Автоматика и телемеханика, № 5, 2020

© 2020 г. С.А. МАЛАХ (malahsveta@mail.ru),
В.В. СЕРВАХ, д-р физ.-мат. наук (svv_usa@rambler.ru)
(Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск)

МАКСИМИЗАЦИЯ УДЕЛЬНОЙ ПРИВЕДЕННОЙ ПРИБЫЛИ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ[1]

Исследуется модель максимизации прибыли коммерческой компании с учетом интенсивности продажи товаров, стоимости закупки, доставки, хранения и реализации, а также возможности альтернативного размещения свободного капитала. Показано, что функция прибыли в зависимости от периода завоза товаров имеет единственную точку максимума. Построена модель и разработаны алгоритмы решения задачи максимизации прибыли в многономенклатурных системах при ограниченном оборотном капитале.

Ключевые слова: исследование операций, управление запасами, максимизация прибыли, динамическое программирование.

DOI: 10.31857/S0005231020050074

1. Введение

Рассматривается задача оптимизации деятельности торговой компании, которая закупает товары на бирже и реализует их на розничном рынке. На предприятии построен специализированный склад, внедрены современные логистические технологии с соответствующими базами данных, постоянным мониторингом движения товаров, автоматизацией склада и погрузочно-разгрузочных работ. Новейшие технологии, эффективная организация собственного склада позволили существенно сократить издержки. Сложилась ситуация, когда классические модели, например [1–5], основанные на минимизации затрат, не всегда адекватно отражают ситуацию. В настоящее время с учетом высокой мобильности экономики, острой конкуренции и внедрения современных систем логистики возникла необходимость использования новых моделей, направленных, в первую очередь, на эффективное использование капитала и получение максимальной прибыли. Одной из первых в этом направлении была статья [6]. Из российских публикаций отметим [7–11] и недавно изданную монографию [12]. Такой подход особенно важен при оптимизации закупок товаров, для которых отношение объем/цена является малой величиной, например радиодеталей, медикаментов и др. [13, 14]. Затраты на доставку и хранение становятся незначительными, и большее значение приобретает скорость оборота денег.

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 гг., п. I.5, проект № 0314-2019-0019 «Анализ и решение задач проектирования сложных систем методами дискретной оптимизации».

Другой проблемой является разработка алгоритма автоматической корректировки заявок при ограничении оборотного капитала. Автоматизированная система при формировании очередной заявки определяет оптимальные объемы закупки товаров. В некоторые моменты времени общая стоимость заказываемых товаров может оказаться больше имеющихся в наличии свободных денег. В такой ситуации приходится либо сокращать заказ, либо брать кредит. Кредит меняет стоимость денег, и тем самым меняются и оптимальные объемы закупок. Сокращение заказа также приводит к отклонению от оптимума. Возникает задача корректировки многономенклатурного заказа с учетом ограничений на размер оборотного капитала.

Большое влияние на представляемую работу оказали успехи ученых белорусской школы по комбинаторной оптимизации, созданной В.С. Танаевым. Работы [15, 16] и многие другие стали источником получения качественной систематизированной информации, базой для дальнейших исследований. Работы по логистике поставок [19, 20] выполнялись в рамках проектов INTAS в тесном сотрудничестве с белорусскими учеными. Настоящая публикация опирается на современные разработки, проводимые в объединенном институте проблем информатики Национальной академии наук Беларуси. В частности, отметим статьи, связанные с задачами максимизации прибыли [17, 18].

Структура статьи. В разделе 2 рассматривается модель управления запасами при наличии альтернативных возможностей использования капитала. Раздел 3 посвящен построению модели и разработке алгоритмов решения задачи оптимизации текущих закупок в многономенклатурных системах при ограниченном оборотном капитале, в том числе и при возможности использования кредитов. В раздел 4 рассматривается более общая модель с учетом особенностей ее реализации на практике.

2. Задача максимизации чистой приведенной прибыли

Рассматривается классическая модель управления запасами и ее развитие с учетом факторов современной экономики. Основное внимание уделяется эффективному использованию капитала при наличии альтернативных возможностей его использования.

Модель будем рассматривать в предположении, что имеется гарантированная возможность альтернативного безрискового размещения капитала под ставку r_0. Тогда деньги в разные моменты времени будут иметь различную ценность. Чтобы сравнивать поступления, полученные в разное время, используется следующий подход. Если в момент t_1 имеется некоторый капитал K_1, то его всегда можно разместить на рынке под текущую рыночную процентную ставку r_0. При таком размещении к моменту t_2 капитал увеличится до значения $K_1(1+r_0)^{t_2-t_1}$. И наоборот, если в момент t_2 необходим капитал K_2, то в момент t_1 достаточно иметь его в количестве $K_2/(1+r_0)^{t_2-t_1}$. Поэтому чтобы сравнить капитал K_1 в момент времени t_1 и K_2 в момент времени t_2, необходимо сравнить величины K_1 и $K_2/(1+r_0)^{t_2-t_1}$. Эта операция называется операцией приведения к моменту времени t_1 или дисконтированием.

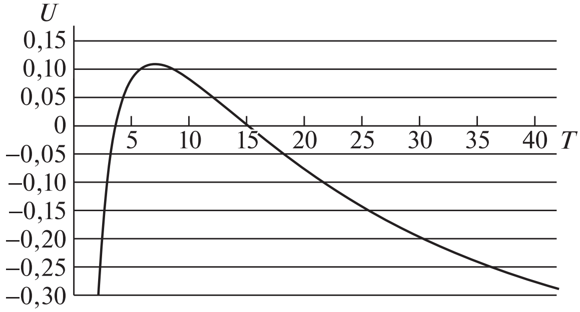

Рис. 1. Зависимость удельной прибыли от T.

Процесс закупки и реализации товара будем рассматривать, как в классической модели: закупаем товар в объеме v по цене β и продаем его с интенсивностью λ по цене c. Затраты на доставку задаются функцией $\alpha + \beta v$, где α — постоянные издержки, включающие стоимость заявки и доставки продукции. Стоимость хранения единицы товара в единицу времени обозначим через $c_{\text{хр}}$.

Время реализации закупленного товара составит $T = \frac{v}{\lambda}$. Интенсивность поступления денег от продажи равна $c\lambda$. С учетом дисконтирования интенсивность поступления денег выражается функцией $\frac{c\lambda}{(1+r_0)^t}$. За период реализации товара $[0, T]$ суммарные поступления, дисконтированные к начальному моменту времени, будут равны

$$Q(T) = \int_0^T \frac{c\lambda}{(1+r_0)^t} dt = \frac{c\lambda}{ln(1+r_0)} \frac{(1+r_0)^{\text{T}} - 1}{(1+r_0)^{\text{T}}},$$

а затраты на хранение товара с учетом дисконтирования составят

$$Z(T) = \int_0^T \frac{(T\lambda - t\lambda)c_{\text{хр}}}{(1+r_0)^t} dt = \frac{c_{\text{хр}}\lambda}{ln^2(1+r_0)} \left(T \ln(1+r_0) + \frac{1}{(1+r_0)^{\text{T}}} - 1 \right).$$

Таким образом, за указанный период $[0, T]$ чистая приведенная прибыль будет получена в размере

$$Q(T) - (\alpha + \beta v) - Z(T).$$

В задаче требуется максимизировать удельную прибыль, которая выражается следующей функцией:

$$U(T) = \frac{Q(T) - (\alpha + \beta T\lambda) - Z(T)}{T} \to \max.$$

На графике (рис. 1) приведен пример функции $U(T)$ в зависимости от периода завоза товара при входных данных $\lambda = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 0{,}25$, $c = 1$, $r_0 = 0{,}1$, $c_{\text{хр}} = 0{,}03$. Оптимальное значение удельной чистой привиденной прибыли равно 0,109 и достигается при $T = 7{,}02$.

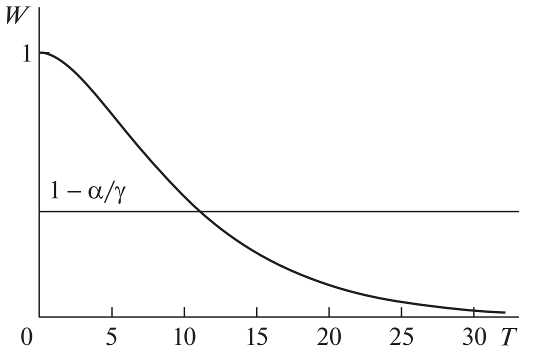

Рис. 2. Изменение функции $W(T)$ в зависимости от T.

Исследуем экстремальные значения функции $U(T)$. Обозначим

$$\gamma = \frac{c\lambda}{ln(1+r_0)} + \frac{c_{\text{хр}}\lambda}{ln^2(1+r_0)} > 0, \quad \delta = \frac{1}{1+r_0}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Тогда

$$U(T) = \frac{1}{T}(\gamma(1-\delta^{\mathrm{T}}) - \alpha - \beta T\lambda) - \mathrm{const},$$

где $\mathrm{const} = \frac{c_{\text{хр}}\lambda}{ln^2(1+r_0)}$,

$$\lim_{T\to+0} U(T) = -\infty, \quad \lim_{T\to+\infty} U(T) = -\beta\lambda.$$

Исследуем нули производной

$$U'(T) = \frac{-\gamma\delta^{\mathrm{T}}\ln\delta T - \gamma(1-\delta^{\mathrm{T}}) + \alpha}{T^2} = 0.$$

Получаем следующее уравнение:

$$\delta^{\mathrm{T}}(1 - T\ln\delta) = 1 - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Решим его графически. Обозначим $W(T) = \delta^{\mathrm{T}}(1 - T\ln\delta)$.

$$W(0) = \delta^0 = 1;$$
$$W'(T) = \delta^{\mathrm{T}}\ln\delta - \delta^{\mathrm{T}}T\ln^2\delta - \delta^{\mathrm{T}}\ln\delta = -\delta^{\mathrm{T}}T\ln^2\delta < 0;$$
$$\lim_{T\to\infty} W(T) = 0.$$

Следовательно, функция $W(T)$ всегда положительна и монотонно убывает. График ее изображен на рис. 2. Графиком правой части уравнения является прямая, параллельная оси Ox.

При $\alpha < \gamma$ графики пересекаются и существует единственное решение уравнения $\delta^{\mathrm{T}}(1 - T\ln\delta) = 1 - \frac{\alpha}{\gamma}$. Очевидно, что это точка максимума. Тем самым доказана следующая

Теорема 1. При $\alpha < \frac{c\lambda}{ln(1+r_0)} + \frac{c_{\text{хр}}\lambda}{ln^2(1+r_0)}$ функция прибыли имеет единственную точку максимума. При $\alpha \geqslant \frac{c\lambda}{ln(1+r_0)} + \frac{c_{\text{хр}}\lambda}{ln^2(1+r_0)}$ функция прибыли монотонно возрастает на всем промежутке $(0, \infty)$ и при этом значение прибыли всегда отрицательно и меньше величины $-\beta\lambda - \frac{c_{\text{хр}}\lambda}{\ln(1+r_0)}$.

Таким образом, при определенных условиях существует такой период завоза продукции, при котором вложенные деньги используются максимально эффективно, принося наибольшую прибыль. Точка максимума находится как единственное решение уравнения $\delta^{\text{T}}(1 + T\ln\delta) = 1 - \frac{\alpha}{\gamma}$.

3. Задача с ограничением на оборотный капитал

Описанный выше подход является математической основой моделей, реализованных на практике в сетевых торговых структурах. В многономенклатурных системах определяется, какие товары завозить и в каком объеме с учетом текущего спроса, цен закупки и продажи, стоимости доставки и хранения. Критерием является максимизация удельной приведенной прибыли. Используемая модель позволяет учитывать различные дополнительные ограничения по страховым запасам товаров, временным лагам и т.д. Сроки и объемы заказов рассчитываются автоматически программой-роботом без участия работников фирмы.

Сложности возникают, когда при формировании заявки общая стоимость заказываемых товаров может оказаться больше имеющихся в наличии свободных денег. Во-первых, стоимость заявки колеблется, так как в разные моменты времени завозятся разные виды и объемы товаров. Во-вторых, размер оборотного капитала может сократиться, например в период уплаты налогов или при внешнем отвлечении оборотных средств. В такой ситуации приходится либо сокращать заказ, либо брать кредит. Сокращение заказа приводит к дополнительным издержкам. Кредит уменьшает прибыль из-за выплаты процентов. Ниже построена модель и разработан алгоритм решения задачи минимизации издержек в случае ограничения на объем оборотного капитала.

Опишем параметры задачи:

N — количество видов товара;

α_i — стоимость доставки одной партии товара i;

β_i — цена закупки единицы продукции товара i;

$\alpha_i + \beta_i v_i$ — стоимость заказа и доставки партии товара i объемом v_i;

λ_i — интенсивность продажи товара i;

c_i — цена продажи единицы товара i;

$c_i^{\text{хр}}$ — стоимость хранения единицы товара i в единицу времени;

r_0 — ставка альтернативного безрискового ликвидного размещения капитала.

В текущий момент времени для каждого товара i с нулевым остатком на складе требуется найти период завоза T_i, при котором удельная приведенная прибыль $U_i(T_i)$, равная

$$\frac{1}{T_i}\Big(\frac{c_i\lambda_i}{ln(1+r_0)}\frac{(1+r_0)^{T_i}-1}{(1+r_0)^{T_i}} - \beta_i T_i \lambda_i -$$
$$-\frac{c_i^{\text{хр}}\lambda_i}{ln^2(1+r_0)}\left(T_i \ln(1+r_0) + \frac{1}{(1+r_0)^{T_i}} - 1\right)\Big),$$

будет максимальна.

Отметим, что параметры задачи постоянны только на определенном временном промежутке. При следующем заказе товаров используются новые, актуальные на момент расчета значения параметров. Сделаем еще некоторые естественные допущения, которые не влияют на общность рассматриваемой модели. Заказы невозможно делать в любой момент времени. Дискретность планирования во времени естественна для экономических задач. Если выбрать подходящую единицу измерения, то можно рассматривать только целочисленные моменты времени. Временные лаги при отгрузке и доставке товара учитывать не будем, так как это не влияет на суть задачи.

При этих условиях достаточно рассматривать только такие объемы завоза, чтобы товар заканчивался в целочисленные моменты времени, и новый завоз делать, когда остаток товара будет равен нулю. Тогда и значения T_i должны быть целыми. Действительно, если T_i не является целым, то в момент времени $\lfloor T_i \rfloor$ все равно придется делать очередной завоз, так как остатка $(T_i - \lfloor T_i \rfloor)\lambda_i$ до следующего завоза не хватит. Целочисленный оптимум $U_i(T_i)$ обозначим через T_i^*. Соответствующее значение объема завозимого товара равно $v_i^* = T_i^* \lambda_i$.

Очередная заявка формируется в текущий момент $t \in Z^+$. Закупаем только те товары, которые к этому моменту заканчиваются. Без ограничения общности для удобства изложения перенумеруем их числами от 1 до n. Считываем из базы данных текущие параметры по этим позициям, далее по каждому товару $i = 1, \ldots, n$ находим целочисленные оптимумы T_i^* и соответствующие значения завозимых объемов $v_i^* = T_i^* \lambda_i$. Для их покупки потребуется

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i v_i^*)$$

единиц капитала. При наличии необходимой суммы заявка оплачивается и товар поставляется.

3.1. Задача сокращения заявки

Проблемы возникают, когда текущего капитала K не хватает для оплаты заявки целиком. На практике рассматриваются три варианта: сокращение заявки, банковский краткосрочный кредит, товарный кредит. Последние два варианта отличаются организационно, однако с позиций максимизации чистой приведенной прибыли между ними различий нет, часть дохода приходится отдавать. Рассмотрим сначала задачу сокращения заявки, а потом обобщим ее на случай возможности использования кредитов.

Введем переменную $x_i \leqslant v_i^*$ — объем заказа товара $i = 1, \ldots, n$. Как было упомянуто выше, T_i является целым числом, и, значит, $x_i \in \{\lambda_i, 2\lambda_i, 3\lambda_i, \ldots$

$\ldots, v_i^*\}$. Здесь $x_i \geqslant \lambda_i$, так как спрос должен быть удовлетворен. Сокращение заказа до уровня x_i приводит к потере прибыли в размере $H_i(x_i) = U_i\left(\frac{v_i^*}{\lambda_i}\right) - U_i\left(\frac{x_i}{\lambda_i}\right)$. Отметим, что на множестве $\{\lambda_i, 2\lambda_i, 3\lambda_i, \ldots, v_i^*\}$ функция $H_i(x_i)$ монотонно убывает.

Таким образам, если $K < \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i v_i^*)$, то денег на оплату текущей заявки не хватает и закупки необходимо сократить. При этом желательно, чтобы потери прибыли были минимальны. Получаем следующую модель:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(x_i) \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i x_i) \leqslant K,$$
$$x_i \in \{\lambda_i, 2\lambda_i, 3\lambda_i, \ldots, v_i^*\},\ i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что в данной постановке $K \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i \lambda_i)$, так как до следующего завоза спрос должен быть удовлетворен. Величину $\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i \lambda_i)$ обозначим через $K_{\min}$.

Для решения данной задачи используем схему динамического программирования [21]. Обозначим через $\varphi(m,k)$ оптимальное значение целевой функции при текущем капитале k и подмножестве товаров $\{1, \ldots, m\}$, где $m = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, K$. Закупка товара m в количестве x_m допустима, если $x_m \in \{\lambda_m, 2\lambda_m, 3\lambda_m, \ldots, v_m^*\}$ и $\sum\limits_{i=1}^{m-1}(\alpha_i + \beta_i \lambda_i) + \alpha_m + \beta_m x_m \leqslant k$. Множество допустимых значений x_m обозначим через $P(m,k)$.

Для вычисления $\varphi(m,k)$ перебираем все значения $x_m \in P(m,k)$. Если товар m закупаем в объеме x_m, то получаем подзадачу

$$\sum_{i=1}^{m-1} H_i(x_i) + H_m(x_m) \to \min,$$
$$\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_i + \beta_i x_i) \leqslant k - (\alpha_m + \beta_m x_m),$$
$$x_i \in \{\lambda_i, 2\lambda_i, 3\lambda_i, \ldots, v_i^*\}, i = 1, \ldots, m-1,$$

оптимум для которой равен $\varphi(m-1, k - \alpha_m - \beta_m x_m)$. Таким образом имеем рекуррентное соотношение

$$\varphi(m,k) = \min_{x_m \in P(m,k)} \{H_m(x_m) + \varphi(m-1, k - \alpha_m - \beta_m x_m)\}.$$

Для нахождения $\varphi(n,k)$ данное рекуррентное соотношение необходимо реализовать в двойном цикле $m = 2, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, K$ при начальных условиях $\varphi(1,k) = H_1(x_1)$, где $x_1 = \min\{\lfloor \frac{k-\alpha_1}{\beta_1\lambda_1} \rfloor \lambda_1, v_1^*\}$. Восстановление оптимального решения осуществляется обратным ходом по стандартной схеме. Заметим, что реализация алгоритма требует целочисленности величин $\alpha_m + \beta_m x_m$, что может быть обеспечено подбором единиц измерения капитала.

Трудоемкость алгоритма псевдополиномиально зависит от длины записи входных данных и составляет $O\left(K \sum\limits_{m=1}^{n} T_m^*\right)$ операций, где K — имеющийся капитал в выбранных единицах измерения, T_m^* — оптимальный период завоза товара m.

3.2. Формирование заявки при возможности использования кредитов

Обобщим выписанную модель на случай возможности использования кредитов. Ставка по кредиту r известна. Переменной D будем обозначать размер кредита. Как и ранее, $K_{\min} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i\lambda_i)$ — это минимально необходимый объем оборотных средств. Введем также величину $K_{\max} = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i\lambda_i T_i^*)$ — размер средств, достаточный для полного обеспечения заявки.

В случае, если минимально необходимый размер оборотных средств $K_{\min}$ больше наличного капитала K, размер кредита не может быть меньше величины $K_{\min} - K$. Максимальное значение кредита D не превосходит $K_{\max} - K$.

Приведенные издержки на использование кредита составят $\frac{D(1+r)}{1+r_0} - D$. Размер доступного капитала будет равен $K + D$. Получаем следующую модель:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(x_i) + \frac{D(1+r)}{1+r_0} - D \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i x_i) \leqslant K + D,$$

$$\max\{0, K_{\min} - K\} \leqslant D \leqslant K_{\max} - K,$$
$$x_i \in \{\lambda_i, 2\lambda_i, 3\lambda_i, \ldots, v_i^*\}.$$

Если переменную D зафиксировать, то величина $\frac{D(1+r)}{1+r_0} - D$ будет константой и получим задачу, описанную в предыдущем параграфе, с начальным капиталом $K + D$. Ее решаем описанным там же алгоритмом и находим все $\varphi(m,k)$ для $m = 1,\ldots,n$ и $k = 1,\ldots,K_{\max}$. После этого остается перебрать все целые значения $D \in [\max\{0, K_{\min} - K\}, K_{\max} - K]$ и найти минимум

$$\min_{D \in [\max\{0, K_{\min}-K\}, K_{\max}-K]} \left\{ \varphi(n, K+D) - D + \frac{D(1+r)}{1+r_0} \right\}.$$

Трудоемкость алгоритма составит $O\left(K_{\max}\sum\limits_{i=1}^{n}T_i^*\right)$ операций.

Расчеты на реальных данных показали актуальность модели с кредитами. Часто оптимум по D достигается внутри интервала

$$\left[\max\{0, K_{\min}-K\},\ K_{\max}-K\right],$$

т.е. заявка все-таки сокращается, но ее часть оплачивается за счет кредита. Аналогичный результат был получен для задачи календарного планирования инвестиционных проектов, когда за счет кредитов выполнялась только часть работ проекта [22].

4. Формирование заявки с учетом неравномерности потребления

В рассмотренных моделях в момент формирования заявки предполагалось, что интенсивность потребления каждого товара не меняется в течение всего периода его реализации. При следующем формировании заявки будет использоваться другое актуальное значение λ_i и остатков на складе. При этом значение λ_i могло измениться. Таким образом, функция интенсивности потребления хоть и являлась кусочно-постоянной по времени, но в рассматриваемый период была константой. В реальности процесс реализации товара может оказаться неравномерным. Поэтому наиболее эффективно вместо константы λ_i использовать функцию $\lambda_i(t)$, $t=1,\ldots,T$, где за $t=0$ берем текущий момент времени очередного заказа. Отметим, что в рассматриваемой практической задаче величины $\lambda_i(t)$ на период планирования T достаточно хорошо прогнозируются. Это обусловлено и спецификой задачи, и небольшим горизонтом планирования. Несмотря на это, в модели необходимо учесть, что реальный спрос может отклониться от заданного. Поэтому необходим некоторый механизм, который устраняет данную проблему. Как вариант можно формировать страховой запас, но это приводит к снижению прибыли и дополнительной оптимизации. Получаем две противоположные тенденции. С одной стороны, нежелательно возникновения дефицита товара на складе, так как это приводит к недополученной прибыли. С другой стороны, лишние запасы на складе уменьшают прибыль. Задачи такого типа исследуются в многочисленных публикациях, например [23]. В данной задаче ситуация проще. Так как в каждый целочисленный момент ситуация на складе отслеживается, то в момент T_i-1 можно сравнить остаток на складе и значение $\lambda_i(T_i)$. Если остаток меньше, то очередной заказ товара делаем в момент T_i-1. Пусть в момент очередного заказа на складе имеется остаток $R_i \geqslant 0$, которого не хватает для покрытия спроса на ближайший единичный период времени.

При этих условиях объем заказа товара i на период T_i составит $\sum\limits_{t=1}^{T_i}\lambda_i(t)-$ $-R_i$, а начальный объем на складе $\sum\limits_{t=1}^{T_i}\lambda_i(t)$. Приведенный доход будет равен $Q(T_i)=\sum\limits_{t=1}^{T_i}\frac{c_i\lambda_i(t)}{(1+r_0)^t}$. Здесь можно учесть и изменения цен продажи, используя вместо c_i заданные значения $c_i(t)$:

$$Q_i(T_i) = \sum_{t=1}^{T_i} \frac{c_i(t)\lambda_i(t)}{(1+r_0)^t}.$$

Величины α_i и β_i учитываются только в момент $t = 0$. Поэтому нет смысла их варьировать.

Выпишем затраты на хранение $Z_i(T_i)$. Остаток товара i на складе на момент $t = 1, \dots, T_i$ составит $\sum\limits_{\tau=1}^{T_i} \lambda_i(\tau) - \sum\limits_{\tau=1}^{t} \lambda_i(\tau) = \sum\limits_{\tau=t+1}^{T_i} \lambda_i(\tau)$. Средний остаток на интервале $[t-1, t]$, за который приходится платить, равен $\sum\limits_{\tau=t+1}^{T_i} \lambda_i(\tau) + \frac{\lambda_i(t)}{2}$. Можно также учесть изменение удельной стоимости хранения товаров во времени. В результате получаем следующую формулу:

$$Z_i(T_i) = \sum_{t=1}^{T_i} \frac{\left(\sum\limits_{\tau=t+1}^{T_i} \lambda_i(\tau) + \frac{\lambda_i(t)}{2}\right) c_i^{\text{хр}}(t)}{(1+r_0)^t}.$$

Функция удельной приведенной прибыли будет равна

$$U_i(T_i) = \frac{1}{T_i}\left(Q_i(T_i) - \alpha_i - \beta_i \sum_{t=1}^{T_i} \lambda_i(t) - Z_i(T_i)\right).$$

Оптимум T_i^* находим простым перебором для $T_i = 1, 2, \dots,$ до тех пор пока функция $U_i(T_i)$ не начнет убывать.

Уточним математическую модель задачи. Пусть, как и ранее, $\{1, \dots, n\}$ — это множество номеров товаров, заказываемых в момент $t = 0$. Оптимальный объем товара i в заявке равен $\sum\limits_{t=1}^{T_i^*} \lambda_i(t) - R_i$. Тогда стоимость оптимальной заявки составит

$$K_{\max} = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i + \beta_i \left(\sum_{t=1}^{T_i^*} \lambda_i(t) - R_i\right)\right).$$

Средства, необходимые для удовлетворения минимального спроса, будут равны

$$K_{\min} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i(\lambda_i(1) - R_i)).$$

Переменная x_i может принимать значения $\sum\limits_{t=1}^{T_i} \lambda_i(t) - R_i,\ T_i = 1, \dots, T_i^*$. Функция потерь $H_i(x_i)$ определяется как отклонение от оптимального значения прибыли $U_i(T_i^*) - U_i(T_i)$. Таким образом, итоговая модель сокращения заявки и оптимизации кредитных заимствований принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i(x_i) + \frac{D(1+r)}{1+r_0} - D \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i x_i) \leqslant K + D,$$

$$\max\{0, K_{\min} - K\} \leqslant D \leqslant K_{\max} - K,$$

$$x_i \in \left\{ \sum_{t=1}^{T_i} \lambda_i(t) - R_i \mid T_i = 1, \ldots, T_i^* \right\}.$$

Для решения сформулированной задачи используем описанный выше алгоритм динамического программирования. Алгоритм реализован и внедрен в логистической системе управления закупками одного из дистрибьютеров фармацевтического рынка. Общее число позиций в номенклатуре товаров составляет более 40 тысяч. Ежедневный заказ включает несколько тысяч наименований товаров. Оптовая отгрузка осуществляется через кросс-докинговый склад. База данных о ценах, спросе и других параметрах обновляется ежедневно. Информация об остатках на складе компании отслеживается в реальном режиме времени. Расчет заявки происходит в конце каждого дня с учетом текущих параметров системы.

5. Заключение

В работе исследована задача максимизации прибыли с учетом альтернативного использования капитала. Доказана теорема о единственности точки максимума функции прибыли. Построена модель задачи формирования заявки максимизации прибыли с учетом ограничения оборотного капитала, выявлены и обоснованы ее свойства, предложен и реализован алгоритм решения задачи, основанный на схеме динамического программирования. Предложен и реализован алгоритм решения задачи формирования заявки при возможности использования кредитов. Рассмотрен случай формирования заявки с учетом неравномерности потребления. Разработанный подход используется при оперативном управлении поставками в компании, торгующей медикаментами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilson R.H.* A Scientific Routine for Stock Control // Harvard Business Rev. 1934. No. 13. P. 116–128.
2. *Букан Дж., Кенигсберг Э.* Научное управление запасами. М.: Наука, 1967.
3. *Первозванский А.А.* Математические модели в управлении производством. М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит. 1975.
4. *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управление запасами. СПб.: Питер, 2001.
5. *Хедли Дж., Уайтин Т.* Анализ систем управления запасами. М.: Наука, 1969.

6. *Chandra M.J., Bahner M.L.* The effects of inflation and the time value of money on some inventory systems // Int. J. Product. Res. 1985. V. 23. No. 4. P.723–729.

7. *Бродецкий Г.Л.* Модели оптимизации систем управления запасами с учетом временной стоимости денег при ограничениях на размер капитала // Логистика и управление цепями поставок. 2007. № 2. С. 70–88.

8. *Бродецкий Г.Л.* Многономенклатурное управление запасами: новый подход к оптимизации решений // Логистика сегодня. 2014. № 1. С. 34–45.

9. *Brodetskiy G.L.* The new approach to inventory optimization // Int. J. Logist. Syst. Management (IJLSM). 2015. V. 22. No. 3. P. 251–266.

10. *Лукинский В.В.* Актуальные проблемы формирования теории управления запасами. СПб.: СПбГИЭУ, 2008.

11. *Лукинский В.В.* Управление запасами в цепях поставок: в 2 ч. Ч. 2: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. М.: Изд-во Юрайт, 2017.

12. *Бродецкий Г.Л., Герами В.Д., Колик А.В., Шидловский И.Г.* Управление запасами: многофакторная оптимизация процесса поставок. М.: Изд-во Юрайт, 2019.

13. *Бурлакова Н.И., Сервах В.В.* Максимизация чистой приведенной прибыли в задаче управления запасами // Сб. научных тр. VIII Междунар. школы-симпозиума “Анализ, управление, моделирование, развитие”. Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2014. С. 61–62.

14. *Бурлакова Н.И., Полянцева И.А., Сервах В.В.* Оптимизация закупок с учетом альтернативного использования капитала // Тез. докл. XVI Байкал. междунар. школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, ИСЭМ СО РАН, 2014. 32 с.

15. *Танаев В.С., Гордон В.С., Шафранский Я.М.* Теория расписаний. Одностадийные системы. М.: Наука, 1984.

16. *Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А.* Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989.

17. *Braun, O., Sotskov, Yu.N.* Scheduling personal finances via integer programming // J. Math. Modell. Algorithm., 2013. V. 12. No. 2. P. 179–199.

18. *Голами О., Сотсков Ю.Н, Вернер Ф. Затюпо О.С.* Эвристические алгоритмы для максимизации дохода и количества требований, обслуживаемых на параллельных приборах // АиТ. 2019. № 2. С. 125–151.

    Gholami O., Sotskov Y.N., Werner F., Zatsiupo A.S. Heuristic Algorithms to Maximize Revenue and the Number of Jobs Processed on Parallel Machines // Autom. Remote Control. 2019. Vo. 80. No. 2. P. 297–316.

19. *Chauhan S.S., Eremeev A.V., Romanova A.A., Servakh V.V., Woeginger G.J.* Approximation of the supply scheduling problem // Oper. Res. Lett. 2005. V. 33. No. 3. P. 249–254.

20. *Eremeev A.V., Romanova A.A., Chauhan S.S., Servakh V.V.* Approximate Solution of the Supply Management Problem // J. Appl Industr. Math. 2007. V. 1. No. 4. C. 1–9.

21. *Гимади Э.Х., Глебов Н.И.* Математические модели и методы принятия решений. Уч. пос. / Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та. 162с.

22. *Мартынова Е.А., Сервах В.В.* О задаче календарного планирования проектов с использованием кредитов // АиТ. 2012. № 3. С. 107–116.

    Martynova E.A., Servakh V.V. On Scheduling Credited Projects // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 3. P. 508–516.

23. *Singha K., Buddhakulsomsiri J., Parthanadee P.* Mathematical Model of (R,Q) Inventory Policy under Limited Storage Space for Continuous and Periodic Review Policies with Backlog and Lost Sales // Math. Probl. Engineer. December 2017. P. 1–9.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 17.07.2019

После доработки 15.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019