

© 2020 г. И.Н. ЛУЩАКОВА, канд. физ.-мат. наук (IrinaLushchakova@yandex.ru)  
(Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники, Минск)

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧКИ В ПЕРЕСЕЧЕНИИ ШАРОВ

Рассматривается задача определения точки в пересечении  $n$  шаров в евклидовом пространстве  $E^m$ . Для случая  $m = 2$  предлагаются два алгоритма сложности  $O(n^2 \log n)$  и  $O(n^3)$  операций. Для общего случая предлагается точный полиномиальный рекурсивный алгоритм, использующий ортогональное преобразование пространства  $E^m$ .

*Ключевые слова:* пересечение шаров, аппроксимация эллипсоидами выпуклого множества, полиномиальный алгоритм, доставка с помощью дронов, конфигурация роя дронов.

DOI: 10.31857/S0005231020050098

### 1. Введение

В [1] была сформулирована следующая задача. В  $m$ -мерном евклидовом пространстве  $E^m$  рассматривается множество  $n$  шаров. Каждый шар  $\mathcal{B}_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , задается указанием его центра  $O_i$  и радиуса  $R_i$ . Необходимо определить, является ли пересечение  $n$  шаров непустым множеством, и в случае положительного ответа найти точку из этого пересечения.

В [1] отмечается, что при  $m = 2$  данная задача является математической моделью для следующей практической задачи. На плоскости располагаются  $n$  передающих станций различной мощности. Сигнал от станции  $i$ , расположенной в точке  $O_i$ , может быть получен на расстоянии, не превышающем  $R_i$  единиц измерения. Необходимо определить, можно ли найти место для строительства принимающей станции (принимая во внимание только характеристики дальности распространения сигналов от передающих станций) таким образом, чтобы принимающая станция могла получать сигналы от всех передающих станций. Такая техническая интерпретация может быть обобщена и на случай трехмерного пространства ( $m = 3$ ), когда в модели учитывается высота расположения передающих и принимающей станций. Кроме того, в трехмерном случае рассматриваемой задаче можно придать различные интерпретации в контексте актуального направления, связанного с использованием непилотируемых летательных аппаратов (дронов) [2]. Например, жители небольших поселений, расположенных в труднодоступной гористой местности, могут использовать дроны для доставки лекарств, различных мелких товаров и почтовых пакетов. Стартовая площадка для дрона в населенном пункте  $i$  находится в точке  $O_i$ . С учетом технических характеристик дрона, которым владеют жители поселка  $i$ , может без дозаправки преодолеть расстояние, не превышающее  $2R_i$  единиц измерения (туда и обратно). Необходимо

определить координаты точки зависания воздушного транспортного средства (вертолета, дирижабля), используемого в качестве склада товаров, таким образом, чтобы этот склад был достижим для дронов каждого поселка. Аналогичная постановка может быть рассмотрена и при планировании доставки с помощью дронов лекарств, медицинских приборов, расходных материалов и т.д. различным бригадам спасателей в районах стихийных бедствий или широкомасштабных катастроф. При этом постоянно меняющаяся обстановка может потребовать многократного эффективного решения задачи определения координат точки зависания воздушного транспортного средства-склада, достижимого для дронов всех бригад спасателей.

В [1] предлагаются два подхода к решению рассматриваемой задачи в общем  $m$ -мерном случае. Первый подход связан с задачей минимизации линейной функции с квадратичными ограничениями. Вторым подходом основан на известном методе эллипсоидов (см., например, [3]). Следует отметить, что рассматриваемую задачу можно отнести к широкому классу задач аппроксимации эллипсоидами выпуклого множества в пространстве  $E^m$  [4]. Этот класс задач подразделяется на задачи внутренней и внешней аппроксимации. Решение рассматриваемой задачи может быть получено из решения следующей задачи внутренней аппроксимации: найти эллипсоид наибольшего объема, содержащийся в пересечении  $n$  заданных эллипсоидов, если это пересечение непусто (естественно, для решения интересующей задачи надо рассматривать частный случай, в формулировке которого эллипсоиды заменяются на шары). В [4] демонстрируется, что последняя задача может быть сведена к задаче выпуклого программирования. Аналогичная задача внешней аппроксимации может быть сформулирована следующим образом: найти эллипсоид наименьшего объема, содержащий пересечение заданных эллипсоидов, если это пересечение непусто. Однако (в отличие от указанной выше задачи внутренней аппроксимации) данная задача внешней аппроксимации является NP-трудной [4]. В [5] рассматривается ее частный случай: найти шар наименьшего радиуса, содержащий пересечение заданных  $n$  шаров. В [5] показано, что если пересечение заданных шаров непусто и  $n \leq m - 1$ , то задача нахождения шара наименьшего радиуса может быть решена с помощью задачи минимизации выпуклой квадратичной функции.

Следует отметить, что все ранее предложенные подходы к рассмотренным задачам с теоретической точки зрения являются полиномиальными. Однако их реализация на практике либо может оказаться не очень эффективной, особенно при больших значениях  $n$  (см., например, комментарий в [6], касающийся алгоритма эллипсоидов), либо затруднена в связи с достаточно абстрактным характером используемых конструкций (см., например, в [4] сведение задачи нахождения эллипсоида наибольшего объема, содержащегося в пересечении заданных эллипсоидов, к задаче выпуклого программирования). В данной статье представлен альтернативный геометрический подход к задаче нахождения точки в пересечении  $n$  шаров из пространства  $E^m$ , результатом которого явилась разработка точных полиномиальных алгоритмов ее решения. Предлагаемый подход использует известный аппарат линейной алгебры и аналитической геометрии.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описаны два алгоритма решения задачи для случая  $m = 2$ . Более специфический алгоритм *BALLS1* имеет вычислительную сложность  $O(n^2 \log n)$  операций. Алгоритм *BALLS2* проще по своей структуре, но имеет более высокую сложность  $O(n^3)$  операций. В разделе 3 рассматривается общий  $m$ -мерный случай, для которого разработан рекурсивный алгоритм *BALLS3*( $m, n$ ). В процессе работы алгоритм *BALLS3*( $m, n$ ) использует либо алгоритм *BALLS1*, либо алгоритм *BALLS2*, от чего зависит его вычислительная сложность —  $O(n^{2m-4}(nm^2 + m^3 + n^2 \log n))$  или  $O(n^{2m-4}(nm^2 + m^3 + n^3))$  операций. Заключительные замечания представлены в разделе 4.

## 2. Алгоритмы определения точки в пересечении кругов

Несмотря на то, что в данном разделе будут описаны алгоритмы определения точки в пересечении кругов на плоскости, для построения первого алгоритма необходимо точки на плоскости трактовать как точки в трехмерном пространстве с нулевой третьей координатой. Поэтому введем в рассмотрение декартову прямоугольную систему координат  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Пусть на плоскости  $Oxy$  имеется  $n$  кругов. Каждый круг  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , задается указанием его центра  $O_i(x_i, y_i, 0)$  и радиуса  $r_i$ . Границей круга  $B_i$  является окружность  $C_i$ , определяемая уравнением  $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r_i^2$ . Занумеруем круги  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , в порядке невозрастания их радиусов:  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$ .

### 2.1. Предварительная обработка

Вначале проверим, пересекаются ли заданные круги попарно. Для каждой пары кругов  $B_i$  и  $B_j$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $i < j \leq n$ , вычислим расстояние  $d_{ij}$  между их центрами.

Если  $d_{ij} > r_i + r_j$ , то круги  $B_i$  и  $B_j$  не пересекаются, следовательно, задача не имеет решения.

Если  $d_{ij} \leq r_i - r_j$ , то круг  $B_j$  находится внутри круга  $B_i$ . Поэтому можно удалить из дальнейшего рассмотрения круг  $B_i$  и решать задачу для  $n - 1$  круга.

Если  $d_{ij} = r_i + r_j$ , то круги  $B_i$  и  $B_j$  имеют единственную общую точку  $M$  — точку касания их границ  $C_i$  и  $C_j$ . Найдем вектор  $\overrightarrow{O_i O_j}$  и нормируем его. Пусть  $\vec{e}_{ij}$  — это орт вектора  $\overrightarrow{O_i O_j}$ . От точки  $O_i$  отложим вектор  $r_i \vec{e}_{ij}$ , получим точку  $M$  — точку касания кругов  $B_i$  и  $B_j$ . Остается проверить, принадлежит ли точка  $M$  всем остальным кругам. Если да, то найденная точка  $M$  является решением задачи. В противном случае задача не имеет решения.

### 2.2. Основная часть алгоритма *BALLS1*

В дальнейшем изложении будем без ограничения общности считать, что для любой пары кругов  $B_i$  и  $B_j$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $i < j \leq n$ , выполняется неравенство  $r_i - r_j < d_{ij} < r_i + r_j$ . Это означает, что окружности  $C_i$  и  $C_j$  пересекаются в двух точках.

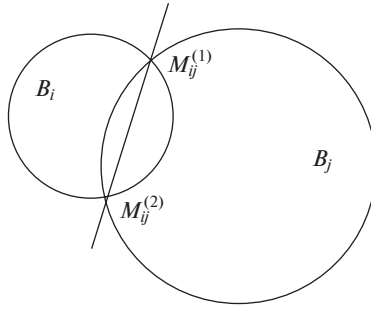


Рис. 1. Пересечение кругов  $B_i$  и  $B_j$ .

Зафиксируем одну из окружностей, например окружность  $C_i$ , и найдем точки пересечения ее с какой-либо другой окружностью  $C_j$ ,  $i \neq j$ . Для этого решим систему уравнений:

$$(1) \quad \begin{cases} (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = r_i^2, \\ (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 = r_j^2. \end{cases}$$

Вычитая первое уравнение системы (1) из второго, получим уравнение вида  $fx + gy + h = 0$ , задающее прямую, проходящую через точки пересечения окружностей  $C_i$  и  $C_j$ . Выражая  $y$  из уравнения  $fx + gy + h = 0$  и подставляя его в первое уравнение системы (1), получим квадратное уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , которое имеет два различных действительных корня  $x_{ij}^{(1)}$  и  $x_{ij}^{(2)}$ . Из уравнения  $fx + gy + h = 0$  получим соответствующие значения  $y_{ij}^{(1)}$  и  $y_{ij}^{(2)}$  и тем самым определим точки  $M_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(1)}, 0)$  и  $M_{ij}^{(2)}(x_{ij}^{(2)}, y_{ij}^{(2)}, 0)$  пересечения окружностей  $C_i$  и  $C_j$ . Отметим, что круги  $B_i$  и  $B_j$  гарантированно будут иметь общий отрезок  $[M_{ij}^{(1)}, M_{ij}^{(2)}]$  (см. рис. 1).

Точки  $M_{ij}^{(1)}$  и  $M_{ij}^{(2)}$  разбивают окружность  $C_i$  на две дуги. В дальнейшем представляет интерес только та дуга, которая находится внутри круга  $B_j$ . Договоримся, что движение вдоль выбранной дуги будет осуществляться против часовой стрелки. Тем самым одна из точек  $M_{ij}^{(1)}$ ,  $M_{ij}^{(2)}$  будет выбрана в качестве начальной точки пути, а другая — в качестве конечной. Рассмотрим тройку некопланарных векторов  $\overrightarrow{O_i O_j}$ ,  $\overrightarrow{M_{ij}^{(1)} M_{ij}^{(2)}}$ ,  $\vec{k}$  и найдем их смешанное произведение. Если  $(\overrightarrow{O_i O_j}, \overrightarrow{M_{ij}^{(1)} M_{ij}^{(2)}}, \vec{k}) > 0$ , т.е. тройка векторов  $\overrightarrow{O_i O_j}$ ,  $\overrightarrow{M_{ij}^{(1)} M_{ij}^{(2)}}$ ,  $\vec{k}$  — правая, то точка  $M_{ij}^{(1)}$  будет начальной точкой пути (покрасим ее белым цветом), а точка  $M_{ij}^{(2)}$  будет конечной точкой пути (покрасим ее черным цветом). Если же  $(\overrightarrow{O_i O_j}, \overrightarrow{M_{ij}^{(1)} M_{ij}^{(2)}}, \vec{k}) < 0$ , т.е. тройка векторов  $\overrightarrow{O_i O_j}$ ,  $\overrightarrow{M_{ij}^{(1)} M_{ij}^{(2)}}$ ,  $\vec{k}$  — левая, то точка  $M_{ij}^{(2)}$  будет начальной точкой пути (покрасим ее белым цветом), а точка  $M_{ij}^{(1)}$  будет конечной точкой пути (покрасим ее черным цветом). Указание начальной (белой) и конечной (черной) точек пути

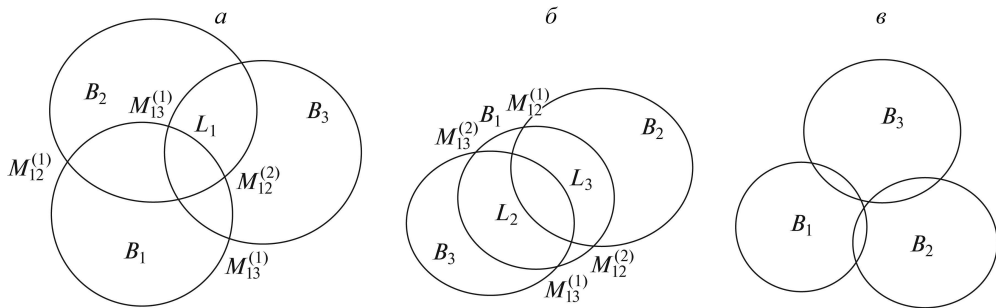


Рис. 2. Ситуации взаимного расположения трех кругов.

при договоренности о направлении обхода против часовой стрелки полностью определяет дугу окружности  $C_i$ , находящуюся внутри круга  $B_j$ . Обозначим такую дугу через  $L_{ij}$  и назовем ее подходящей дугой окружности  $C_i$  для круга  $B_j$ .

Рассмотрим последовательно все круги  $B_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $j \neq i$ , и найдем множество всех подходящих дуг  $L_{ij}$  окружности  $C_i$ . Если пересечение  $L_i$  всех подходящих дуг непусто, т.е.  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} \neq \emptyset$ , то дуга  $L_i$  окружности  $C_i$  будет находиться внутри каждого круга  $B_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $j \neq i$ . Кроме того, хорда, соединяющая концы дуги  $L_i$ , будет находиться внутри пересечения всех кругов  $B_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Отметим, что дуга  $L_i$  является частью границы области пересечения всех кругов. Если же пересечение всех подходящих дуг пусто, т.е.  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} = \emptyset$ , то либо никакая часть границы области пересечения всех кругов не принадлежит окружности  $C_i$  (т.е. пересечение всех кругов находится внутри открытого круга  $B_i \setminus C_i$ ), либо пересечение всех кругов пусто. Если пересечение всех кругов находится внутри открытого круга  $B_i \setminus C_i$ , то найдется другой круг, например круг  $B_k$ ,  $k \neq i$ , такой что часть границы области пересечения всех кругов является некоторой дугой  $L_k$  окружности  $C_k$ . Перебирая последовательно все круги  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , либо найдем такой круг  $B_k$ , либо придем к выводу, что пересечение всех кругов пусто.

Рассмотрим все возможные типичные ситуации взаимного расположения кругов на примере трех кругов (см. рис. 2).

1. Дуга  $L_1$  окружности  $C_1$  является пересечением подходящих дуг  $L_{12}$  и  $L_{13}$ , при этом дуга  $L_1$  является частью границы области пересечения кругов  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$ .

2. Граница области пересечения кругов  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  не содержит какой-либо дуги окружности  $C_1$ . При этом граница области пересечения всех кругов состоит из дуг  $L_2$  и  $L_3$  окружностей  $C_2$  и  $C_3$ .

3. Пересечение попарно пересекающихся кругов  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  пусто.

Рассмотрим вопрос об эффективном определении пересечения  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij}$  всех подходящих дуг окружности  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Каждая подходящая дуга  $L_{ij}$  определяется заданием точек  $M_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(1)}, 0)$  и  $M_{ij}^{(2)}(x_{ij}^{(2)}, y_{ij}^{(2)}, 0)$  пересечения окружностей  $C_i$  и  $C_j$  и указанием, какая

из этих точек является начальной, а какая — конечной точкой пути. Поставим в соответствие каждой точке  $M_{ij}^{(l)}(x_{ij}^{(l)}, y_{ij}^{(l)}, 0)$ ,  $1 \leq l \leq 2$ , элемент  $\phi_{ij}^{(l)}(x_{ij}^{(l)}, y_{ij}^{(l)}, \alpha_{ij}^{(l)})$ . Индикатор  $\alpha_{ij}^{(l)}$  указывает, в какой цвет покрашена точка  $M_{ij}^{(l)}$ . Если  $M_{ij}^{(l)}$  покрашена в черный цвет, то полагаем  $\alpha_{ij}^{(l)} = 1$ , в противном случае  $\alpha_{ij}^{(l)} = 0$ . Таким образом, каждая подходящая дуга определяется заданием двух элементов  $\phi_{ij}^{(1)}$  и  $\phi_{ij}^{(2)}$ .

Пусть для окружности  $C_i$  найдено множество всех элементов  $\phi_{ij}^{(l)}$ ,  $1 \leq l \leq 2$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,  $j \neq i$ . Разобьем множество элементов  $\phi_{ij}^{(l)}$  на два подмножества. Если  $y_{ij}^{(l)} < 0$ , то отнесем элемент  $\phi_{ij}^{(l)}(x_{ij}^{(l)}, y_{ij}^{(l)}, \alpha_{ij}^{(l)})$  ко множеству  $N_1$ , а если  $y_{ij}^{(l)} \geq 0$ , то отнесем  $\phi_{ij}^{(l)}$  ко множеству  $N_2$ . Таким образом, множество  $N_1$  (множество  $N_2$ ) элементов  $\phi_{ij}^{(l)}$  задает множество точек  $M_{ij}^{(l)}$  окружности  $C_i$ , которым можно поставить во взаимно однозначное соответствие их проекции на ось  $Ox$  (естественно, совпадающие точки  $M_{ij}^{(l)}$  проектируются в одинаковые точки на оси  $Ox$ ).

Упорядочим множество  $N_1$  элементов  $\phi_{ij}^{(l)}$  по неубыванию  $x_{ij}^{(l)}$ , а множество  $N_2$  по невозрастанию  $x_{ij}^{(l)}$ . Полученные последовательности элементов  $\phi_{ij}^{(l)}$  обозначим соответственно как  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Составим последовательность  $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ , которая представляет собой перечисление начальных и конечных точек подходящих дуг  $L_{ij}$  в процессе обхода окружности  $C_i$  против часовой стрелки. Занумеруем элементы последовательности  $\pi$ , обозначив их через  $\psi_k(x_k, y_k, \alpha_k)$ , т.е.  $\pi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{2n-2})$ .

Просматривая последовательность  $\pi$  слева направо, выделим в ней подпоследовательности элементов, соответствующих совпадающим точкам окружности  $C_i$ , если такие существуют. Пусть  $\bar{\pi} = (\psi_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_{k+t})$  — одна из таких подпоследовательностей. У всех элементов  $\psi_p(x_p, y_p, \alpha_p)$  подпоследовательности  $\bar{\pi}$  одинаковые значения  $x_p$  и одинаковые значения  $y_p$ , а вот индикаторы  $\alpha_p$  у них могут быть разные. Разобьем элементы  $\bar{\pi}$  на две подпоследовательности: к подпоследовательности  $\bar{\pi}'$  отнесем все элементы, у которых  $\alpha_p = 0$ , остальные элементы отнесем к подпоследовательности  $\bar{\pi}''$  (у них  $\alpha_p = 1$ ). Если у элемента  $\psi_{k-1}$ , предшествующего подпоследовательности  $\bar{\pi}$  в последовательности  $\pi$ , индикатор  $\alpha_{k-1} = 0$ , то в последовательности  $\pi$  заменим подпоследовательность  $\bar{\pi}$  подпоследовательностью  $(\bar{\pi}', \bar{\pi}'')$ . Если же  $\alpha_{k-1} = 1$ , то заменим в  $\pi$  подпоследовательность  $\bar{\pi}$  подпоследовательностью  $(\bar{\pi}'', \bar{\pi}')$ . Аналогичные действия проделаем со всеми подпоследовательностями элементов, соответствующих совпадающим точкам окружности  $C_i$ . Такие построения выполняются с целью минимизации количества переключений индикатора  $\alpha_k$  в процессе перечисления начальных и конечных точек подходящих дуг  $L_{ij}$  при обходе окружности  $C_i$ .

Перенумеруем элементы преобразованной последовательности  $\pi$  в соответствии с их расположением. Если у соседних элементов  $\psi_k(x_k, y_k, \alpha_k)$  и  $\psi_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}, \alpha_{k+1})$ ,  $1 \leq k \leq 2n - 3$ , последовательности  $\pi$  имеем  $\alpha_k \neq$

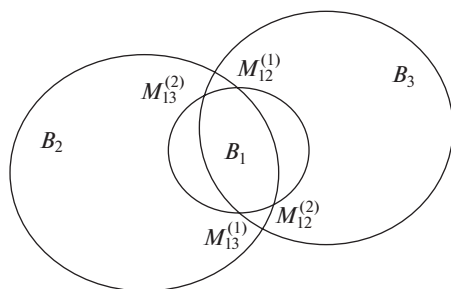


Рис. 3. Граница области пересечения кругов содержит две дуги окружности  $C_1$ .

$\neq \alpha_{k+1}$ , то назовем эту ситуацию переключением индикатора. Просматривая слева направо последовательность  $\pi$ , подсчитаем у нее количество  $\rho$  переключений индикатора.

*Лемма 1.* Пусть последовательность  $\pi$  элементов  $\psi_k(x_k, y_k, \alpha_k)$ ,  $1 \leq k \leq 2n - 2$ , соответствующих начальным и конечным точкам подходящих дуг окружности  $C_i$ , построена по правилам, описанным выше. Тогда если  $1 \leq \rho \leq 2$ , то пересечение  $L_i$  всех подходящих дуг окружности  $C_i$  непусто, т.е.  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} \neq \emptyset$ .

В Приложении приводится конструктивное доказательство леммы 1, в процессе которого показано, как найти дугу  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} \neq \emptyset$ , а значит, решить задачу, поскольку любая точка на дуге  $L_i$ , а также любая точка, принадлежащая хорде, соединяющей концы  $L_i$ , принадлежит пересечению всех кругов.

Отметим, что если  $\rho \geq 3$ , то, как показывает следующий пример, никакого вывода о существовании непустого пересечения  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij}$  подходящих дуг окружности  $C_i$  сделать нельзя.

*Пример 1.* Пусть задана последовательность индикаторов  $(0, 1, 0, 1)$ . Для этой последовательности количество переключений индикатора  $\rho = 3$ . На рис. 2,б и рис. 2,в изображены две возможные ситуации. Для каждой из этих ситуаций пересечение подходящих дуг окружности  $C_1$  пусто. На рис. 3 изображена третья возможная ситуация, когда пересечение подходящих дуг окружности  $C_1$  состоит из двух дуг  $\smile M_{12}^{(1)} M_{13}^{(2)}$  и  $\smile M_{13}^{(1)} M_{12}^{(2)}$ . Заметим, что при этом градусная мера по крайней мере одной из дуг  $L_{12}$  и  $L_{13}$  больше  $180^\circ$ .

*Лемма 2.* Градусная мера подходящей дуги  $L_{ij}$  окружности  $C_i$  больше  $180^\circ$  только в том случае, если ее радиус  $r_i$  меньше радиуса  $r_j$  окружности  $C_j$ ,  $j \neq i$ .

*Следствие 1.* Если радиус  $r_i$  окружности  $C_i$  больше радиусов всех остальных окружностей  $C_j$ ,  $j \neq i$ , и  $\rho \geq 3$ , то  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} = \emptyset$ .

Напомним, что все круги  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , занумерованы в порядке невозрастания их радиусов:  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$ . Рассмотрим круг  $B_1$  и определим для окружности  $C_1$  количество  $\rho$  переключений индикатора. В соответствии с леммой 1 и следствием 1 для окружности  $C_1$ , имеющей наибольший радиус, в зависимости от значения  $\rho$  можно сделать вывод, имеет ли место ситуация  $L_1 \neq \emptyset$ .



Предположим, исследовали окружность  $C_1$  и пришли к выводу, что  $L_1 = \emptyset$ . Если при этом пересечение всех кругов — непустое множество, то оно находится внутри открытого круга  $B_1 \setminus C_1$ . Временно удаляем круг  $B_1$  и переходим к рассмотрению круга  $B_2$ , т.е. круга со следующим по величине радиусом. Процесс продолжаем до тех пор, пока не найдем круг  $B_k$  такой, что для окружности  $C_k$  имеем  $L_k = \bigcap_{k < j \leq n} L_{kj} \neq \emptyset$ . Пусть  $M_{kp}$  и  $M_{kq}$  — начальная и конечная точки дуги  $L_k$  окружности  $C_k$ . По построению точка  $M_{kp}$  (и вообще любая точка дуги  $L_k$  и любая точка хорды, соединяющей ее концы) принадлежит всем кругам  $B_k, B_{k+1}, \dots, B_n$ . Остается проверить, принадлежит ли точка  $M_{kp}$  (либо какая-то из указанных точек) кругам  $B_1, \dots, B_{k-1}$ . Если да, то проверяемая точка — искомая. В противном случае задача не имеет решения.

Ниже приводится формальное описание алгоритма.

### Алгоритм 1. BALLS1

*Вход:* Круги  $B_1, \dots, B_n$ , заданные указанием их центров  $O_i(x_i, y_i, 0)$  и радиусов  $r_i, i = \overline{1, n}$ .

*Выход:* Общая точка для всех кругов  $B_1, \dots, B_n$  либо ответ, что задача не имеет решения.

1. Занумеровать круги  $B_1, \dots, B_n$  таким образом, что  $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$ .
2. **FOR**  $i = 1$  to  $n$  **DO**
3.  $N_1 = \emptyset, N_2 = \emptyset$ .
4.     **FOR**  $j = i + 1$  to  $n$  **DO**
5.         Для окружностей  $C_i$  и  $C_j$  найти их точки пересечения  $M_{ij}^{(1)}(x_{ij}^{(1)}, y_{ij}^{(1)}, 0)$  и  $M_{ij}^{(2)}(x_{ij}^{(2)}, y_{ij}^{(2)}, 0)$ , решив систему (1).
6.         **IF**  $(\overrightarrow{O_i O_j}, \overrightarrow{M_{ij}^{(1)} M_{ij}^{(2)}})$   $> 0$  **THEN** полагаем  $\alpha_{ij}^{(1)} = 0, \alpha_{ij}^{(2)} = 1$   
        (для дуги  $L_{ij}$  точка  $M_{ij}^{(1)}$  — начальная, а  $M_{ij}^{(2)}$  — конечная)  
        **ELSE** полагаем  $\alpha_{ij}^{(1)} = 1, \alpha_{ij}^{(2)} = 0$  (для дуги  $L_{ij}$  точка  $M_{ij}^{(2)}$  — начальная, а  $M_{ij}^{(1)}$  — конечная).
7.         **FOR**  $l = 1$  to  $2$  **DO**
8.             Создать элемент  $\phi_{ij}^{(l)}(x_{ij}^{(l)}, y_{ij}^{(l)}, \alpha_{ij}^{(l)})$ .
9.             **IF**  $y_{ij}^{(l)} < 0$  **THEN**  $N_1 = N_1 \cup \{\phi_{ij}^{(l)}\}$  **ELSE**  $N_2 = N_2 \cup \{\phi_{ij}^{(l)}\}$ .  
               **END FOR**  $l$
10.        **END FOR**  $j$
10. Упорядочить множество  $N_1$  элементов  $\phi_{ij}^{(l)}(x_{ij}^{(l)}, y_{ij}^{(l)}, \alpha_{ij}^{(l)})$  по неубыванию  $x_{ij}^{(l)}$ , а множество  $N_2$  по невозрастанию  $x_{ij}^{(l)}$ . Обозначить полученные последовательности  $\pi_1$  и  $\pi_2$  соответственно.
11. Составить последовательность  $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ . Найти в последовательности  $\pi$  подпоследовательности элементов, соответствующих совпадающим точкам, и переупорядочить их (см. выше описание процесса переупорядочивания).
12. Просматривая слева направо последовательность  $\pi$ , определить количество  $\rho$  переключений индикатора.



13. **IF**  $1 \leq \rho \leq 2$ , **THEN** определить дугу  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} \neq \emptyset$  (см. доказательство леммы 1), положить  $k = i$  и перейти на шаг 15.  
**END FOR**  $i$
14. Перейти на шаг 19.
15. Определить  $M_{kp}$  и  $M_{kq}$ -начальную и конечную точки дуги  $L_k$  окружности  $C_k$ .
16. **FOR**  $i = 1$  to  $k - 1$  **DO**
17. **IF**  $M_{kp} \notin B_i$ , **THEN** перейти на шаг 19.  
**END FOR**  $i$
18. Точка  $M_{kp}$  — решение задачи. Стоп.
19. Задача не имеет решения. Стоп.

Упорядочение множеств  $N_1$  и  $N_2$  (шаг 10) представляет собой наиболее трудоемкую операцию, входящую в цикл по  $i$  (шаги 2–13). Общая вычислительная сложность алгоритма составляет  $O(n^2 \log n)$  операций.

### 2.3. Основная часть алгоритма BALLS2

Каждый круг  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , представляет собой выпуклое множество точек. Известно, что пересечение конечного числа выпуклых множеств есть выпуклое множество (см., например, [6]). Граница области пересечения  $n$  кругов состоит из дуг некоторых из окружностей  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Пересечение кругов фактически является выпуклой комбинацией (см. [6]) точек своей границы. Среди всех граничных точек области пересечения кругов в первую очередь представляют интерес точки стыковки дуг окружностей. Используя выпуклые комбинации этих точек, при необходимости можно будет найти и другие точки пересечения кругов.

Алгоритм просматривает все пары окружностей  $C_i$  и  $C_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$ , определяет их точки пересечения  $M_{ij}^{(1)}$  и  $M_{ij}^{(2)}$  и проверяет, принадлежит ли хотя бы одна из них всем остальным кругам  $B_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $k \neq i, j$ . В случае положительного ответа найденная точка (например,  $M_{ij}^{(1)}$ ) — решение задачи.

Если пересечение кругов не является пустым множеством, то граница области пересечения содержит не менее двух дуг (с учетом предварительной обработки), а значит, и не менее двух точек стыковки дуг. Поэтому перебрав точки пересечения всех пар окружностей  $C_i$  и  $C_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$ , алгоритм определит искомую точку.

Ниже приводится формальное описание алгоритма.

#### Алгоритм 2. BALLS2

*Вход:* Круги  $B_1, \dots, B_n$ , заданные указанием их центров  $O_i(x_i, y_i, 0)$  и радиусов  $r_i$ ,  $i = 1, n$ .

*Выход:* Общая точка для всех кругов  $B_1, \dots, B_n$  либо ответ, что задача не имеет решения.

1. **FOR**  $i = 1$  to  $n - 1$  **DO**
2.   **FOR**  $j = i + 1$  to  $n$  **DO**
3.     Для окружностей  $C_i$  и  $C_j$  найти их точки пересечения  $M_{ij}^{(1)}$  и  $M_{ij}^{(2)}$ .

4.  $l = 1$
5.     **FOR**  $k = 1$  to  $n$ ,  $k \neq i$ ,  $k \neq j$  **DO**
6.     **IF**  $M_{ij}^{(l)} \notin B_k$ , **THEN** перейти на шаг 8.  
       **END FOR**  $k$
7.     Точка  $M_{ij}^{(l)}$  — решение задачи. Стоп.
8.      $l = l + 1$
9.     **IF**  $l \leq 2$ , **THEN** перейти на шаг 5.  
       **END FOR**  $j$
10. **END FOR**  $i$
10. Задача не имеет решения. Стоп.

Цикл по переменной  $i$  содержит вложенный цикл по переменной  $j$ , который в свою очередь содержит цикл по переменной  $k$ . Следовательно, общая вычислительная сложность алгоритма составляет  $O(n^3)$  операций.

### 3. Определение точки в пересечении шаров в пространстве $E^m$

Пусть в  $m$ -мерном аффинном евклидовом пространстве  $E^m$  задана декартова прямоугольная система координат  $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ , где  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$  — ортонормированный базис. Имеется  $n$  шаров. Каждый  $m$ -мерный шар  $\mathcal{B}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , задается указанием его центра  $O_i(x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$  и радиуса  $R_i$ . Границей шара  $\mathcal{B}_i$  является  $m$ -мерная сфера  $S_i$ , определяемая уравнением  $(x_1 - x_1^{(i)})^2 + \dots + (x_m - x_m^{(i)})^2 = R_i^2$ . Предварительная обработка, т.е. проверка, пересекаются ли заданные шары попарно, проводится аналогично тому, как это было проделано для случая  $m = 2$  (см. раздел 2.1) с учетом, что в аффинном евклидовом пространстве  $E^m$  расстояние между двумя точками  $O_i(x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$  и  $O_j(x_1^{(j)}, \dots, x_m^{(j)})$  определяется по формуле

$$d_{ij} = \sqrt{(x_1^{(i)} - x_1^{(j)})^2 + \dots + (x_m^{(i)} - x_m^{(j)})^2}.$$

В дальнейшем будем без ограничения общности считать, что для любой пары шаров  $\mathcal{B}_i$  и  $\mathcal{B}_j$  такой, что  $R_i \geq R_j$ , выполняется неравенство  $R_i - R_j < d_{ij} < R_i + R_j$ , где  $d_{ij}$  — расстояние между их центрами  $O_i$  и  $O_j$ . Это означает, что  $m$ -мерные сферы  $S_i$  и  $S_j$  пересекаются по “окружности” (т.е. по  $(m - 1)$ -мерной сфере)  $C_{ij}$ .

Зафиксируем две сферы  $S_i$  и  $S_j$  с центрами в точках  $O_i(x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$  и  $O_j(x_1^{(j)}, \dots, x_m^{(j)})$  соответственно и рассмотрим систему уравнений

$$(2) \quad \begin{cases} (x_1 - x_1^{(i)})^2 + \dots + (x_m - x_m^{(i)})^2 = R_i^2, \\ (x_1 - x_1^{(j)})^2 + \dots + (x_m - x_m^{(j)})^2 = R_j^2. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения ее решение представляет собой  $(m - 1)$ -мерную сферу (окружность при  $m - 1 = 2$ )  $C_{ij}$ , по которой пересекаются  $m$ -мер-

ные сферы  $S_i$  и  $S_j$ . Вычитая первое уравнение системы (2) из второго, получим уравнение вида

$$(3) \quad \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \beta = 0,$$

которое представляет собой уравнение гиперплоскости в аффинном пространстве  $E^m$ . Гиперплоскость (3) как бы отрезает от шаров  $\mathcal{B}_i$  и  $\mathcal{B}_j$  части, из которых состоит их область пересечения, причем  $(m-1)$ -мерная сфера  $C_{ij}$  лежит в этой гиперплоскости и является границей “срезов” шаров  $\mathcal{B}_i$  и  $\mathcal{B}_j$ . “Срезы” шаров  $\mathcal{B}_i$  и  $\mathcal{B}_j$ , т.е.  $(m-1)$ -мерные шары (круги при  $m-1=2$ ) с границей  $C_{ij}$ , склеены по гиперплоскости (3). В пространстве  $E^m$   $(m-1)$ -мерный шар с границей  $C_{ij}$  является аналогом хорды, соединяющей точки пересечения двух окружностей (в случае  $m=2$ ).

С помощью некоторого ортогонального преобразования декартовой системы координат (некоторого поворота системы координат вокруг ее начала в случае  $m=3$ ) уравнение (3) можно привести к виду  $x_m = x^*$ , где  $x^*$  — константа. Подставляя  $x_m = x^*$  в уравнение  $(x_1 - x_1^{(i)})^2 + \dots + (x_m - x_m^{(i)})^2 = R_i^2$  (первое уравнение системы (2)), получаем каноническое уравнение  $(m-1)$ -мерной сферы  $C_{ij}$ . Покажем, как построить матрицу  $T$  такого ортогонального преобразования (оператора).

Просматривая коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  уравнения (3), найдем коэффициент  $\alpha_l \neq 0$ . Зададим координаты  $x_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $i \neq l$  точек  $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$ , принадлежащих гиперплоскости (3), в соответствии со следующей таблицей:

	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_l$	$\dots$	$x_m$
$P_0$	0	0	$\dots$	$\tilde{x}_l^{(0)}$	$\dots$	0
$P_1$	1	0	$\dots$	$\tilde{x}_l^{(1)}$	$\dots$	0
$P_2$	0	1	$\dots$	$\tilde{x}_l^{(2)}$	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$P_{m-1}$	0	0	$\dots$	$\tilde{x}_l^{(m-1)}$	$\dots$	1

Координата  $x_l$  каждой из этих точек находится из уравнения (3).

Система векторов  $\vec{f}_1 = \overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \vec{f}_{m-1} = \overrightarrow{P_0 P_{m-1}}$  линейно независима, причем каждый из этих векторов ортогонален вектору  $\vec{f}_m = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ . Таким образом, система векторов  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m$  может служить базисом в пространстве  $E^m$ . Для системы векторов  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m$  выполним процесс ортогонализации:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|};$$

$$\vec{g}_i = \vec{f}_i - (\vec{f}_i, \vec{h}_1)\vec{h}_1 - \dots - (\vec{f}_i, \vec{h}_{i-1})\vec{h}_{i-1}, \vec{h}_i = \frac{\vec{g}_i}{|\vec{g}_i|}, \quad i = 2, \dots, m-1;$$

$$\vec{h}_m = \frac{\vec{f}_m}{|\vec{f}_m|}.$$

В итоге получили ортонормированный базис  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_m$ . Составим матрицу  $T$  перехода от исходного ортонормированного базиса  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$  к базису  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_m$ , записав в столбцы матрицы  $T$  координаты векторов  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_m$  в базисе  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ . Матрица  $T$  также является матрицей ортогонального оператора, переводящего гиперплоскость (3) в гиперплоскость вида  $x_m = x^*$ .

Пересчитаем координаты центров  $O_k$  шаров  $\mathcal{B}_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , по формуле

$$(4) \quad \tilde{X}^{(k)} = T^{-1} X^{(k)},$$

где  $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_m^{(k)})^T$  — вектор-столбец координат точки  $O_k$  в базисе  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ , а  $\tilde{X}^{(k)} = (\tilde{x}_1^{(k)}, \dots, \tilde{x}_m^{(k)})^T$  — вектор-столбец ее координат в базисе  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_m$ .

Для сфер  $S_i$  и  $S_j$  рассмотрим систему уравнений (2) с новыми координатами их центров  $O_i$  и  $O_j$ . Вычитая первое уравнение системы (2) из второго, получим уравнение  $x_m = x^*$ .

Далее, для каждой сферы  $S_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $k \neq j$ , рассмотрим ее уравнение

$$(5) \quad (x_1 - \tilde{x}_1^{(k)})^2 + \dots + (x_m - \tilde{x}_m^{(k)})^2 = R_k^2$$

и подставим в него  $x_m = x^*$ . Если  $R_k^2 - (x^* - \tilde{x}_m^{(k)})^2 \geq 0$ , то полагаем

$$(6) \quad r_k^2 = R_k^2 - (x^* - \tilde{x}_m^{(k)})^2.$$

Это будет означать, что  $m$ -мерная сфера  $S_k$  пересекается с плоскостью  $x_m = x^*$  и в результате получается  $(m - 1)$ -мерная сфера (окружность при  $m - 1 = 2$ ), задаваемая уравнением

$$(x_1 - \tilde{x}_1^{(k)})^2 + \dots + (x_{m-1} - \tilde{x}_{m-1}^{(k)})^2 = r_k^2.$$

Если все сферы  $S_k$  (а значит, и все шары  $\mathcal{B}_k$ ),  $k = \overline{1, n}$ ,  $k \neq j$ , пересекаются с гиперплоскостью  $x_m = x^*$ , то на данном этапе задача сводится к определению точки в пересечении множества  $n - 1$  шаров в пространстве  $E^{m-1}$ . Если такая точка  $M_0(\tilde{x}_1^0, \dots, \tilde{x}_{m-1}^0, x^*)$  будет найдена, то остается только пересчитать ее координаты в соответствии со следующей формулой:

$$(7) \quad X^0 = T \tilde{X}^0,$$

где  $\tilde{X}^0 = (\tilde{x}_1^0, \dots, \tilde{x}_{m-1}^0, x^*)^T$  — координаты точки  $M_0$  в базисе  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_m$ , а  $X^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)^T$  — ее координаты в исходном базисе  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ . Формула (7) задает преобразование координат, обратное преобразованию, определяемому формулой (4).

Если же полученное на данном этапе множество  $n - 1$  шаров из пространства  $E^{m-1}$ , определяемого гиперплоскостью  $x_m = x^*$ , не пересекается, то переходим к следующему этапу алгоритма, т.е. к рассмотрению следующей фиксированной пары сфер  $S_i$  и  $S_j$ . Переход к следующему этапу алгоритма

осуществляется и в случае, когда не все сферы  $S_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $k \neq j$ , пересекаются с гиперплоскостью  $x_m = x^*$ , т.е. если для некоторой сферы  $S_k$  имеем  $R_k^2 - (x^* - \tilde{x}_m^{(k)})^2 < 0$ .

Вообще, если пересечение шаров не является пустым множеством, то граница области пересечения состоит из частей некоторых ограничивающих их сфер (с учетом предварительной обработки таких сфер будет не менее двух). Гиперплоскости, по которым стыкуются части сфер, ограничивающих область пересечения шаров, проходят через область пересечения шаров. Перебирая все такие гиперплоскости (т.е. все пары  $m$ -мерных сфер  $S_i$  и  $S_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$ ) найдем гиперплоскость, содержащую искомую точку.

Ниже приводится краткое формальное описание рассмотренных выше основных этапов рекурсивного алгоритма  $BALLS3(m, n)$ , решающего задачу в пространстве  $E^m$ , где  $m \geq 3$ .

### Алгоритм 3. $BALLS3(m, n)$

*Вход:*  $m$ -мерные шары  $\mathcal{B}_1^{(m)}, \dots, \mathcal{B}_n^{(m)}$ , заданные указанием их центров  $O_i^{(m)}(x_1^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$  и радиусов  $R_i^{(m)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

*Выход:* Общая точка для всех шаров  $\mathcal{B}_1^{(m)}, \dots, \mathcal{B}_n^{(m)}$  либо ответ, что задача не имеет решения.

1. Выполнить предварительную обработку.
2. **FOR**  $i = 1$  to  $n - 1$  **DO**
3.  $j = 2$ .
4. **FOR**  $j \leq n$  **DO**
5. Из системы (2) определить гиперплоскость  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \beta = 0$ , содержащую пересечение сфер  $S_i^{(m)}$  и  $S_j^{(m)}$ .
6. Построить матрицу  $T$  ортогонального преобразования, переводящего гиперплоскость  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m + \beta = 0$  в гиперплоскость  $x_m = x^*$ .
7. Найти матрицу  $T^{-1}$ .
8. Ортогональное преобразование: для всех шаров  $\mathcal{B}_k^{(m)}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $k \neq i$ , пересчитать координаты их центров  $O_k^{(m)}$  по формуле (4).
9. Из системы (2) уравнений сфер с новыми координатами их центров определить плоскость  $x_m = x^*$ , содержащую пересечение сфер  $S_i^{(m)}$  и  $S_j^{(m)}$ .
10. **FOR**  $k = 1$  to  $n$ ,  $k \neq j$  **DO**
11. **IF** гиперплоскость  $x_m = x^*$  не пересекает сферу  $S_k^{(m)}$  **THEN** перейти на шаг 14 **ELSE** для  $(m - 1)$ -мерного шара  $\mathcal{B}_k^{(m-1)}$  определить его радиус  $R_k^{(m-1)} = r_k$  по формуле (6) и центр  $O_k^{(m-1)}$  (отбрасывая последнюю координату у точки  $O_k^{(m)}$ ). **END FOR**  $k$
12. **IF**  $m > 3$  **THEN** для множества шаров  $\mathcal{B}_k^{(m-1)}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $k \neq j$ , выполнить  $BALLS3(m - 1, n - 1)$  **ELSE** выполнить для этого множества шаров  $BALLS1$  или  $BALLS2$ .
13. **IF** найдена точка  $M_0(\tilde{x}_1^0, \dots, \tilde{x}_{m-1}^0, x^*)$  в пересечении  $(m - 1)$ -мерных

шаров  $\mathcal{B}_k^{(m-1)}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $k \neq j$  THEN обратное ортогональное преобразование: пересчитать координаты точки  $M_0$  по формуле (7) и стоп.

14. Положить  $j = j + 1$  и перейти на шаг 4.

END FOR  $j$

END FOR  $i$

15. Задача не имеет решения. Стоп.

Оценим вычислительную сложность алгоритма  $BALLS3(m, n)$ . В пространстве  $E^m$  расстояние  $d_{ij}$  между двумя точками  $O_i$  и  $O_j$  может быть вычислено за  $O(m)$  операций. Поэтому предварительная обработка (шаг 1) требует  $O(n^2m)$  операций. Шаги 5 и 9 выполняются за  $O(m)$  операций.

Построение системы векторов  $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m$  может быть выполнено за  $O(m^2)$  операций (см. таблицу), а процесс ортогонализации системы векторов — за  $O(m^3)$  операций (с учетом того, что скалярное произведение двух векторов вычисляется за  $O(m)$  операций). Следовательно, матрица  $T$ , столбцами которой являются координаты ортонормированной системы векторов  $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_m$ , может быть построена за  $O(m^3)$  операций (шаг 6). Обратная матрица  $T^{-1}$  может быть построена за  $O(m^2)$  операций (шаг 7) с помощью следующего известного метода, основанного на методе Гаусса. К расширенной матрице  $[T|I_m]$ , где  $I_m$  — единичная матрица порядка  $m$ , применяются элементарные преобразования над строками, приводящие эту матрицу к виду  $[I_m|C]$ . В итоге получается матрица  $T^{-1} = C$ .

Вычисление координат точки в новом базисе по формуле (4) может быть выполнено за  $O(m^2)$  операций. Следовательно, шаг 8 выполняется за  $O(nm^2)$  операций. Цикл по  $k$  (шаги 10–11) выполняется за  $O(n)$  операций. Пересчет координат точки  $M_0$  по формуле (7) (шаг 13) выполняется за  $O(m^2)$  операций.

С учетом двух основных циклов — по  $i$  (шаги 2–14) и по  $j$  (шаги 4–14) — общая вычислительная сложность  $\mathcal{T}(m, n)$  алгоритма  $BALLS3(m, n)$  может быть выражена следующим рекуррентным уравнением:

$$(8) \quad \mathcal{T}(m, n) = O(n^3m^2 + n^2m^3) + n^2\mathcal{T}(m-1, n-1), \quad m \geq 3,$$

где  $\mathcal{T}(2, n) = O(n^2 \log n)$ , если используется алгоритм  $BALLS1$ , и  $\mathcal{T}(2, n) = O(n^3)$ , если используется алгоритм  $BALLS2$ . Решение  $\mathcal{T}(m, n)$  рекуррентного уравнения (8) при  $m \geq 3$  не превосходит  $O(n^{2m-4}(nm^2 + m^3 + \mathcal{T}(2, n)))$ . Следовательно, в пространстве  $E^m$  исходная задача может быть решена за  $O(n^{2m-4}(nm^2 + m^3 + n^2 \log n))$  или  $O(n^{2m-4}(nm^2 + m^3 + n^3))$  операций. В частности, для трехмерного пространства сложность алгоритма составит  $O(n^4 \log n)$  либо  $O(n^5)$  операций.

#### 4. Заключение

В статье предлагаются точные полиномиальные алгоритмы для определения некоторой точки, принадлежащей пересечению  $n$  шаров в  $m$ -мерном евклидовом пространстве. В практически значимых случаях  $m = 2$  и  $m = 3$  представленные алгоритмы могут быть использованы при разработке программного обеспечения в задачах управления различными динамическими

системами, включающими в себя множество дронов. Например, для заданной конфигурации роя дронов необходимо определить местоположение управляющего дрона либо определить, возможно ли желаемое изменение конфигурации без потери управления всеми дронами управляющим дроном. Другие практические интерпретации рассматривались в разделе 1.

Отметим также, что можно выполнить небольшую модификацию представленных алгоритмов таким образом, что будет найдена не одна точка, принадлежащая пересечению шаров, а несколько таких точек (если это пересечение непусто и не состоит из единственной точки). Значит, возможно определить и линейную комбинацию этих точек, целиком принадлежащую области пересечения шаров. Заметим, что такая линейная комбинация угловых точек границы области пересечения шаров не совпадает с множеством точек шара наибольшего объема, содержащегося в области пересечения шаров, который необходимо найти в задаче внутренней аппроксимации [4]. Поэтому предложенный в данной статье подход является альтернативным не только по методу, но и по множеству получаемых решений, что предоставляет дополнительные возможности при принятии решений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 1.* Пусть  $\rho = 1$ , т.е. последовательность  $\pi$  имеет единственное переключение индикатора. Заметим, что в этом случае переключение индикатора произошло на элементе с номером  $n - 1$ , т.е.  $\alpha_{n-1} \neq \alpha_n$ . Возможны две ситуации.

а)  $\alpha_{n-1} = 0$ ,  $\alpha_n = 1$ . В этом случае последовательность  $\pi$  может быть разбита на две подпоследовательности:  $\pi = (\pi^{(1)}, \pi^{(2)})$ , где  $\pi^{(1)} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ ,  $\pi^{(2)} = (\psi_n, \psi_{n+1}, \dots, \psi_{2n-2})$ . Все элементы подпоследовательности  $\pi^{(1)}$  имеют нулевой индикатор, т.е. они соответствуют белым точкам на окружности  $C_i$  (начальным точкам подходящих дуг). Все элементы подпоследовательности  $\pi^{(2)}$  имеют индикатор 1, т.е. они соответствуют черным точкам на окружности  $C_i$  (конечным точкам подходящих дуг). Любая подходящая дуга  $L_{ij}$  окружности  $C_i$  начинается в белой точке и заканчивается в черной точке при договоренности, что движение вдоль дуги происходит против часовой стрелки. Последовательность  $\pi$  соответствует перечислению точек на окружности  $C_i$  в процессе обхода ее против часовой стрелки. Поэтому обходу любой дуги  $L_{ij}$  от начальной до конечной точки соответствует некоторая подпоследовательность  $(\psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_{n-1}, \psi_n, \psi_{n+1}, \dots, \psi_q)$  последовательности  $\pi$ , где  $(\psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_{n-1})$  — последовательность элементов с индикатором 0, а  $(\psi_n, \psi_{n+1}, \dots, \psi_q)$  — последовательность элементов с индикатором 1. Заметим, что каковы бы ни были номера  $p$  и  $q$ ,  $1 \leq p \leq n - 1$ ,  $n \leq q \leq 2n - 2$ , в любую такую подпоследовательность обязательно войдут элементы  $\psi_{n-1}$  и  $\psi_n$ . Поэтому дуга  $L_i$ , соединяющая точки окружности  $C_i$ , соответствующие элементам  $\psi_{n-1}$  (начальная точка) и  $\psi_n$  (конечная точка), будет содержаться в любой подходящей дуге  $L_{ij}$ , т.е.  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} \neq \emptyset$ .

б)  $\alpha_{n-1} = 1$ ,  $\alpha_n = 0$ . В этом случае все элементы подпоследовательности  $\pi^{(1)}$  имеют индикатор 1, а все элементы подпоследовательности  $\pi^{(2)}$  имеют индикатор 0. Обход окружности  $C_i$  против часовой стрелки может быть осуществлен в порядке  $\pi^* = (\pi^{(2)}, \pi^{(1)}) = (\psi_n, \psi_{n+1}, \dots, \psi_{2n-2}, \psi_1, \psi_2, \dots$



$\dots, \psi_{n-1}$ ). Тогда обходу любой подходящей дуги  $L_{ij}$  от начальной до конечной точки соответствует некоторая подпоследовательность  $(\psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_{2n-2}, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q)$  последовательности  $\pi^*$ , где  $(\psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_{2n-2})$  — подпоследовательность элементов с индикатором 0, а  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q)$  — подпоследовательность элементов с индикатором 1. Каковы бы ни были номера  $p$  и  $q$ ,  $n \leq p \leq 2n-2$ ,  $1 \leq q \leq n-1$ , в любую такую подпоследовательность  $(\psi_p, \psi_{p+1}, \dots, \psi_{2n-2}, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q)$  обязательно войдут элементы  $\psi_{2n-2}$  и  $\psi_1$ . Поэтому дуга  $L_i$ , соединяющая точки окружности  $C_i$ , соответствующие элементам  $\psi_{2n-2}$  и  $\psi_1$ , будет содержаться в любой подходящей дуге, т.е.  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} \neq \emptyset$ .

2. Пусть  $\rho = 2$ , т.е. переключение индикатора происходит дважды: один раз с 0 на 1, а другой раз с 1 на 0, причем порядок этих переключений может быть произвольным. Следовательно, возможны две ситуации.

а) Пусть первое переключение индикатора происходит с 0 на 1 на элементе с номером  $k$ , т.е.  $\alpha_k = 0, \alpha_{k+1} = 1$ . В этом случае последовательность  $\pi$  может быть разбита на три подпоследовательности:  $\pi = (\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \pi^{(3)})$ , где  $\pi^{(1)} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k)$ ,  $\pi^{(2)} = (\psi_{k+1}, \psi_{k+2}, \dots, \psi_{k+n-1})$ ,  $\pi^{(3)} = (\psi_{k+n}, \psi_{k+n+1}, \dots, \psi_{2n-2})$ ,  $1 \leq k \leq n-2$ . Все элементы подпоследовательностей  $\pi^{(1)}$  и  $\pi^{(3)}$  имеют индикатор 0, а все элементы подпоследовательности  $\pi^{(2)}$  имеют индикатор 1. Обход окружности  $C_i$  против часовой стрелки может быть осуществлен в порядке  $\hat{\pi} = (\pi^{(3)}, \pi^{(1)}, \pi^{(2)})$ . Тогда обходу любой подходящей дуги  $L_{ij}$  от начальной до конечной точек соответствует некоторая подпоследовательность  $(\psi_p, \dots, \psi_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_q)$ , где  $(\psi_p, \dots, \psi_k)$  — подпоследовательность элементов с индикатором 0, а  $(\psi_{k+1}, \dots, \psi_q)$  — подпоследовательность элементов с индикатором 1,  $k+1 \leq p \leq 2n-2$ ,  $1 \leq p \leq k$ ,  $k+1 \leq q \leq k+n-1$ ,  $1 \leq k \leq n-2$ . В любую такую подпоследовательность  $(\psi_p, \dots, \psi_k, \psi_{k+1}, \dots, \psi_q)$  обязательно войдут элементы  $\psi_k$  и  $\psi_{k+1}$ . Поэтому дуга  $L_i$ , соединяющая точки, соответствующие элементам  $\psi_k$  и  $\psi_{k+1}$ , будет содержаться в любой подходящей дуге, т.е.  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} \neq \emptyset$ .

б) Пусть первое переключение индикатора происходит с 1 на 0 на элементе с номером  $k$ , т.е.  $\alpha_k = 1, \alpha_{k+1} = 0$ . Как и в случае 2а, последовательность  $\pi$  может быть разбита на те же три подпоследовательности  $\pi = (\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, \pi^{(3)})$ . Однако в данном случае все элементы подпоследовательностей  $\pi^{(1)}$  и  $\pi^{(3)}$  имеют индикатор 1, а все элементы подпоследовательности  $\pi^{(2)}$  имеют индикатор 0. Обход окружности  $C_i$  против часовой стрелки может быть осуществлен в порядке  $\tilde{\pi} = (\pi^{(2)}, \pi^{(3)}, \pi^{(1)})$ . Обходу любой подходящей дуги  $L_{ij}$  от начальной до конечной точек соответствует некоторая подпоследовательность  $(\psi_p, \dots, \psi_{k+n-1}, \psi_{k+n}, \dots, \psi_q)$ , где  $(\psi_p, \dots, \psi_{k+n-1})$  — подпоследовательность элементов с индикатором 0, а  $(\psi_{k+n}, \dots, \psi_q)$  — подпоследовательность элементов с индикатором 1,  $k+1 \leq p \leq k+n-1$ ,  $k+n \leq q \leq 2n-2$ ,  $1 \leq q \leq k$ ,  $1 \leq k \leq 2n-2$ . В любую такую подпоследовательность  $(\psi_p, \dots, \psi_{k+n-1}, \psi_{k+n}, \dots, \psi_q)$  обязательно войдут элементы  $\psi_{k+n-1}$  и  $\psi_{k+n}$ . Поэтому дуга  $L_i$ , соединяющая точки, соответствующие элементам  $\psi_{k+n-1}$  и  $\psi_{k+n}$ , будет содержаться в любой подходящей дуге, т.е.  $L_i = \bigcap_{1 \leq j \leq n, j \neq i} L_{ij} \neq \emptyset$ .

Лемма 1 доказана.

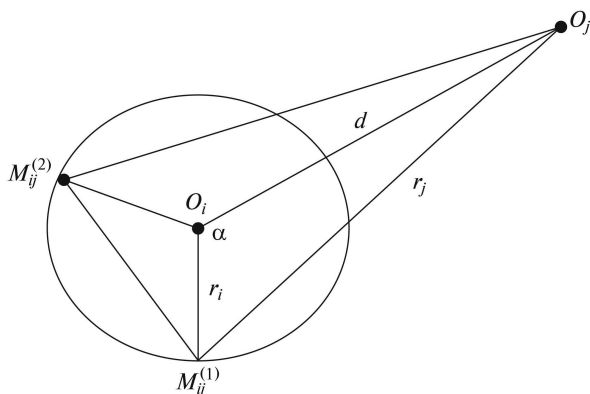


Рис. 4.

*Доказательство леммы 2.* Пусть градусная мера подходящей дуги  $L_{ij}$  равна  $2\alpha > 180^\circ$ . Для определенности будем считать точку  $M_{ij}^{(1)}$  началом дуги  $L_{ij}$ , а точку  $M_{ij}^{(2)}$  — ее концом. Градусная мера подходящей дуги  $L_{ij}$  равна сумме двух одинаковых тупых углов  $M_{ij}^{(1)}O_iO_j$  и  $M_{ij}^{(2)}O_iO_j$  (см. рис. 4). Пусть  $d$  — это расстояние между центрами  $O_i$  и  $O_j$  окружностей  $C_i$  и  $C_j$ . Тогда из треугольника  $M_{ij}^{(1)}O_iO_j$  по теореме косинусов имеем  $r_j^2 = r_i^2 + d^2 - 2r_id \cos \alpha$ . Поскольку  $\alpha$  — тупой угол, то  $\cos \alpha < 0$ , следовательно,  $r_j > r_i$ , что и требовалось доказать.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баркетов М.С. Полиномиальные методы определения точки в пересечении некоторого числа шаров // Танаевские чтения. Докл. Восьмой междунар. научн. конф. 27–30 марта 2018 г. ОИПИ, Минск. 2018. С. 18–22.
2. Otto A., Agatz N., Campbell J., Golden B., Pesch E. Optimization approaches for civil applications of unmanned aerial vehicles (UAVs) or aerial drones: A survey / Networks, Wiley Periodicals. 2018. V.72. P. 411–458.
3. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация: алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
4. Boyd S.S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory // SIAM Studies Appl. Math. 1994. V. 15. Philadelphia: PA.
5. Beck A. On the convexity of a class of quadratic mappings and its application to the problem of finding the smallest ball enclosing a given intersection of balls // J. Global Optim., Elsevier Publ. 2007. V. 39. No. 1. P. 113–126.
6. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.*

Поступила в редакцию 18.07.2019

После доработки 15.09.2019

Принята к публикации 28.11.2019