

Тематический выпуск (окончание)¹

© 2020 г. Д.Н. ГАЙНАНОВ, д-р физ.-мат. наук (damir.gainanov@gmail.com),
А.Н. ИГНАТОВ, канд. физ.-мат. наук (alexei.ignatov1@gmail.com),
А.В. НАУМОВ, д-р физ.-мат. наук (naumovav@mail.ru),
В.А. РАССКАЗОВА, канд. физ.-мат. наук (varvara.rasskazova@mail.ru)
(Московский авиационный институт)

О ЗАДАЧЕ НАЗНАЧЕНИЯ “ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОКНА” НА УЧАСТКАХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОЙ СЕТИ²

Исследуется задача назначения “технологического окна” — времени, в течение которого на некоторых участках железнодорожной сети прекращается движение поездов для производства ремонтно-строительных работ. Железнодорожная сеть представляется в виде неориентированного мультиграфа. Движение по мультиграфу осуществляется при помощи множества бесконфликтных “подниток”, каждый элемент которого представляет пятерку из индекса вершины начала движения, индекса вершины конца движения, номера пути, по которому осуществляется движение, времени начала движения и времени конца движения. В статье строится математическая модель осуществления перевозок по железнодорожной сети с учетом времени готовности состава к отправлению и ограничению на время движения состава в пункт назначения. Производится оптимизация времени назначения “технологического окна” и расписания движения составов по мультиграфу на основе решения задач смешанного целочисленного линейного программирования путем минимизации суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети. Практическая реализация предлагаемого метода решения выполнена с использованием математического пакета ILOG CPLEX. Приводятся результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: “технологическое окно”, железнодорожная сеть, мультиграф, “поднитка”, смешанное целочисленное линейное программирование.

DOI: 10.31857/S0005231020060013

1. Введение

Задача составления расписаний движения грузовых/пассажирских поездов — одна из наиболее важных задач в области оптимизации функционирования движения железнодорожной сети. Исследования этой задачи можно

¹ Первые две статьи являются окончанием тематического выпуска, посвященного В.С. Танаеву (№ 5, 2020).

² Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00046 А).

разделить на несколько направлений: задача формирования бесконфликтного набора ниток (по сути, последовательностей из вершины начала движения, конца движения и соответствующих времен) для последующего составления из этих ниток маршрутов движения поездов [1]; задача поиска маршрутов движения поездов по железнодорожной сети [2–6]; задача назначения локомотивов составам [7–11]. В [2] приведен подробный обзор публикаций, посвященных задаче составления расписаний и поиска маршрутов поездов по железнодорожной сети, на начало XXI в. В [3] решалась задача составления циклического расписания с учетом задержек в исполнении расписания. В [4] рассмотрена задача формирования составов, расписания и маршрутов их движения до станций назначения, чтобы минимизировать суммарное взвешенное время выполнения заказов. Задача в [4] была сформулирована в виде задачи целочисленного линейного программирования. В [5] рассмотрена задача построения расписания двухстороннего движения поездов между двумя станциями, соединенными однопутной железной дорогой с разъездом. Оптимальное расписание строится методом динамического программирования. В [6] решалась задача по оптимизации движения маневровых составов по железнодорожной станции с целью исполнения всех маневровых работ. В [7] задача назначения локомотивов с критерием в форме минимизации затрат была сведена к задаче смешанного целочисленного нелинейного программирования, решение которой найдено приближенно при помощи метода декомпозиции Данцига-Вульфа. В [8] задача подвязки локомотивов была сформулирована в виде задачи целочисленного линейного программирования с критерием в форме минимизации затрат, которая решалась эвристическими методами. В [9] задача назначения локомотивов решалась с учетом случайных задержек в готовности составов и с критерием в форме минимума числа задействованных локомотивов. В [10] рассматривался аналогичный критерий, что и в [9], а поиск решения задачи назначения локомотивов решался приближенно с использованием функции полезности. В [11] ставилась задача о назначении локомотивов составам в самой общей динамической постановке в дискретном времени. Для решения задачи в [11] с использованием соотношений метода динамического программирования предложено решение, приближенное к оптимальному.

В силу того что некоторые участки пути железнодорожной сети должны подлежать срочному/плановому ремонту, конструируемое расписание должно включать в себя “технологические окна” — время, в течение которого прекращается движение поездов по отдельным железнодорожным путям для производства ремонтно-строительных работ [12]. Как правило, технологическое окно имеет 2 основных параметра: перегон, на котором должны выполняться работы, и продолжительность окна. Обычно запрашивают окна определенной продолжительности для конкретного перегона, и при этом требуется, чтобы окно располагалось в заданном временном промежутке или интервале предоставления окна. Например, требуется предоставить технологическое окно на перегон между станциями *A* и *B* продолжительностью 4 часа в светлое время суток (с 9 часов утра до 18 часов вечера). При этом на каждые сутки имеется план перевозок, в котором задано, какие перевозки необходимо осуществить в эти сутки. Проблема назначения “технологических

окон” ранее исследовалась в [13–16]. В [13] рассматривалась задача назначения “технологического окна” для однопутной железной дороги с разъездами, для которой все исходное расписание грузовых поездов перестраивается с учетом необходимости проведения “технологических окон” при помощи метаэвристик. В [14, 15] рассматривалась задача назначения “технологического окна” для железнодорожной сети общего вида, в которой поезда могут быть отменены, задержаны или отправлены по другому маршруту с критерием в форме минимизации расходов на осуществление движения. Подходы для назначения “технологического окна”, предложенные в [13–15], близки к материалу настоящей статьи, однако в полной мере неприменимы. В отличие от австралийских железных дорог, которым посвящена [13], в сети железных дорог России имеются и двухпутные, и трехпутные участки пути. Помимо этого, в [13] отсутствует формализованная постановка задачи. В [14] “технологическое окно” выбирается из некоторого наперед заданного набора. Время в [15] полагалось дискретным, однако время поиска существенно растет, если временные периоды очень малы, а если периоды времени очень крупны, то можно не осуществить план перевозок. В [16] рассматривалась задача назначения “технологического окна” на станции на основе различных критериев, например поиска промежутка времени длительности не меньше заданной, в который нужно будет перенести минимальное количество пассажирских поездов. Однако в [16] не рассматривался вопрос о том, на какие пути и когда переносить движение пассажирских поездов/маневровых локомотивов. Для станции такой подход оправдан, поскольку сортировочная станция характеризуется большим количеством приемоотправочных путей, а объезд закрытых путей не является длительным. Для перегонов подобный в [16] подход неприменим, поскольку объезд закрытых путей может быть либо невозможен, либо очень длителен по времени.

В настоящей статье исследуется задача назначения “технологического окна” на некоторых участках железнодорожной сети, представляемой неориентированным мультиграфом. Движение поездов между смежными вершинами мультиграфа возможно только в особые промежутки времени, задаваемые множеством бесконфликтных “подниток”. Временной интервал для “технологического окна” ищется на основе минимизации суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети начиная с момента отправления. Данная задача формулируется в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования. В рамках задачи нахождения “технологического окна” предлагаемая математическая модель позволяет не только находить указанный временной интервал, но и маршруты с расписанием следования поездов по железнодорожной сети. Рассматривается пример.

2. Основные обозначения и предположения

Рассмотрим железнодорожную сеть, представляемую неориентированным мультиграфом $G = \langle V, E \rangle$, где V — множество узлов (станций, где происходит ветвление железнодорожной сети, станций, у которых количество входящих путей не равно количеству исходящих путей, сортировочных станций и конечных станций), а E — множество ребер (железнодорожных путей), соеди-

няющих данные вершины. Пусть $|V| = m$. Перенумеровав вершины графа G от единицы до m , составим множество индексов $V' = \{1, 2, \dots, m\}$, каждый элемент которого однозначно определяет вершину графа G .

Пусть имеется I поездов, для каждого из которых заданы:

- индекс вершины отправления $v_i^{\text{отправ}} \in V'$;
- индекс вершины назначения $v_i^{\text{приб}} \in V'$;
- время готовности к отправлению $t_i^{\text{отправ}}$, которое вычисляется как количество минут от некоторого момента отсчета;
- максимальное количество времени d_i , в течение которого поезду позволяется находиться в пункте отправления с момента готовности;
- время в пути поезда T_i в минутах, т.е. максимальное время, в течение которого поезду позволяется находиться на железнодорожной сети.

Движение поездов по перегонам (между вершинами) железнодорожной сети может осуществляться только в определенные промежутки времени. Для описания таких промежутков по аналогии с [9] воспользуемся множеством бесконфликтных “подниток” \mathcal{Z} , каждый элемент z_k которого представляет собой пятерку

$$z_k = (v_k^{\text{нач}}, v_k^{\text{кон}}, n_k, t_k^{\text{нач}}, t_k^{\text{кон}}),$$

где $v_k^{\text{нач}} \in V'$ — индекс вершины начала движения, $v_k^{\text{кон}} \in V'$ — индекс вершины конца движения, причем $v_k^{\text{нач}}$ и $v_k^{\text{кон}}$ — индексы смежных вершин в графе G , n_k — номер пути, соединяющего вершины с индексами $v_k^{\text{нач}}$ и $v_k^{\text{кон}}$, $t_k^{\text{нач}}$ — время начала движения, $t_k^{\text{кон}}$ — время конца движения. Пусть

$$\dim \mathcal{Z} = K.$$

Множество \mathcal{Z} может быть получено методами из [1]. Пронумеруем элементы множества \mathcal{Z} от единицы до K . Таким образом, число от единицы до K однозначно определяет параметры “поднитки”. Зададим также минимальную $t_{\text{ст}}^{\text{мин}}$ и максимальную длительности $t_{\text{ст}}^{\text{макс}}$ стоянки поездов на промежуточных между вершиной отправления и вершиной назначения станциях.

3. Постановка задачи

Пусть для ремонта длительности не меньше заданного параметра Δ , который должен быть осуществлен не ранее $t_1^{\text{нач}}$ и не позднее $t_2^{\text{кон}}$, должны быть закрыты некоторые перегоны (дуги) графа G . Поставим задачу отыскания маршрутов и времени следования указанных выше I поездов через железнодорожную сеть, задаваемую графом G , на основе множества “подниток” \mathcal{Z} с учетом того, что некоторые дуги графа G должны быть закрыты для ремонта длительности не меньше заданного параметра Δ на основе различных критериев: с целью минимизации суммарного времени в движении и с целью минимизации суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети.

Предварительно отметим, что без учета “подниток” в графе G может оказаться бесконечное число способов добраться из одной вершину в другую

из-за наличия циклов. В случае переходов по графу G только по “подниткам” количество способов будет конечным, однако может оказаться довольно большим. В этой связи ограничим все возможные маршруты следования поездов из пункта отправления в пункт назначения максимум J “поднитками”. В этом случае движение поезда однозначно задается последовательностью “подниток”, длины не более J , причем для любых двух соседних “подниток” должно выполняться условие согласованности как по вершине начала/конца движения, так и по времени начала/конца движения. В дальнейшем j -ю “поднитку” в этой последовательности будем называть j -м этапом маршрута следования поезда.

Выделим из множества \mathcal{Z} номера тех “подниток”, у которых ребро, образываемое первыми тремя компонентами пятерки, подлежит ремонту. На основе этих номеров составим множество $\mathcal{Z}' \subset \{1, 2, \dots, K\}$.

Введем вспомогательные переменные $\delta_{i,j,k}$, характеризующие использование i -м поездом “поднитки” с номером k на j -м этапе маршрута следования по железнодорожной сети, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$, $k = \overline{1, K}$. Переменная $\delta_{i,j,k}$ равна нулю, если i -м поездом на j -м этапе маршрута “поднитка” с номером k не задействована, и равна единице в обратном случае. Также введем переменные $\hat{\delta}_{i,j,k}$, характеризующие, что поезд с номером i , используя “поднитку” с номером k , по окончании j -го этапа маршрута прибыл в пункт назначения, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$, $k = \overline{1, K}$. А именно переменная $\hat{\delta}_{i,j,k}$ равна единице, если поезд с номером i , используя “поднитку” с номером k , по окончании j -го этапа маршрута прибыл в пункт назначения, и равна нулю во всех остальных случаях.

Пусть t_1 — время начала “технологического окна” и t_2 — время окончания.

Используя указанные переменные, составим множество допустимых стратегий. По определению переменных $\delta_{i,j,k}$ и $\hat{\delta}_{i,j,k}$ имеем:

$$(3.1) \quad \delta_{i,j,k} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad k = \overline{1, K},$$

$$(3.2) \quad \hat{\delta}_{i,j,k} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Для того чтобы движение поездов осуществлялось из мест отправления поездов, введем ограничения:

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} = 1, \quad i = \overline{1, I},$$

$$(3.4) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} v_k^{\text{нач}} = v_i^{\text{отправ}}, \quad i = \overline{1, I},$$

а для того чтобы отправление произошло не раньше времени начала движения по используемой “поднитке”, используем ограничения

$$(3.5) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач}} \geq t_i^{\text{отправ}}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Учитывая ограничение на максимальное количество времени, в течение которого поезду позволяет находиться в пункте отправления с момента готовности, имеем:

$$(3.6) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач}} \leq t_i^{\text{отправ}} + d_i, \quad i = \overline{1, I}.$$

Для того чтобы на каждом этапе (за исключением первого) каждым поездом было занято не более одной “поднитки” введем ограничения

$$(3.7) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} \leq 1, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{2, J}.$$

Обеспечим условие стыковки “подниток” по пути следования поезда с номером i на j -м этапе маршрута с помощью следующих ограничений:

$$(3.8) \quad \sum_{k=1}^K (\delta_{i,j,k} - \hat{\delta}_{i,j,k}) v_k^{\text{кон}} = \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} v_k^{\text{нач}}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

При этом должно быть выполнено ограничение

$$(3.9) \quad \delta_{i,j,k} \geq \hat{\delta}_{i,j,k}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Добавим ограничения на минимально возможную и максимально возможную по длительности остановку поезда на промежуточных между вершиной отправления и вершиной назначения станциях:

$$(3.10) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} t_k^{\text{нач}} - \sum_{k=1}^K (\delta_{i,j,k} - \hat{\delta}_{i,j,k}) t_k^{\text{кон}} \geq t_{\text{ст}}^{\text{мин}} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k},$$

$$i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

$$(3.11) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} t_k^{\text{нач}} - \sum_{k=1}^K (\delta_{i,j,k} - \hat{\delta}_{i,j,k}) t_k^{\text{кон}} \leq t_{\text{ст}}^{\text{макс}}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Прокомментируем ограничения (3.8)–(3.11). Если поезд с номером i прибыл в пункт назначения по окончании j_T -го этапа, $j_T \in \{1, 2, \dots, J\}$, то использование других “подниток” для осуществления движения поезда с номером i не имеет смысла, что учитывается в рамках предлагаемой модели использованием переменных $\hat{\delta}_{i,j,k}$. А именно в рассматриваемом случае окажется, что для некоторого k будет выполнено $\delta_{i,j_T,k} = \hat{\delta}_{i,j_T,k} = 1$ вследствие ограничений (3.9). Это приведет к тому, что для рассматриваемого поезда с номером i для $j = j_T$ левая часть равенства (3.8) обратится в ноль. Так как величины $v_k^{\text{нач}}$ по определению положительны, то это приведет к тому, что $\delta_{i,j_T+1,k} = 0$ для любого $k = \overline{1, K}$. Это в свою очередь приведет к тому,

что $\forall j \in \{j_T + 2, \dots, J\}$ и $\forall k \in \{1, \dots, K\}$ будет выполнено $\delta_{i,j,k} = 0$ вследствие того же ограничения (3.8). Соответственно $\forall j \in \{j_T, \dots, J\}$ ограничения (3.10)–(3.11) будут выполняться автоматически. Для $j < j_T$ окажется, что $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0 \forall k \in \{1, \dots, K\}$ и левая часть неравенств (3.10)–(3.11) превратится в разность между временем отправления и временем прибытия на некоторую станцию по окончании j -го этапа.

Для определения этапа маршрута, по окончании которого поезд прибывает в точку назначения, введем ограничения:

$$(3.12) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} v_k^{\text{кон}} \geq \sum_{k=1}^K \hat{\delta}_{i,j,k} v_i^{\text{приб}}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J},$$

$$(3.13) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} v_k^{\text{кон}} \leq \sum_{k=1}^K \hat{\delta}_{i,j,k} v_i^{\text{приб}} + m \left(1 - \sum_{k=1}^K \hat{\delta}_{i,j,k} \right), \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J},$$

$$(3.14) \quad \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \hat{\delta}_{i,j,k} = 1, \quad i = \overline{1, I}.$$

Ограничение (3.14) гарантирует, что каждый поезд должен прибыть в место назначения на каком-то этапе следования. Из-за ограничений (3.14) ограничения (3.12)–(3.13) будут пассивными всегда за исключением случая, когда для рассматриваемого поезда с номером i и каких-то \hat{j} и \hat{k} выполняется $\hat{\delta}_{i,\hat{j},\hat{k}} = 1$. В этом случае вследствие ограничения (3.8) окажется, что $\hat{\delta}_{i,\hat{j},\hat{k}} = \delta_{i,\hat{j},\hat{k}}$. Вследствие ограничений (3.12) окажется, что $v_{\hat{k}}^{\text{кон}} \geq v_i^{\text{приб}}$, а вследствие ограничений (3.13) $v_{\hat{k}}^{\text{кон}} \leq v_i^{\text{приб}}$, что приведет к тому, что $v_{\hat{k}}^{\text{кон}} = v_i^{\text{приб}}$, а, значит, поезд с номером i прибывает в пункт назначения, используя “поднитку” с номером \hat{k} на \hat{j} -м этапе.

Для того чтобы каждая “поднитка” была занята не более чем одним поездом, введем ограничения

$$(3.15) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \delta_{i,j,k} \leq 1, \quad k = \overline{1, K}.$$

Для того чтобы “технологическое окно” было длиной не меньше заданного параметра Δ , введем ограничение

$$(3.16) \quad t_2 - t_1 \geq \Delta.$$

А для того чтобы “технологическое окно” было в заданный временной промежуток времени, наложим ограничения

$$(3.17) \quad t_1^{\text{нач}} \leq t_1, \quad t_2 \leq t_2^{\text{кон}}.$$

Теперь исключим возможность движения по “подниткам”, связанным с дугами графа G , подлежащими ремонту, попадающим в “технологическое окно”.

Для этого движение по “подниткам”, подлежащим ремонту, возможно либо до начала “технологического окна”, либо по его окончании. С этой целью введем вспомогательные бинарные переменные γ_k и \varkappa_k , $k \in Z'$. Если момент окончания “поднитки” наступает до начала “технологического окна”, то только в этом случае $\gamma_k = 1$, $k \in Z'$. Если момент начала “поднитки” наступает после “технологического окна”, то только в этом случае $\varkappa_k = 1$, $k \in Z'$. Соответственно для того чтобы движение по “поднитке” было разрешено, нужно, чтобы хотя бы одна из переменных γ_k и \varkappa_k оказалась равной единице, $k \in Z'$. С учетом введенных переменных заключаем, что

$$(3.18) \quad \gamma_k t_k^{\text{кон}} \leq t_1, \quad k \in Z',$$

$$(3.19) \quad t_2 \leq \varkappa_k t_k^{\text{нач}} + (1 - \varkappa_k)T, \quad k \in Z',$$

где T — некоторый параметр. Например, если расписание строится на сутки, то T равно 1440 минутам при

$$(3.20) \quad \delta_{i,j,k} \leq \varkappa_k + \gamma_k, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad k \in Z'.$$

Поясним смысл ограничений (3.18)–(3.20). Если хотя бы одна из переменных \varkappa_k и γ_k будет равна единице, то ограничения (3.20) вырождаются в ограничения (3.1) и движение по “поднитке” с номером k вследствие “технологического окна” не будет закрыто, $k \in Z'$. В остальных случаях окажется, что $\delta_{i,j,k} \leq 0$, а значит, $\delta_{i,j,k} = 0$, что приведет к невозможности движения по “поднитке” с номером k , $k \in Z'$.

Для того чтобы время в пути поезда было ограничено наперед заданной величиной T_i , введем ограничения

$$(3.21) \quad \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \hat{\delta}_{i,j,k} t_k^{\text{кон}} - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач}} \leq T_i, \quad i = \overline{1, I}.$$

4. Различные критерии для формирования плана перевозок и назначения “технологического окна”

Рассмотрим различные критерии для формирования плана перевозок и назначения “технологического окна”.

Вначале рассмотрим задачу минимизация суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \hat{\delta}_{i,j,k} t_k^{\text{кон}} - \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \min_{t_1, t_2, \delta_{i,j,k}, \hat{\delta}_{i,j,k}, \gamma_{k'}, \varkappa_{k'}, i=\overline{1, I}, j=\overline{1, J}, k=\overline{1, K}, k' \in Z'}$$

с ограничениями (3.1)–(3.21).

Решение задачи (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21), т.е. задачи составления расписания движения поездов по железнодорожной сети с учетом наличия

“технологического окна”, может не существовать вследствие недостаточности множества “подниток”. Решение задачи (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21) также зависит от выбора параметра J . В частности, если выбрать параметр J , равный единице, то решение задачи (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21) может существовать, только если пункт отправления и место назначения — смежные вершины графа G . При этом если выбрать J очень большим, то количество бинарных переменных в задаче (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21) станет огромным, что приведет к долгому времени поиска решения этой задачи в любом математическом пакете.

Еще одним путем нахождения “технологического окна” является минимизация времени движения поездов

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон}} - t_k^{\text{нач}}) \rightarrow \min_{t_1, t_2, \delta_{i,j,k}, \hat{\delta}_{i,j,k}, \gamma_{k'}, \alpha_{k'}, i=\overline{1, I}, j=\overline{1, J}, k=\overline{1, K}, k' \in Z'}$$

с ограничениями (3.1)–(3.21).

Отличие критерия (4.1) от критерия (4.2) в том, что последний, по сути, минимизирует количество топлива и электроэнергии, которое придется затратить при перевозке грузов, а первый критерий минимизирует суммарное время, которое локомотивы и вагоны проведут на железнодорожной сети с момента начала движения, таким образом позволяя им высвободиться раньше для исполнения других перевозок.

Возможно как отдельное, так и совместное применение предложенных критериев. Пусть решение задачи (4.1) с ограничениями (3.1)–(3.21) существует, а оптимальное значение критерия равно T^* . Далее следует решить задачу:

$$(4.3) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон}} - t_k^{\text{нач}}) \rightarrow \min_{t_1, t_2, \delta_{i,j,k}, \hat{\delta}_{i,j,k}, \gamma_{k'}, \alpha_{k'}, i=\overline{1, I}, j=\overline{1, J}, k=\overline{1, K}, k' \in Z'}$$

с ограничениями (3.1)–(3.21) и

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \hat{\delta}_{i,j,k} t_k^{\text{кон}} - \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач}} = T^*.$$

Пусть решение в задаче (4.3) с ограничениями (3.1)–(3.21) и (4.4) существует, а оптимальное значение критерия равно τ^* . Возможен случай, когда решение задачи (4.3) с ограничениями (3.1)–(3.21), (4.4) неединственно. В этой связи выберем наибольшее по длительности “технологическое окно”, при котором суммарное время движения составит τ^* , а суммарное время нахождения на железнодорожной сети составит T^* . Для этого нужно решить задачу

$$(4.5) \quad t_2 - t_1 \rightarrow \max_{t_1, t_2, \delta_{i,j,k}, \hat{\delta}_{i,j,k}, \gamma_{k'}, \alpha_{k'}, i=\overline{1, I}, j=\overline{1, J}, k=\overline{1, K}, k' \in Z'}$$

с ограничениями (3.1)–(3.21), (4.4) и

$$(4.6) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон}} - t_k^{\text{нач}}) = \tau^*.$$

5. Пример

Рассмотрим модельный пример. Пусть мультиграф железнодорожной сети G имеет вид, представленный на рисунке.

Пусть для некоторого дня имеется следующее множество “подниток” \mathcal{Z} , см. табл. 1.

Пусть имеется 12 поездов, которые нужно переместить по железнодорожной сети из пунктов отправления в соответствующие пункты назначения в рассматриваемые сутки. Данные об этих поездах приведем в табл. 2.

Пусть также $t_1^{\text{нач}} = 0$, $t_2^{\text{кон}} = 1440$, $t_{\text{ст}}^{\text{мин}} = 0$, $t_{\text{ст}}^{\text{макс}} = 1440$. Такие значения параметров $t_1^{\text{нач}}$, $t_2^{\text{кон}}$, $t_{\text{ст}}^{\text{мин}}$, $t_{\text{ст}}^{\text{макс}}$ означают, что “технологическое окно” можно установить в любое время суток, а остановки на станциях не ограничены по длительности. Пусть также $d_i = 500$, $i = \overline{1, 12}$.

Проанализируем маршруты движения в зависимости от различных значений параметра Δ на основе решения задачи (4.5) с ограничениями (3.1)–(3.21), (4.4), (4.6) в случае установления “технологического окна” на пути № 1 между вершиной с № 4 и вершиной с № 5. Предварительно отметим, что вследствие “технологического окна” могут быть исключены из маршрутов следования поезда “поднитки” с номерами 37–42, т.е. $Z' = \{37, 38, 39, 40, 41, 42\}$.

Случай $\Delta = 0$ соответствует задаче составления расписания и маршрутов движения поездов без учета “технологического окна”, поскольку при $\Delta = 0$ можно положить, к примеру, $t_1 = t_2 = 0$, и тогда для каждой “поднитки” будет выполнено $\varkappa_k = 1$, что приведет к тому, что ограничения (3.20) выродятся в ограничения (3.1). Случай $\Delta = 1440$ соответствует ситуации, когда рассматриваемый набор ребер/ребро закрывается на сутки. Случаи $\Delta = 600$ и $\Delta = 1100$ — промежуточные.

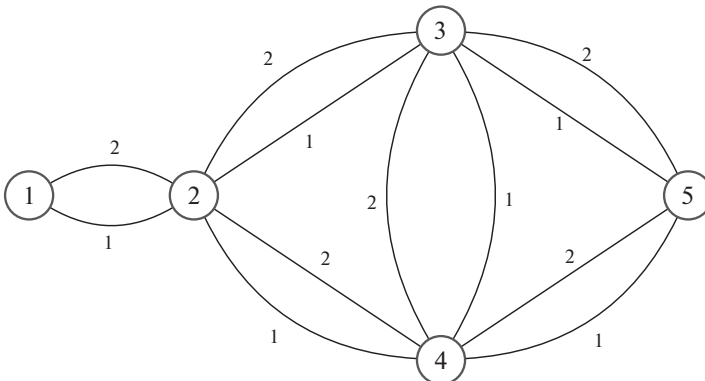


Рисунок.

Таблица 1. Множество “подниток” \mathcal{Z}

k	z_k	k	z_k
1	(1, 2, 1, 480, 500)	26	(3, 5, 1, 975, 1005)
2	(1, 2, 1, 730, 750)	27	(3, 5, 1, 1170, 1200)
3	(1, 2, 1, 920, 940)	28	(4, 2, 2, 60, 100)
4	(1, 2, 1, 1200, 1220)	29	(4, 2, 2, 340, 380)
5	(2, 1, 2, 360, 380)	30	(4, 2, 2, 600, 640)
6	(2, 1, 2, 690, 710)	31	(4, 2, 2, 810, 850)
7	(2, 1, 2, 1035, 1055)	32	(4, 2, 2, 900, 940)
8	(2, 3, 1, 300, 340)	33	(4, 2, 2, 1260, 1300)
9	(2, 3, 1, 560, 600)	34	(4, 3, 2, 690, 750)
10	(2, 3, 1, 1060, 1100)	35	(4, 3, 2, 930, 990)
11	(2, 3, 1, 1260, 1300)	36	(4, 3, 2, 1320, 1380)
12	(2, 4, 1, 240, 280)	37	(4, 5, 1, 360, 390)
13	(2, 4, 1, 670, 710)	38	(4, 5, 1, 900, 930)
14	(2, 4, 1, 920, 960)	39	(4, 5, 1, 1350, 1380)
15	(2, 4, 1, 1140, 1180)	40	(4, 5, 1, 1120, 1150)
16	(2, 4, 1, 1275, 1315)	41	(4, 5, 1, 555, 585)
17	(3, 2, 2, 120, 160)	42	(4, 5, 1, 1260, 1290)
18	(3, 2, 2, 240, 280)	43	(5, 3, 2, 480, 510)
19	(3, 2, 2, 720, 760)	44	(5, 3, 2, 805, 835)
20	(3, 2, 2, 1320, 1360)	45	(5, 3, 2, 1030, 1060)
21	(3, 4, 1, 540, 600)	46	(5, 3, 2, 1380, 1410)
22	(3, 4, 1, 1260, 1320)	47	(5, 4, 2, 360, 390)
23	(3, 4, 1, 1080, 1140)	48	(5, 4, 2, 660, 690)
24	(3, 5, 1, 270, 300)	49	(5, 4, 2, 860, 890)
25	(3, 5, 1, 740, 770)	50	(5, 4, 2, 1200, 1230)

Таблица 2. Информация о поездах

i	$v_i^{\text{отправ}}$	$v_i^{\text{приб}}$	$t_i^{\text{отправ}}$	T_i
1	1	4	720	300
2	1	5	30	1170
3	2	5	240	910
4	2	5	300	470
5	2	5	480	525
6	3	5	120	180
7	4	1	480	840
8	5	1	60	650
9	5	2	780	580
10	5	2	840	540
11	5	2	1200	180
12	5	3	1020	120

По результатам численных экспериментов было выяснено, что назначение “технологического окна” (случай $\Delta = 600$) в сравнении с задачей построения расписания (случай $\Delta = 0$) приводит к тому, что для поездов №№ 2, 3, 4, 9, 10 меняются используемые “поднитки”. Однако если в случае с поездами

Таблица 3. Оптимальные маршруты (наборы номеров “подниток”) движения поездов для различных значений параметра Δ при $J = 5$

$\Delta \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	4,16	1,9,25	12,37	13,38	14,40	24	31,7	43,21,30,6	45,20	49,32	50,33	46
600	4,16	1,10,27	12,37	9,25	14,40	24	31,7	43,21,30,6	49,32	45,20	50,33	46
1100	4,16	1,9,26	13,35,27	8,25	14,40	24	31,7	43,21,30,6	49,32	45,20	50,33	46
1440	Нет решения											

Таблица 4. Результаты работы предлагаемого алгоритма

Δ	t_1^*	t_2^*	T^*
0	390	900	2090
600	390	1120	2470
1100	0	1120	2915
1440	Нет решения		

№№ 9, 10 это связано с тем, что замена используемых “подниток” не влияет на значение критериев (4.1) и (4.3), то в случае поездов №№ 2, 3, 4 это связано с наличием “технологического окна”, которое, в частности, не позволяет использовать “поднитку” с № 38 (случай $\Delta = 600$) и “поднитки” №№ 37, 38 (случай $\Delta = 1100$). Причем в случае $\Delta = 1100$ поезд № 3 должен дополнительно посетить вершину с № 3, что не предполагалось (случай $\Delta = 0$ и $\Delta = 600$). В случае $\Delta = 1440$ оказывается невозможным найти пути объезда и исполнить все расписание.

Теперь проанализируем оптимальные значения критерия в задаче (4.5) с ограничениями (3.1)–(3.21), (4.4), (4.6): время поиска оптимального решения пакетом CPLEX и оптимальный промежуток времени для назначения “технологического окна” для различных значений параметра Δ при $J = 5$.

Как следует из результатов численного эксперимента, ожидаемо с ростом параметра Δ увеличивается суммарное время нахождения поездов на железнодорожной сети начиная с момента отправления.

Результаты численного эксперимента были получены с помощью математического пакета ILOG CPLEX на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM).

6. Заключение

В настоящей статье рассмотрена задача назначения “технологического окна” на некоторых участках железнодорожной сети. Железнодорожная сеть представлялась неориентированным мультиграфом, движение по которому могло осуществляться только в определенные промежутки времени — с использованием “подниток”. Оптимизационными переменными являлись время начала и конца “технологического окна”, а также время и маршруты движения поездов по железнодорожной сети. Главным критерием являлась минимизация суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети с момента начала движения. Задача назначения “технологического окна” была сформулирована в виде трех задач смешанного целочисленного линейного

программирования. На примере было показано, что с изменением длительности “технологического окна” меняются как маршруты движения поездов по сети, так и оптимальное значение суммарного времени нахождения поездов на железнодорожной сети с момента начала движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайманов Д.Н., Кобыгин А.В., Рассказова В.А.* Моделирование грузовых железнодорожных перевозок методами теории графов и комбинаторной оптимизации // *АиТ*. 2016. № 11. С. 60–79.
Gaimanov D.N., Konygin A.V., Rasskazova V.A. Modelling Railway Freight Traffic Using the Methods of Graph Theory and Combinatorial Optimization // *Autom. Remote Control*. 2016. V. 77. No. 11. P. 1928–1943.
2. *Cordeau J.-F., Toth P., Vigo D.* A Survey of Optimization Models for Train Routing and Scheduling // *Transport. Sci.* 1998. V. 32. No. 4. P. 380–404.
3. *Kroon L., Maroti G., et al.* Stochastic Improvement of Cyclic Railway Timetables // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2008. V. 42. No. 6 P. 553–570.
4. *Лазарев А.А., Мусатова Е.Г.* Целочисленные постановки задачи формирования железнодорожных составов и расписания их движения // *Управление большими системами*. 2012. № 38. С. 161–169.
5. *Зиндер Я.А., Лазарев А.А. и др.* Построение расписаний двухстороннего движения на однопутной железной дороге с разъездом // *АиТ*. 2018. № 3. С. 144–166.
Zinder Y., Lazarev A.A., et al. Scheduling the Two-Way Traffic on a Single-Track Railway with a Siding // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 3. P. 506–523.
6. *Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В.* Модель передвижения поездов и маневровых локомотивов на железнодорожной станции в приложении к оценке и анализу вероятности бокового столкновения // *Информатика и ее применения*. 2018. Т. 12. № 3. С. 107–114.
7. *Ziarati K., Soumis F., et al.* Locomotive Assignment with Heterogeneous Consists at CN North America // *Eur. J. Oper. Res.* 1997. No. 97. P. 281–292.
8. *Ahuja R. K., Liu J., et al.* Solving Real-Life Locomotive-Scheduling Problems // *Transport. Sci.* 2005. V. 39. No. 4. P. 503–517.
9. *Буянов М.В., Иванов С.В., Кибзун А.И., Наумов А.В.* Развитие математической модели управления грузоперевозками на участке железнодорожной сети с учетом случайных факторов // *Информатика и ее применения*. 2017. Т. 11. № 4. С. 85–93.
10. *Буянов М.В., Наумов А.В.* Оптимизация функционирования подвижного состава при организации грузовых перевозок на участке железнодорожной сети // *АиТ*. 2018. № 9. С. 143–158.
Buyanov M.V., Naumov A.V. Optimizing the Operation of Rolling Stock in Organizing Cargo Transportation at a Railway Network Segment // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 9. P. 1661–1672.
11. *Powell W.B., Simao H.P., Bouzaiene-Ayari B.* Approximate dynamic programming in transportation and logistics: a unified framework // *EURO J. Transp. Logist.* 2012. No. 1. P. 237–284.
12. Правила технической эксплуатации железных дорог Российской Федерации в редакции от 09.02.2018.
13. *Albrecht A.R., Panton D.M., Lee D.H.* Rescheduling Rail Networks with Maintenance Disruptions Using Problem Space Search // *Comput. Oper. Res.* 2013. V. 40. No. 3. P. 703–712.

14. *Forsgren M., Aronsson M., Gestrelus S.* Maintaining Tracks and Traffic Flow at the Same Time // *J. Rail Transport Planning & Management*. 2013. V. 3. No. 3. P. 111–123.
15. *Liden T., Joborn M.* An Optimization Model for Integrated Planning of Railway Traffic and Network Maintenance // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2017. No. 74. P. 327–347.
16. *Ignatov A.N., Naumov A.V.* On time selection for track possession assignment at the railway station // *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mat. Model. Progr.* 2019. V. 12. No. 3. P. 5–16.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 16.07.2019

После доработки 24.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019