшаяся колея имеет разъезд, а множество всех поездов разделено на две категории: приоритетные поезда, такие как пассажирские, и обычные, такие как большинство грузовых поездов.

Более подробно рассмотрим двухпутную железную дорогу между двумя точками A и B, где один железнодорожный путь заблокирован и движение

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01665).

всех поездов должно быть перепланировано на оставшемся пути. Оставшийся путь имеет разъезд, т.е. участок, позволяющий поезду разминуться со встречным поездом. В этом случае пропускающий поезд должен стоять в разъезде, в то время как проходящий поезд не может остановиться в разъезде. В разъезде одновременно может сделать остановку только один поезд. Все поезда имеют одинаковую постоянную скорость. Время, которое требуется поезду для прохождения отрезка дороги между точкой $s \in \{A, B\}$ и разъездом, обозначим через p_s. Не ограничивая общности, будем полагать, что $p_A \geqslant p_B$.

По соображениям безопасности два поезда не могут прибыть в разъезд одновременно. Пусть β — минимальный временно́й промежуток между двумя такими прибытиями. По той же причине для каждой конечной точки рассматриваемого отрезка пути два момента прибытия, два момента отправления, так же как и момент прибытия и момент отправления двух поездов, должны отличаться как минимум на величину β. При этом два поезда могут покинуть разъезд одновременно, если они движутся в разных направлениях. Предположение, что все эти требования безопасности имеют одинаковое минимальное время β, упрощает изложение материала, но не является существенным. Также будем полагать, что $\beta < p_B$.

Множество поездов состоит из двух категорий: приоритетные поезда и обычные поезда. Для каждого $s \in \{A, B\}$ пусть $\bar{s} = \{A, B\} \setminus \{s\}$. Обозначим через N_s^p и N_s^o множества приоритетных и обычных поездов, которые должны проходить путь в направлении от точки s к точке $\bar{s}$. Будем считать, что для каждого $s \in \{A, B\}$ $N_s^p \cup N_s^o \neq \emptyset$, поскольку в противном случае задача корректировки расписания не возникает.

Исходное расписание, построенное в предположении, что оба пути находятся в рабочем состоянии, выделяет каждому поезду $j \in N_s^\alpha$ временно́е окно $[r_j^{s,\alpha}, d_j^{s,\alpha}]$, в пределах которого поезд j должен пройти через рассматриваемый двухпутный участок железнодорожной сети. В соответствии с этим исходным расписанием один путь выделяется для всех поездов, приоритетных и обычных, идущих из A в B, а другой путь выделяется для всех поездов, приоритетных и обычных, движущихся в противоположном направлении, из B в A. Следовательно, для любых двух поездов $j \in N_s^\alpha$ и $j' \in N_s^{\alpha'}$, движущихся из s в $\bar{s}$, соответствующие временны́е окна удовлетворяют условию

$$(1) \qquad r_j^{s,\alpha} \neq r_{j'}^{s,\alpha'} \quad \text{и} \quad r_j^{s,\alpha} > r_{j'}^{s,\alpha'} \ \text{влечет} \ d_j^{s,\alpha} > d_{j'}^{s,\alpha'}.$$

В результате корректировки расписания для каждого поезда $j \in N_s^\alpha$ определяется момент времени $S_j^{s,\alpha}$, в который этот поезд должен войти на оставшийся путь и который будем называть моментом отправления поезда из точки s, и момент времени $C_j^{s,\alpha}$, в который поезд должен покинуть рассматриваемый путь и который будем называть временем прибытия в точку $\bar{s}$. Любое такое новое расписание должно удовлетворять следующему условию, которое диктует наличие исходных временны́х окон:

(s1) для любого $s \in \{A, B\}$, любого $\alpha \in \{p, o\}$ и любого поезда $j \in N_s^\alpha$ время отправления $S_j^{s,\alpha}$ этого поезда удовлетворяет неравенству $S_j^{s,\alpha} \geqslant r_j^{s,\alpha}$.

Требуется построить расписание, минимизирующее целевую функцию

$$\max_{s\in\{A,B\}} \max_{j\in N_s^p}[C_j^{s,p} - d_j^{s,p}] \tag{2}$$

и которое минимизирует целевую функцию

$$\sum_{s\in\{A,B\}} \sum_{j\in N_s^o}[C_j^{s,o} - r_j^{s,o}] \tag{3}$$

на множестве всех расписаний, оптимальных для (2).

Целевая функция (3) является лишь одним из возможных показателей влияния блокировки одного из путей на обычные поезда. Так, приведенная далее оптимизационная процедура может быть легко модифицирована для случая, когда вместо (3) используется

$$\max_{s\in\{A,B\}} \max_{j\in N_s^o}[C_j^{s,o} - d_j^{s,o}]. \tag{4}$$

Существует множество публикаций по планированию и корректировке расписания для однопутной железной дороги (ряд ссылок можно найти в [1, 2]). Среди них публикации [3–5] наиболее тесно связаны с данной статьей. Как и настоящая статья, [3] касается корректировки расписания в случае, когда первоначальное расписание полностью функционирующего двухпутного участка железнодорожной сети определяет временно́е окно для каждого поезда и рассматривает несколько категорий поездов. В отличие от данной статьи [3] предполагает отсутствие разъезда и отражает существование различных типов поездов путем введения весов в целевую функцию.

Другой близкой публикацией является [5], которая касается оптимизации упорядоченных целевых функций, но в отличие от данной статьи предполагает, что все поезда доступны одновременно (такая ситуация может возникнуть после полной блокировки рассматриваемого участка железной дороги). Кроме того, [5] предполагает, что на оставшемся пути нет разъезда.

И, наконец, [4] касается планирования на однопутной железной дороге, которая имеет разъезд, но аналогично [5] подразумевает, что все поезда имеются в наличии одновременно. Кроме того, в отличие от приведенной далее процедуры оптимизации, которая предназначена для двух категорий поездов и упорядоченных целевых функций, все алгоритмы, представленные в [4], были разработаны для случаев одной целевой функции и подразумевают, что все поезда имеют одинаковый тип. Несмотря на упомянутые существенные различия между [4] и данной статьей, некоторые результаты относительно структуры оптимальных расписаний, полученные в [4], могут быть непосредственно обобщены на случай, когда исходное расписание задает временно́е окно для каждого поезда. Кроме того, основная идея из [4], что существует вложенный Беллмановский процесс принятия решений, связанный с моментами отправления определенных поездов, остается в силе для данной статьи, хотя набор состояний и реализация общей схемы динамического программирования различны.

2. Экспрессы и неэкспрессы

Рассмотрим произвольное расписание для пути, который остался доступным после блокировки. Как и в [4], поезд, который не останавливается в разъезде, будет называться *экспрессом*, тогда как поезд, который делает остановку в разъезде, будет называться *неэкспрессом*. Понятия экспресса и неэкспресса не связаны с понятиями приоритетных и обычных поездов. Другими словами, любой приоритетный поезд, так же как и любой обычный поезд, может быть как экспрессом, так и неэкспрессом в зависимости от расписания. Множество всех экспрессов, которым уступает путь один и тот же неэкспресс, будем называть *пакетом*. Для любого момента времени t поезд $j \in N_s^\alpha$ будет называться *активным* в t, если

$$S_j^{s,\alpha} \leqslant t \leqslant C_j^{s,\alpha}.$$

Если поезда $j \in N_s^\alpha$ и $j' \in N_{\bar{s}}^{\alpha'}$, т.е. два поезда, движущиеся в противоположных направлениях, одновременно активны в некоторый момент времени, то они движутся навстречу друг другу в момент времени $\max[S_j^{s,\alpha}, S_{j'}^{\bar{s},\alpha'}]$. Следовательно, один из этих двух поездов должен быть экспрессом, а другой — неэкспрессом, который пропускает этот экспресс в разъезде.

Поскольку в любой момент времени в разъезде может стоять не более одного поезда, если поезд $j \in N_s^\alpha$ обгоняет поезд j', который движется по пути в том же направлении, что и j, т.е. из s в $\bar{s}$, то во временно́м интервале $[S_j^{s,\alpha}, C_j^{s,\alpha}]$ нет активных поездов, движущихся из $\bar{s}$ в s. Следовательно, вместо ожидания j поезд j' может покинуть разъезд по крайней мере в момент времени $S_j^{s,\alpha} + p_s - \beta$, что может только улучшить значение целевой функции, поскольку она неубывающая.

Поскольку обе целевые функции (2) и (3) являются неубывающими, приведенные выше рассуждения означают, что без ограничения общности достаточно рассмотреть только расписания, которые в дополнение к (s1) удовлетворяют следующим условиям:

- (s2) для каждого $s \in \{A, B\}$ и каждого $\alpha \in \{p, o\}$, для любых двух поездов $j \in N_s^\alpha$ и $j' \in N_s^\alpha$ неравенство $r_j^{s,\alpha} > r_{j'}^{s,\alpha}$ влечет $S_j^{s,\alpha} > S_{j'}^{s,\alpha}$;
- (s3) для любого неэкспресса существует как минимум один экспресс, который данный неэкспресс пропускает;
- (s4) все экспрессы, которые пропускает один и тот же неэкспресс, движутся в направлении, противоположном направлению движения этого неэкспресса;
- (s5) неэкспресс покидает разъезд одновременно с последним экспрессом, который он пропускает.

Два экспресса, движущиеся в противоположных направлениях, не могут быть активными одновременно. Более того, два экспресса, движущиеся в одном направлении, скажем, из s в $\bar{s}$, могут отправиться из s только в моменты времени, различающиеся не менее чем на β. Следовательно, все моменты отправления экспрессов различны.

Минимально возможная разница между двумя последовательными временами отправления экспрессов определяется несколькими факторами. Если, как и в [4], все поезда имеются в наличии одновременно, то этими факторами являются направления, в которых движутся экспрессы по рассматриваемому участку, и ситуации в разъезде, когда эти экспрессы его проходят. Все возможные комбинации этих факторов определены в [4] путем приписывания каждому экспрессу пары (s, b), называемой его типом. Здесь s указывает, что экспресс движется в направлении из s в $\bar{s}$, тогда как b отражает ситуацию в разъезде и принимает следующие значения:

- 0, если экспресс проходит через пустой разъезд;
- 1, если экспресс является частью пакета и не является последним в этом пакете;
- 2, если экспресс является последним в пакете.

Пусть $i \in N_s^\alpha$ и $i' \in N_{s'}^{\alpha'}$ — два последовательных экспресса типов (s, b) и (s', b') соответственно. Пусть время отправления экспресса i равно t. Предположим, что $b \neq 1$, $b' \neq 0$ и некоторый неэкспресс $g' \in N_{s'}^\gamma$ пропускает i'. Согласно [4] время отправления экспресса i определяет минимально возможное время отправления неэкспресса g':

$$\hat{\tau} = \begin{cases} t + p_A + p_B + \beta, & \text{если} \;\; s = s'; \\ t + \beta, & \text{если} \;\; s \neq s', \; b = 0; \\ t + 2p_s + \beta, & \text{если} \;\; s \neq s', \; b = 2. \end{cases} \tag{5}$$

Действительно, если $s = s'$, то g' движется из $\bar{s}$ в s. В силу того что $b \neq 1$, поезда g' и i не могут быть активными одновременно. Следовательно, g' может отправиться из $\bar{s}$ только через β после прибытия поезда i, который прибывает в $\bar{s}$ в момент $t + p_A + p_B$. Если $s \neq s'$, то оба поезда, i и g', движутся из s в $\bar{s}$. Тогда если $b = 0$, то времена отправления поездов g' и i могут отличаться только на β, в то время как при $b = 2$ поезд g' может покинуть точку s только через β после прибытия в точку s поезда, который пропускает i в разъезде. Поезд g' покидает разъезд одновременно с i, т.е. в момент времени $t + p_s$, и после этого ему требуется p_s временны́х единиц, чтобы достичь s.

В отличие от [4], где предполагается, что все поезда одновременно находятся в соответствующих конечных точках пути, данная статья посвящена задаче корректировки расписания, которая учитывает временны́е окна, определенные для каждого поезда исходным расписанием. Таким образом, существует еще одно ограничение на самое раннее возможное время отправления, наложенное исходным временны́м окном поезда. Следовательно, самое раннее возможное время отправления поезда g' из соответствующей конечной точки рассматриваемого участка пути равно

$$\tau = \max\left\{\hat{\tau}, r_{g'}^{\bar{s'}, \gamma}\right\}. \tag{6}$$

Если временно́е окно для поезда i' не учитывать, то согласно [4] времена отправлений t и τ (если поезд g' существует) определяют следующее самое раннее возможное время отправления поезда i':

$$
(7)\quad \hat{t} = \begin{cases} t+\beta, & \text{если } s=s' \text{ и } b=1;\\ t+\beta, & \text{если } \ s=s' \text{ и } \ b=b'=0;\\ \max\{t+2p_s+\beta, \tau+p_{\bar{s}'}+\beta-p_{s'}\}, & \text{если } \ s=s',\ b=2,\ b'\neq 0;\\ t+2p_s+\beta, & \text{если } \ s=s',\ b=2,\ b'=0;\\ \tau+p_{\bar{s}'}+\beta-p_{s'}, & \text{если } \ s=s',\ b=0,\ b'\neq 0;\\ t+p_A+p_B+\beta, & \text{если } \ s\neq s',\ b'=0;\\ \max\{t+p_A+p_B+\beta, \tau+p_{\bar{s}'}+\beta-p_{s'}\}, & \text{если } \ s\neq s',\ b'\neq 0. \end{cases}
$$

Принимая во внимание ограничение, накладываемое временны́м окном для поезда i', его самое раннее возможное время отправления равно

$$
(8)\qquad \max\left\{\hat{t}, r_{i'}^{s',\alpha'}\right\}.
$$

Пусть экспресс i типа (s,b) имеет самое раннее время отправления среди всех экспрессов. Пусть g — поезд, который отправляется раньше i. Тогда g является неэкспрессом. Это в силу условий (s3) и (s4) означает, что g отправляется из $\bar{s}$ и пропускает i в разъезде. Следовательно, i — первый поезд, отправляющийся из s. Кроме того, поскольку только один неэкспресс может пропускать экспресс в разъезде, g — первый поезд, отправляющийся из $\bar{s}$.

Для каждого $s\in\{A,B\}$ и для каждого $\alpha\in\{p,o\}$ определим n_s^α как мощность множества N_s^α и пронумеруем все поезда $j\in N_s^\alpha$ в порядке убывания $r_j^{s,\alpha}$ или, что эквивалентно, в порядке убывания $d_j^{s,\alpha}$. Пусть первый экспресс в последовательности экспрессов имеет тип (s,b) и является поездом категории α, который разъезжается с неэкспрессом категории γ (если такой существует). Тогда, принимая во внимание условие (s2), время отправления этого первого экспресса равно

$$
(9)\qquad t = \begin{cases} r_{n_s^\alpha}^{s,\alpha}, & \text{если } \ b=0;\\ \max\left\{r_{n_s^\alpha}^{s,\alpha}, r_{n_{\bar{s}}^\gamma}^{\bar{s},\gamma}+p_{\bar{s}}+\beta-p_s\right\}, & \text{если } \ b\neq 0. \end{cases}
$$

Используя те же рассуждения, что и выше, легко видеть, что если экспресс i типа (s,b) имеет самое позднее время отправления среди всех экспрессов и g — поезд, который отправляется позже i, то i — последний поезд, отправляющийся из s, g — последний поезд, отправляющийся из $\bar{s}$, и g пропускает поезд i в разъезде.

Пусть i и i' — два последовательных экспресса типов (s,b) и (s',b'), соответственно, таких, что время отправления i' больше времени отправления i. Как было показано выше, типы этих экспрессов вместе со временем отправления i полностью определяют самое раннее возможное время отправления i'. Кроме того, если некоторый неэкспресс g пропускает i и $b=2$, то тип (s,b) и время отправления i полностью определяют время, когда g прибывает в s; и если некоторый неэкспресс g' пропускает i' и $b\neq 1$, то время отправления i

и типы этих двух экспрессов полностью определяют самое раннее время отправления g' из $\bar{s}'$. Более того, как было показано выше, тип первого экспресса полностью определяет самое раннее время отправления этого экспресса и самое раннее время отправления поезда, с которым этот экспресс расходится в разъезде, если такой поезд существует. Эти наблюдения позволяют построить искомое расписание, учитывая только времена отправления экспрессов и назначая каждому поезду самое раннее возможное время отправления из соответствующей точки пути.

3. Минимизация максимального временно́го смещения

В данном разделе показано, как найти оптимальное значение целевой функции (2). Целевая функция (2) включает в себя только одну категорию поездов, и, следовательно, эта оптимизационная задача сходна с задачей, рассмотренной в [4], с одним существенным отличием — рассматриваемая здесь задача корректировки расписания учитывает временны́е окна, назначенные поездам до возникновения блокировки. Это требует включения времени в определение состояния, что в свою очередь меняет реализацию общей структуры динамического программирования для решения задачи минимизации максимального временно́го смещения.

Рассмотрим произвольное расписание (напомним, что данный раздел касается только приоритетных поездов, а существование всех обычных поездов игнорируется) и произвольный экспресс в этом расписании. Пусть (s, b) — тип этого экспресса и t — время его отправления. Количество приоритетных поездов, которые отправляются из s в $\bar{s}$ в момент времени t или после этого момента, будем обозначать через k_s. Пусть $k_{\bar{s}}$ — количество приоритетных поездов, каждый из которых является либо поездом, который пропускает рассматриваемый экспресс в разъезде, либо поездом, который отправляется из $\bar{s}$ в s в момент времени t или позже, либо поездом, для которого выполнены оба условия. Отправлению рассматриваемого экспресса соответствует набор (t, k_A, k_B, s, b). Согласно терминологии динамического программирования этот набор будет называться *состоянием*. Легко видеть, что если отправлению экспресса соответствует состояние (t, k_A, k_B, s, b), то данный экспресс принадлежит множеству N_s^p и в силу (s2) и введенной нумерации поездов имеет номер k_s.

Состояние (t, k_A, k_B, s, b) позволяет вычислить

$$C_{k_s}^{s,p} - d_{k_s}^{s,p} = t + p_A + p_B - d_{k_s}^{s,p}$$

и в случае $b = 2$

$$C_{k_{\bar{s}}}^{\bar{s},p} - d_{k_{\bar{s}}}^{\bar{s},p} = t + 2p_s - d_{k_{\bar{s}}}^{\bar{s},p}.$$

Введем обозначение

$$L(t, k_A, k_B, s, b) = \begin{cases} \max\left\{t + p_A + p_B - d_{k_s}^{s,p}, t + 2p_s - d_{k_{\bar{s}}}^{\bar{s},p}\right\}, & \text{если } b = 2; \\ t + p_A + p_B - d_{k_s}^{s,p} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Каждое расписание индуцирует последовательность состояний, в которой состояния перечислены в порядке возрастания соответствующего времени отправления. Рассмотрим все расписания, в которых последовательности состояний содержат (t, k_A, k_B, s, b). Пусть $F(t, k_A, k_B, s, b)$ — минимальное значение величины

$$\max_{s\in\{A,B\}} \max_{j\in\{1,\dots,k_s\}} [C_j^{s,p} - d_j^{s,p}]$$

на множестве всех таких расписаний. Обозначим через $\Omega(t, k_A, k_B, s, b)$ множество всех состояний, таких что каждое из них следует сразу за (t, k_A, k_B, s, b) по крайней мере в одной из упомянутых выше последовательностей.

Согласно разделу 2 последний экспресс также является последним поездом, проходящим железнодорожный путь в соответствующем направлении. Более того, после отправления этого экспресса максимум один поезд может двигаться в противоположном направлении, и этот поезд должен пропускать данный экспресс. Следовательно, если состояние (t, k_A, k_B, s, b) соответствует отправлению последнего экспресса, то k_x в (t, k_A, k_B, s, b) равен

$$k_x = \begin{cases} 1 & \text{для } x = s; \\ 0 & \text{для } x = \bar{s} \text{ и } b \neq 2; \\ 1 & \text{для } x = \bar{s} \text{ и } b = 2. \end{cases} \tag{10}$$

Это означает, что

$$F(t, k_A, k_B, s, b) = L(t, k_A, k_B, s, b). \tag{11}$$

Если в некотором расписании, у которого последовательность состояний содержит (t, k_A, k_B, s, b), экспресс $k_s \in N_s^p$ не является последним экспрессом в расписании, то он не является последним экспрессом во всех расписаниях, чьи последовательности состояний содержат (t, k_A, k_B, s, b). Поэтому

$$\begin{gathered} F(t, k_A, k_B, s, b) = \\ = \max\left\{ L(t, k_A, k_B, s, b), \min_{(t', \hat{k}_A, \hat{k}_B, s', b')\in\Omega(t, k_A, k_B, s, b)} F(t', \hat{k}_A, \hat{k}_B, s', b') \right\}. \end{gathered} \tag{12}$$

Как уже отмечалось в разделе 2, первый экспресс также является первым поездом, отправляющимся в соответствующем направлении, и время его отправления можно вычислить с помощью (9). Пусть X — множество всех состояний, соответствующих всем возможным вариантам выбора первого экспресса и его типа. Тогда оптимальное значение функции (2) может быть записано в виде

$$\min_{(t, n_A^p, n_B^p, s, b)\in X} F(t, n_A^p, n_B^p, s, b). \tag{13}$$

Таким образом, принимая во внимание (11), (12) и (13), оптимальное значение (2) может быть получено с помощью динамического программирования. Более подробная информация по реализации вычислений будет представлена в разделе 5.

4. Минимизация суммарного времени нахождения в системе

В данном разделе рассматривается задача минимизации (3) на множестве всех расписаний, оптимальных для (2). Пусть F^* — оптимальное значение для (2). Любое расписание оптимально для (2) тогда и только тогда, когда

$$C_i^{s,p} \leqslant d_i^{s,p} + F^* \quad \text{для любого } s \in \{A, B\} \text{ и любого } i \in N_s^p. \tag{14}$$

Другими словами, необходимо найти расписание, доставляющее наименьшее значение для (3) среди всех расписаний, удовлетворяющих условию (14). Следовательно, в данном разделе будут рассматриваться только расписания, для которых выполнено (14).

В отличие от раздела 3, который касался только приоритетных поездов, теперь рассматриваются все поезда. Таким образом, с отправлением каждого экспресса связано больше информации, что ведет к соответствующему изменению определения состояния. Теперь состояние — это набор $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$, где, как и в разделе 3, t и пара (s, b) — время отправления и тип соответствующего экспресса. Кроме того, α — категория экспресса и γ — категория поезда (если такой поезд существует), который пропускает данный экспресс в разъезде. Если такой поезд не существует, то γ принимает любое значение из $\{p, o\}$. Независимо от того, пропускает ли какой-либо поезд данный экспресс или нет, $k_{\bar{s}}^\gamma$ — это количество поездов в подмножестве множества $N_{\bar{s}}^\gamma$, которое состоит из всех поездов, прибывающих в s после t. Каждое другое значение k_x^u в $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ — это количество поездов, которые отправляются из x в момент времени t или позже. В частности, в силу (s2) состояние $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ соответствует отправлению поезда, принадлежащего множеству N_s^α, номер которого равен k_s^α.

Если $\alpha = o$, то состояние $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ предоставляет информацию для вычисления

$$C_{k_s}^{s,o} - r_{k_s}^{s,o} = t + p_A + p_B - r_{k_s}^{s,o},$$

а если $\gamma = o$ и $b = 2$, то это состояние позволяет также вычислить

$$C_{k_{\bar{s}}}^{\bar{s},o} - r_{k_{\bar{s}}}^{\bar{s},o} = t + 2p_s - r_{k_{\bar{s}}}^{\bar{s},o}.$$

Следовательно, вклад в значение целевой функции (3) экспресса, отправлению которого соответствует состояние $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$, и поезда, который пропускает данный экспресс в разъезде (если такой поезд существует), равен

$$R(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma) =$$

$$= \begin{cases} 2t + 3p_s + p_{\bar{s}} - r_{k_s}^{s,o} - r_{k_{\bar{s}}}^{\bar{s},o} & \text{для } \alpha = o, b = 2, \gamma = o; \\ t + p_A + p_B - r_{k_s}^{s,o} & \text{для } \alpha = o, b = 2, \gamma \neq o; \\ t + p_A + p_B - r_{k_s}^{s,o} & \text{для } \alpha = o, b \neq 2; \\ t + 2p_s - r_{k_{\bar{s}}}^{\bar{s},o} & \text{для } \alpha \neq o, b = 2, \gamma = o; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{15}$$

Основываясь на одних и тех же концепциях динамического программирования, процедуры оптимизации для (2) и (3) имеют много общего, несмотря на несколько важных отличий — разные целевые функции; условие (14); и разные множества поездов. Кроме того, оптимизационный подход, описанный в этом разделе, применяется только после процедуры минимизации (2). Поэтому использование далее тех же обозначений Ω и F не вызовет путаницы, а скорее подчеркнет сходство и облегчит изложение в разделе 5.

Рассмотрим все расписания, в которых индуцированные последовательности состояний содержат некоторое состояние $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$. Напомним, что в этом разделе рассматриваются только расписания, удовлетворяющие (14). Как и прежде, в каждой индуцированной последовательности состояний состояния перечислены в порядке возрастания соответствующих времен отправления. Обозначим через $\Omega(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ множество всех состояний таких, что каждое из них сразу следует за $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ по крайней мере в одной из упомянутых выше последовательностей. Если $k_A^o + k_B^o > 0$, то определим $F(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ как минимальное значение

$$\sum_{s \in \{A,B\}} \sum_{j \leqslant k_s^o} [C_j^{s,o} - r_j^{s,o}] \tag{16}$$

на множестве рассматриваемых расписаний. Если $k_A^o + k_B^o = 0$, то положим

$$F(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma) = 0.$$

Далее для любых $\alpha \in \{p, o\}$ удобно использовать обозначение $\bar{\alpha} = \{p, o\} \setminus \{\alpha\}$. Если состояние $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ соответствует отправлению последнего экспресса, то согласно разделу 2 k_x^u в $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ определяется как

$$k_x^u = \begin{cases} 1 & \text{для } x = s \text{ и } u = \alpha; \\ 0 & \text{для } x = s \text{ и } u = \bar{\alpha}; \\ 0 & \text{для } x = \bar{s} \text{ и } u = \bar{\gamma}; \\ 0 & \text{для } x = \bar{s}, u = \gamma \text{ и } b \neq 2; \\ 1 & \text{для } x = \bar{s}, u = \gamma \text{ и } b = 2. \end{cases} \tag{17}$$

Это означает, что

$$F(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma) = R(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma). \tag{18}$$

Если экспресс, которому соответствует состояние $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$, не является последним экспрессом в расписании, то

$$F(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma) = R(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma) + \tag{19}$$

$$+ \min_{(t', \hat{k}_A^p, \hat{k}_A^o, \hat{k}_B^p, \hat{k}_B^o, s', b', \alpha', \gamma') \in \Omega(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)} F(t', \hat{k}_A^p, \hat{k}_A^o, \hat{k}_B^p, \hat{k}_B^o, s', b', \alpha', \gamma').$$

Обозначим через Y множество всех состояний, которые являются первыми по крайней мере в одной последовательности состояний, индуцированной расписанием, удовлетворяющим (14). Тогда минимальное значение (3) на множестве всех расписаний, оптимальных для (2), равно

$$\min_{(t,n_A^p,n_A^o,n_B^p,n_B^o,s,b,\alpha,\gamma)\in Y} F(t, n_A^p, n_A^o, n_B^p, n_B^o, s, b, \alpha, \gamma). \tag{20}$$

Заметим, что (13) и (20) существенно различны. Действительно, чтобы перечислить все состояния в X, достаточно знать только n_A^p, n_A^p, $r_{n_A^p}^{A,p}$ и $r_{n_B^p}^{B,p}$, в то время как перечисление всех состояний в Y может потребовать значительно более сложную вычислительную процедуру. Эта процедура представлена в разделе 5.

5. Динамическое программирование

Для приведенной ниже оптимизационной процедуры требуется множество T моментов времени, которое содержит все времена отправления экспрессов во всех расписаниях, в которых каждый экспресс отправляется в самый ранний возможный момент времени для экспресса этого типа. Такое множество описано ниже.

Принимая во внимание (5)–(9), легко видеть, что время отправления любого экспресса представимо в виде

$$t = r_i^{s,\alpha} + m_1 p_A + m_2 p_B + m_3 \beta \tag{21}$$

для некоторого $\alpha \in \{p, o\}$, $s \in \{A, B\}$, $i \in N_s^\alpha$, и некоторых целых чисел m_1, m_2 и m_3. Введем обозначение

$$n = n_A^p + n_B^p + n_A^o + n_B^o.$$

Отметим, что s и α в выражении (21) не обязательно совпадают с соответствующими параметрами рассматриваемого экспресса. Если для двух последовательных экспрессов α, s и i в выражении (21) остаются теми же самыми, то согласно (7) и (9) m_1 и m_2 не могут увеличиться больше чем на 3 и не могут уменьшиться больше чем на 1, тогда как m_3 не может увеличиться больше чем на 2. Таким образом, m_1 и m_2 не превосходят $3n$ и не меньше $(-n)$, а m_3 не превосходит $2n$. Следовательно, все возможные моменты отправления экспресса принадлежат множеству

$$\Big\{t|\ t \geqslant 0,\ t = r_i^{s,\alpha} + m_1 p_A + m_2 p_B + m_3 \beta,\\ i \in N_s^\alpha,\ s \in \{A, B\},\ \alpha \in \{p, o\},\ m_1 \in \{-n, \ldots, 0, 1, \ldots, 3n\},\\ m_2 \in \{-n, \ldots, 0, 1, \ldots, 3n\}, m_3 \in \{0, 1, \ldots, 2n\}\Big\} \tag{22}$$

мощности $O(n^4)$.

Рассмотрим задачу минимизации (2) и предположим, что $n_A^p > 0$ и $n_B^p > 0$, поскольку в противном случае минимизация (2) тривиальна. Поскольку данная задача включает только приоритетные поезда, то, следуя подходу, принятому в разделе 3, можно рассматривать только приоритетные поезда. Следовательно, вместо (22) можно использовать в качестве T его подмножество

$$\begin{gathered}\Big\{t|\ t \geqslant 0,\ t = r_i^{s,p} + m_1 p_A + m_2 p_B + m_3\beta,\ i \in N_s^p,\ s \in \{A, B\},\\ m_1 \in \{-(n_A^p + n_B^p), \ldots, 0, 1, \ldots, 3(n_A^p + n_B^p)\},\\ m_2 \in \{-(n_A^p + n_B^p), \ldots, 0, 1, \ldots, 3(n_A^p + n_B^p)\},\\ m_3 \in \{0, 1, \ldots, 2(n_A^p + n_B^p)\}\Big\}.\end{gathered} \tag{23}$$

Оптимизационная процедура, представленная в данном разделе, получает оптимальное значение для (2) путем генерации последовательности множеств $V_1, \ldots, V_{n_A^p+n_B^p}$. Следовательно, количество множеств в этой последовательности равно количеству поездов, поскольку, как и в разделе 3, рассматриваются только приоритетные поезда. Каждое множество состоит из наборов (t, k_A, k_B, s, b), которые являются кандидатами на состояния в оптимальном для (2) расписании.

В каждом множестве V_k, $1 \leqslant k \leqslant n_A^p + n_B^p$, содержатся только кандидаты, удовлетворяющие условию

$$k_A^p + k_B^p = k.$$

Таким образом, ввиду (10) все кандидаты на состояние, соответствующее последнему экспрессу, могут быть только в множествах V_1 и V_2. Множество V_1 содержит только таких кандидатов. Более точно, это множество состоит из всех наборов вида $(t, 1, 0, A, 0)$, где $t \in T$ и $t \geqslant r_1^{A,p}$, и всех наборов вида $(t, 0, 1, B, 0)$, где $t \in T$ и $t \geqslant r_1^{B,p}$.

Множество V_2 содержит всех кандидатов на состояние, соответствующее последнему экспрессу и удовлетворяющее равенству $k_A + k_B = 2$, а также других кандидатов, удовлетворяющих этому равенству. Подмножество V_2 всех кандидатов на последнее состояние состоит из всех наборов типа $(t, 1, 1, A, 2)$, где $t \in T$ и $t \geqslant r_1^{A,p}$, и всех наборов типа $(t, 1, 1, B, 2)$, где $t \in T$ и $t \geqslant r_1^{B,p}$.

Множества $V_1, \ldots, V_{n_A^p+n_B^p}$ генерируются одно за другим в порядке возрастания их индексов. После включения всех кандидатов на состояние, соответствующее последнему экспрессу, анализируются наборы для каждого множества один за другим. Чтобы быть включенным в множество V_k, набор (t, k_A, k_B, s, b), для которого выполняется $k_A + k_B = k$, должен обладать несколькими свойствами. Эти свойства включают:

(p1) $k_s \leqslant n_s^{s,p}$ для $s \in \{A, B\}$;

(p2) $r_{k_s}^{s,p} \leqslant t$ для $t \in T$;

(p3) если $b \neq 0$, то $k_{\bar{s}} \geqslant 1$;

(p4) если $b = 1$, то $k_s \geqslant 2$;

(p5) если $k_A^p = n_A^p$ и $k_B^p = n_B^p$, то t вычисляется по (9).

Более того, рассматриваемый набор (t, k_A, k_B, s, b), удовлетворяющий свойствам (p1)–(p5), включается в множество $V_{k_A+k_B}$, если только существует набор $(t', \hat{k}_A, \hat{k}_B, s', b')$, который включен в одно из ранее сгенерированных множеств, и имеет t', которое можно вычислить по формулам (5)–(8); имеет $\hat{k}_A$ и $\hat{k}_B$, удовлетворяющие (24) и (25), приведённым ниже; и удовлетворяет условию (26), приведённому ниже:

$$\hat{k}_s = k_s - 1, \tag{24}$$

$$\hat{k}_{\bar{s}} = \begin{cases} k_{\bar{s}} - 1, & \text{если } \ b = 2, \\ k_{\bar{s}} & \text{иначе}, \end{cases} \tag{25}$$

$$\text{если } b = 1, \text{ то } s = s' \text{ и } b' \neq 0. \tag{26}$$

Для каждого набора (t, k_A, k_B, s, b), обладающего требуемыми свойствами и, следовательно, принадлежащего $V_{k_A+k_B}$, обозначим через $W(t, k_A, k_B, s, b)$ множество всех наборов $(t', \hat{k}_A, \hat{k}_B, s', b')$ в ранее сгенерированных множествах таких, что t' совпадает с моментом времени, вычисленным по формуле (8); $\hat{k}_A$ и $\hat{k}_B$ удовлетворяют (24) и (25); и выполняется (26). Если (t, k_A, k_B, s, b) выбирается в качестве состояния, то

$$W(t, k_A, k_B, s, b) = \Omega(t, k_A, k_B, s, b).$$

Тогда с учетом (13) оптимальное значение (2) равно

$$\min_{(t, n_A, n_B, s, b) \in V_{n_A^p + n_B^p}} f(t, k_A, k_B, s, b),$$

где f определяется подобно F в (11) и (12), т.е. для каждого кандидата (t, k_A, k_B, s, b) на состояние, соответствующее последнему экспрессу,

$$f(t, k_A, k_B, s, b) = L(t, k_A, k_B, s, b), \tag{27}$$

и для любого другого (t, k_A, k_B, s, b) в $V_2 \cup \ldots \cup V_{n_A^p + n_B^p}$

$$\begin{aligned} &f(t, k_A, k_B, s, b) = \\ &= \max \left\{ L(t, k_A, k_B, s, b), \min_{(t', \hat{k}_A, \hat{k}_B, s', b') \in W(t, k_A, k_B, s, b)} f(t', \hat{k}_A, \hat{k}_B, s', b') \right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Учитывая мощность множества T (см. (23)), сложность данной оптимизационной процедуры составляет $O((n_A^p + n_B^p)^6)$.

Процедура построения расписания, доставляющего минимальное значение для (3) среди всех расписаний, оптимальных для (2), сходна с описанной процедурой минимизации (2) с одним важным отличием: чтобы гарантировать (14), каждый набор должен удовлетворять дополнительным условиям (см. (g6) и (g7) ниже). Согласно этой процедуре n множеств $V_1, \ldots, V_n$

генерируются одно за другим в порядке возрастания их индексов. Аналогично описанному выше множество V_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, содержит только наборы $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$, удовлетворяющие условию

$$k_A^p + k_A^o + k_B^p + k_B^o = k.$$

Каждый набор в множествах $V_1, \ldots, V_n$ является кандидатом на состояние в искомом расписании. Чтобы быть включенным в множество, набор $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ должен обладать несколькими свойствами. Первая группа свойств:

(g1) $k_s^\varepsilon \leqslant n_s^{s,\varepsilon}$ для $\varepsilon \in \{p, o\}$ и $s \in \{A, B\}$;

(g2) $r_{k_s}^{s,\alpha} \leqslant t$ и $t \in T$;

(g3) если $b \neq 0$, то $k_{\bar{s}}^\gamma \geqslant 1$;

(g4) если $b = 1$, то $k_s^\alpha + k_s^{\bar{\alpha}} \geqslant 2$;

(g5) если $k_A^p = n_A^p$, $k_A^o = n_A^o$, $k_B^p = n_B^p$, и $k_B^o = n_B^o$, то t вычисляется по (9).

Эти свойства аналогичны (p1)–(p5). Вторая группа свойств:

(g6) если $\alpha = p$, то $t + p_A + p_B \leqslant d_{k_s^p}^{s,p} + F^*$;

(g7) если $\gamma = p$ и $b = 2$, то $t + 2p_s \leqslant d_{k_{\bar{s}}^p}^{\bar{s},p} + F^*$

— гарантирует, что полученное расписание будет удовлетворять (14).

Для того чтобы $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ был выбран в качестве кандидата на состояние, должен существовать уже выбранный набор $(t', \hat{k}_A^p, \hat{k}_A^o, \hat{k}_B^p, \hat{k}_B^o, s', b', \alpha', \gamma')$ такой, что

$$\hat{k}_s^\alpha = k_s^\alpha - 1, \qquad \hat{k}_s^{\bar{\alpha}} = k_s^{\bar{\alpha}} \quad \text{и} \quad \hat{k}_{\bar{s}}^{\bar{\gamma}} = k_{\bar{s}}^{\bar{\gamma}}, \tag{29}$$

$$\hat{k}_{\bar{s}}^\gamma = \begin{cases} k_{\bar{s}}^\gamma - 1, & \text{если } b = 2, \\ k_{\bar{s}}^\gamma & \text{иначе.} \end{cases} \tag{30}$$

Равенства (29) и (30) выполняют ту же роль, что (24) и (25) ранее. Более точно, набор $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$, удовлетворяющий (g1)–(g7), включается в множество $V_{k_A^p + k_A^o + k_B^p + k_B^o}$, если только существует набор $(t', \hat{k}_A^p, \hat{k}_A^o, \hat{k}_B^p, \hat{k}_B^o, s', b', \alpha', \gamma')$, который уже включен в одно из ранее сгенерированных множеств и для которого t' совпадает с моментом времени, вычисленным по формулам (5)–(8); $\hat{k}_A^p$, $\hat{k}_A^o$, $\hat{k}_B^p$, $\hat{k}_B^o$ удовлетворяют (29) и (30); и выполняется (26). Обозначим через $W(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ множество всех таких наборов $(t', \hat{k}_A^p, \hat{k}_A^o, \hat{k}_B^p, \hat{k}_B^o, s', b', \alpha', \gamma')$. Тогда минимальное значение (3) на множестве всех расписаний, оптимальных для (2), может быть записано как

$$\min_{(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma) \in V_n} f(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma),$$

где f определяется следующим образом.

Для каждого кандидата $(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)$ на состояние, соответствующее последнему экспрессу,

$$f(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma) = R(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma).$$

Для каждого элемента $V_2 \cup \ldots \cup V_n$, который не является кандидатом на состояние, соответствующее последнему экспрессу,

$$f(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma) = R(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma) +$$
$$+ \min_{(t', \hat{k}_A^p, \hat{k}_A^o, \hat{k}_B^p, \hat{k}_B^o, s', b', \alpha', \gamma') \in W(t, k_A^p, k_A^o, k_B^p, k_B^o, s, b, \alpha, \gamma)} f(t', \hat{k}_A^p, \hat{k}_A^o, \hat{k}_B^p, \hat{k}_B^o, s', b', \alpha', \gamma').$$

Принимая во внимание мощность множества T (см. (22)), данная оптимизационная процедура имеет временну́ю сложность $O(n^8)$.

6. Заключение

Полиномиальные алгоритмы, представленные в статье, направлены на уменьшение прямого воздействия блокировки одного из путей на двухпутном участке дороги, измеряемого максимальным временны́м смещением приоритетных поездов и общим (а значит, и средним) временем нахождения в системе для обычных поездов. Направления дальнейшего обобщения представленного подхода могут включать минимизацию других мер влияния блокировки; уменьшение влияния блокировки на более широкие участки железнодорожной сети; планирование работ по техническому обслуживанию, требующих вре́менного закрытия некоторых сегментов железнодорожной сети, и разработка быстрых аппроксимационных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cacchiani V., Huisman D., Kidd M., Kroon L., Toth P., Veelenturf L., Wagenaar J.* An Overview of Recovery Models and Algorithms for Real-Time Railway Rescheduling // Transport. Res. Part B. 2014. V. 63. P. 15–37.
2. *Lusby R., Larsen J., Ehrgott M., Ryan D.* Railway Track Allocation: Models and Methods // OR Spectrum. 2011. V. 33. No. 4. P. 843–883.
3. *Brucker P., Heitmann S., Knust S.* Scheduling Railway Traffic at a Construction Site // OR Spectrum. 2002. V. 24. No. 1. P. 19–30.
4. *Зиндер Я., Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А.* Построение расписаний двухстороннего движения на однопутной железной дороге с разъездом // АиТ. 2018. № 3. С. 144–166.

   Zinder Y., Lazarev A.A., Musatova E.G., Taracov I.A. Scheduling the Two-Way Traffic on a Single-Track Railway With a Siding // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 3. P. 506–523.
5. *Zinder Y., Lazarev A., Musatova E.,Taracov I., Khusnullin N.* Two-Station Single Track Scheduling Problem // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. No. 12. P. 231–236.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 02.07.2019

После доработки 15.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019