Автоматика и телемеханика, № 6, 2020

© 2020 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ: III. РОБАСТНАЯ ПОСТАНОВКА[1]

Исследуется задача синтеза для билинейной системы управления при произвольных ограниченных внешних возмущениях, содержащую структурированную матричную неопределенность. Поставлены и решены задачи конструктивного построения эллипсоида робастной стабилизируемости и области робастной стабилизируемости билинейной системы как в непрерывном, так и в дискретном времени; основным инструментом при этом является техника линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: билинейная система управления, структурированная матричная неопределенность, ограниченные внешние возмущения, линейная обратная связь, эллипсоид робастной стабилизируемости, область робастной стабилизируемости, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231020060049

1. Введение

Вопросы устойчивости, стабилизации и синтеза управления для билинейных систем традиционно привлекают внимание исследователей, им уделяется большое внимание в публикациях начиная с выхода знаменитой монографии [1]. Обзоры публикаций по данной проблематике содержатся в первых двух частях [2, 3] настоящей работы; здесь же отметим, что в литературе известны как самые различные постановки задач, так и подходы к их решению, см. [4–16]. Так, в [9, 10] ищутся способы построения линейного управления в билинейных системах на основе достаточных условий устойчивости квадратичных систем дифференциальных уравнений; множество публикаций посвящено построению нелинейных законов управления для стабилизации билинейных систем, см., например, [11–14] и др. Ряд недавних публикаций посвящен дискретным билинейным системам управления, см. [15, 16] и др., однако большая их часть ограничивается вопросами управляемости. В публикациях [17–19] исследуется эллипсоидальный подход к задачам стабилизации, предполагающий построение квадратичных функций Ляпунова при помощи техники линейных матричных неравенств [20, 21].

В публикациях [22–25] на основе техники линейных матричных неравенств и квадратичных функций Ляпунова для билинейной системы управления, *не подверженной воздействию внешних возмущений*, строился так называемый

[1] Исследование выполнено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №18-08-00140.

эллипсоид стабилизируемости такой, что траектории замкнутой системы, начиная внутри эллипсоида, асимптотически стремятся к нулю. В дальнейшем это позволило эффективно конструировать невыпуклые области стабилизируемости билинейных систем управления; работы [22, 23] посвящены билинейным системам в непрерывном времени, а публикации [24, 25] — в дискретном.

Публикации [2, 3] развивают подход, основанный на технике линейных матричных неравенств — в них рассматривается билинейная система управления, подверженная воздействию *произвольных ограниченных внешних возмущений*, и вводится концепция эллипсоида стабилизируемости, обладающего тем свойством, что траектории замкнутой системы, начиная внутри эллипсоида, остаются в этом эллипсоиде.

Настоящая статья, являясь непосредственным продолжением [2, 3], завершает эту серию работ. В ней рассматривается билинейная система управления, подверженная воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений и содержащая структурированную матричную неопределенность. В статье ставятся и решаются задачи робастного управления билинейными системами при внешних возмущениях; в частности, предложен подход к конструктивному построению эллипсоида робастной стабилизируемости и области робастной стабилизируемости.

Статья организована следующим образом: раздел 2 содержит вспомогательный технический результат; раздел 3 посвящен построению эллипсоида робастной стабилизируемости билинейной системы в непрерывном времени; в разделе 4 рассматривается построение области робастной стабилизируемости; в разделе 5 полученные результаты обобщаются на случай дискретного времени; раздел 6 содержит заключительные комментарии.

Как и ранее, несмотря на то что в работе рассматриваются системы со скалярным управлением, предложенный подход в полной мере распространим и на системы с многомерным управлением.

Всюду далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $^\top$ — символ транспонирования, I — единичная матрица соответствующего размера, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Вспомогательный результат: лемма Питерсена

Хорошо известная *лемма Питерсена* [26] эффективно применяется в разнообразных робастных постановках задач стабилизации и управления. Приведем ее в следующей формулировке.

Лемма 1 (Питерсен). *Пусть $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, а $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$ — ненулевые матрицы. Неравенство*

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preccurlyeq 0$$

справедливо для всех

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}: \quad \|\Delta\| \leqslant 1$$

тогда и только тогда, когда существует число ε, такое что

$$G + \varepsilon MM^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N \preccurlyeq 0.$$

Таким образом, лемма Питерсена сводит проверку знакоопределенности семейства $G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top$ с матричной неопределенностью Δ к гораздо более простой задаче разрешимости матричного неравенства относительно одной скалярной переменной ε.

Простое следствие леммы Питерсена представляет удобную форму записи, когда неопределенность ограничена по норме некоторым (отличным от единицы) числом δ.

Следствие 1 (Питерсен). *Пусть $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, а $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$ — ненулевые матрицы. Неравенство*

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preccurlyeq 0$$

справедливо для всех

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}: \quad \|\Delta\| \leqslant \delta$$

тогда и только тогда, когда существует число ε, такое что

$$G + \varepsilon\delta^2 MM^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N \preccurlyeq 0.$$

3. Эллипсоид робастной стабилизируемости

Рассмотрим билинейную систему управления

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bxu + bu + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, с фазовым состоянием $x \in \mathbb{R}^n$, скалярным управлением $u \in \mathbb{R}$, внешним возмущением $w \in \mathbb{R}^m$, измеримым по t и ограниченным в каждый момент времени:

$$\|w(t)\| \leqslant \gamma \quad \text{при всех } t \geqslant 0, \tag{2}$$

и с матричной неопределенностью

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}: \quad \|\Delta\| \leqslant \delta. \tag{3}$$

Класс возмущений (2) будем называть *допустимым*.

Целями раздела являются: а) построение эллипсоида робастной стабилизируемости билинейной системы (1), (2), замкнутой статической линейной обратной связью

$$u = k^\top x, \quad k \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

и б) нахождение управления вида (4) такого, для которого этот эллипсоид максимален (по тому или иному критерию).

Напомним (см. [23]), что эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \right\}, \quad P \succ 0, \tag{5}$$

называется *эллипсоидом робастной стабилизируемости*, соответствующим управлению (4), если траектория системы (1), замкнутой управлением (4), исходя из любой точки x_0 внутри эллипсоида $\mathcal{E}$, остается в нем при всех допустимых неопределенностях Δ и всех допустимых внешних возмущениях $w(t)$.

Обратим внимание на то, что матричная неопределенность Δ не предполагается фиксированной; единственное требование — ее ограниченность по норме. Таким образом, все полученные далее результаты справедливы и для нестационарной неопределенности $\|\Delta(t)\| \leqslant \delta$.

Замкнув билинейную систему (1), (2) обратной связью (4), приходим к квадратичной динамической системе

$$\dot{x} = (A_c + F\Delta H + Bxk^\top)x + Dw,$$

где

$$A_c = A + bk^\top.$$

В [2] было установлено следующее достаточное условие, при котором эллипсоид (5) является эллипсоидом стабилизируемости для квадратичной системы.

Теорема 1 [2]. *Эллипсоид* (5) *является эллипсоидом стабилизируемости для системы*

$$\dot{x} = (A + Bxh^\top)x + Dw, \quad \|w(t)\| \leqslant \gamma,$$

если его матрица P удовлетворяет матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Ph & \gamma D \\ h^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

при некоторых α и ε.

Воспользовавшись теоремой 1, приходим к соотношениям

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} (A_c + F\Delta H)P + P(A_c + F\Delta H)^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Pk & \gamma D \\ k^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \\ P \succ 0, \end{gathered} \tag{6}$$

которые должны выполняться при некоторых значениях скалярных параметров α и ε и всех допустимых неопределенностях $\|\Delta\| \leqslant \delta$.

Первому из соотношений (6) можно придать вид

$$
\begin{pmatrix} A_cP + PA_c^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Pk & \gamma D \\ k^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} +
$$

$$
+ \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} HP & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} F^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.
$$

Воспользовавшись следствием 1, получаем эквивалентное условие существования числа ε_1, такого что

$$
\begin{pmatrix} A_cP + PA_c^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Pk & \gamma D \\ k^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} +
$$

$$
+ \varepsilon_1 \delta^2 \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} HP & 0 & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0
$$

или по лемме Шура [27]

$$
\begin{pmatrix} (A + bk^\top)P + P(A + bk^\top)^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top + \varepsilon_1 \delta^2 FF^\top & Pk & \gamma D & PH^\top \\ k^\top P & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.
$$

Введем вспомогательную векторную переменную

$$
y = Pk \in \mathbb{R}^n,
$$

исключая k; при этом в силу $P \succ 0$ вектор k восстанавливается единственным образом:

$$
k = P^{-1} y.
$$

В результате приходим к матричному неравенству

$$
\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top + \varepsilon_1 \delta^2 FF^\top & y & \gamma D & PH^\top \\ y^\top & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0
$$

со скалярными параметрами ε и α, линейному относительно матричной переменной P, векторной переменной y и скалярной переменной ε_1.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 2. Пусть матрица P и вектор y удовлетворяют матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top + \varepsilon_1\delta^2 FF^\top & y & \gamma D & PH^\top \\ y^\top & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$P \succ 0,$$

при некоторых значениях скалярной переменной ε_1 и скалярных параметров ε и α.

Тогда линейная обратная связь (4) с регулятором

$$k = P^{-1}y$$

робастно стабилизирует систему (1) внутри эллипсоида

$$\mathcal{E} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \Big\}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2) и матричных неопределенностях (3).

Понятно, что не при любом размахе внешних возмущений γ эллипсоид стабилизируемости для системы (1), (2) будет существовать. Ответ на вопрос о максимально допустимом размахе γ дается следующим утверждением.

Теорема 3. Максимальный размах $\widehat{\gamma}$ внешних возмущений (2) в системе (1), при котором эллипсоид стабилизируемости существует, дается решением задачи

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top + \varepsilon_1\delta^2 FF^\top & y & \gamma D & PH^\top \\ y^\top & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$P \succ 0,$$

где оптимизация проводится относительно матричной переменой $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярных переменных γ и ε_1 и скалярных параметров ε и α.

Естественно стремиться максимизировать эллипсоид стабилизируемости по некоторому критерию. В частности, максимизируя (при $\gamma \leqslant \widehat{\gamma}$) объем эллипсоида, получаем следующее следствие из теоремы 2.

Следствие 2. Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{y}$ — решение задачи выпуклой оптимизации

$$\max \log \det P$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top + \varepsilon_1 \delta^2 FF^\top & y & \gamma D & PH^\top \\ y^\top & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярной переменной ε_1 и скалярных параметров ε и α.

Тогда эллипсоид

$$\widehat{\mathcal{E}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top \widehat{P}^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

является эллипсоидом робастной стабилизируемости для билинейной системы (1), *замкнутой линейной обратной связью с регулятором*

$$\widehat{k} = \widehat{P}^{-1} \widehat{y},$$

при всех допустимых внешних возмущениях (2) *и матричных неопределенностях* (3).

Замечание 1. В том случае когда матрица B единичная (или может быть приведена к единичной с помощью линейного преобразования), можно избежать необходимости проведения оптимизации на двумерной сетке. В самом деле, при этом первое из матричных неравенств в оптимизационной задаче из следствия 2 примет вид

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon P + \varepsilon_1 \delta^2 FF^\top & y & \gamma D & PH^\top \\ y^\top & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Вводя новую скалярную переменную

$$\mu = \alpha + \varepsilon$$

и тем самым исключая ε, получаем матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \mu P + \varepsilon_1 \delta^2 FF^\top & y & \gamma D & PH^\top \\ y^\top & \alpha - \mu & 0 & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

со скалярным параметром μ, линейное относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$ и скалярных переменных α и ε_1.

4. Область робастной стабилизируемости

В разделе 3 был найден максимальный (по критерию объема) эллипсоид робастной стабилизируемости $\mathcal{E}$ для системы (1), (2). Следуя [3], введем в рассмотрение множество, образованное объединением эллипсоидов робастной стабилизируемости; естественно назвать его *областью робастной стабилизируемости* системы (1), (2). Очевидно, что область робастной стабилизируемости будет обладать тем же свойством, что и каждый образующий ее эллипсоид робастной стабилизируемости — траектория системы, исходящая из любой точки x_0 внутри этой области, будет оставаться в ней при всех допустимых внешних возмущениях (2) и всех допустимых неопределенностях Δ. Следует подчеркнуть, что в отличие от эллипсоида робастной стабилизируемости, всем точкам которого соответствует общий стабилизирующий регулятор, здесь ситуация принципиально иная: различным точкам области робастной стабилизируемости могут соответствовать различные регуляторы, робастно стабилизирующие билинейную систему (1).

Отметим, что поскольку область робастной стабилизируемости является объединением эллипсоидов робастной стабилизируемости, то в общем случае она может оказаться невыпуклой.

В рамках техники линейных матричных неравенств по произвольному вектору c можно эффективно построить точку, лежащую на границе области робастной стабилизируемости системы по направлению c: выберем направление, определяемое вектором c единичной длины, и будем требовать принадлежности точки ρc эллипсоиду робастной стабилизируемости, максимизируя параметр ρ. Поскольку условие принадлежности точки ρc эллипсоиду робастной стабилизируемости с матрицей P представимо по лемме Шура в линейном относительно P и ρ виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho c^\top \\ \rho c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

приходим к следующему результату, устанавливающему простую характеризацию области робастной стабилизируемости билинейной динамической системы, подверженной воздействию внешних возмущений.

Т е о р е м а 4. *Пусть c — заданный вектор и пусть $\widehat{\rho}$ — решение задачи*

$$\max \rho$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + by^\top + yb^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top + \varepsilon_1 \delta^2 FF^\top & y & \gamma D & PH^\top \\ y^\top & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I & 0 \\ HP & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho c^\top \\ \rho c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярным переменным ρ и ε_1 и скалярным параметрам ε и α.

Тогда точка $\widehat{\rho}c$ лежит на границе области робастной стабилизируемости системы (1), (2) по направлению c.

5. Система в дискретном времени

Рассмотрим билинейную систему управления в дискретном времени

$$x_{\ell+1} = (A + F\Delta H)x_\ell + Bx_\ell u_\ell + bu_\ell + Dw_\ell, \tag{7}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, с начальным состоянием x_0, фазовым состоянием $x_\ell \in \mathbb{R}^n$, скалярным управлением $u_\ell \in \mathbb{R}$, внешним возмущением $w_\ell \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$\|w_\ell\| \leqslant \gamma \quad \text{при всех } \ell = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

и с матричной неопределенностью

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}: \quad \|\Delta\| \leqslant \delta. \tag{9}$$

Как и в разделе 3, цель состоит: а) в построении эллипсоида робастной стабилизируемости билинейной системы (7), (8), замкнутой статической линейной обратной связью

$$u_\ell = k^\top x_\ell, \quad k \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

и б) в нахождении управления вида (10) такого, для которого этот эллипсоид максимален по некоторому критерию.

Определение эллипсоида робастной стабилизируемости для дискретной системы остается практически таким же: эллипсоид

$$\mathcal{E} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1\Big\}, \quad P \succ 0, \tag{11}$$

называется *эллипсоидом робастной стабилизируемости* для системы (7), соответствующим управлению (10), если траектория системы (7), замкнутой управлением (10), исходя из любой точки x_0 внутри эллипсоида $\mathcal{E}$, остается в нем при всех допустимых неопределенностях Δ и всех допустимых внешних возмущениях w_ℓ.

Замкнув билинейную систему (7), (8) статической линейной обратной связью (10), приходим к дискретной квадратичной

$$x_{\ell+1} = (A_c + F\Delta H + Bx_\ell k^\top)x_\ell + Dw_\ell,$$

где $A_c = A + bk^\top$.

В [2] установлено следующее достаточное условие, при котором эллипсоид (11) является эллипсоидом стабилизируемости для дискретной квадратичной системы, т. е. имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 5 [2]. *Эллипсоид* (11) *является эллипсоидом стабилизируемости для системы*

$$x_{\ell+1} = (A + Bx_\ell h^\top)x_\ell + Dw_\ell, \quad \|w_\ell\| \leqslant \gamma,$$

если его матрица P *удовлетворяет матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & PA^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ h^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

при некоторых α *и* ε.

Воспользовавшись теоремой 5, приходим к соотношениям

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & P(A_c + F\Delta H)^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ h^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ (A_c + F\Delta H)P & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \tag{12}$$

$$P \succ 0,$$

которые должны выполняться при некоторых значениях скалярных параметров α и ε и всех допустимых неопределенностях (9).

Первому из соотношений (12) можно придать вид

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Pk & PA_c^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ k^\top P & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ A_c P & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F^\top \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Вновь воспользовавшись следствием 1, получаем эквивалентное условие существования числа ε_1, такого что

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Pk & PA_c^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ k^\top P & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ A_c P & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} +$$

$$+ \varepsilon_1 \delta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F^\top \end{pmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} PH^\top \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Pk & P(A+bk^\top)^\top & PH^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top & 0 \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top & 0 \\ k^\top P & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ (A+bk^\top)P & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P+\varepsilon_1\delta^2 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Введем вспомогательную векторную переменную

$$y = Pk \in \mathbb{R}^n,$$

исключая k; при этом в силу $P \succ 0$ вектор k восстанавливается единственным образом:

$$k = P^{-1} y.$$

В результате приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top & PH^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top & 0 \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top & 0 \\ y^\top & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P+\varepsilon_1\delta^2 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

со скалярными параметрами ε и α, линейному относительно матричной переменной P и векторной переменной y.

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 6. Пусть матрица P и вектор y удовлетворяют матричным неравенствам

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top & PH^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top & 0 \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top & 0 \\ y^\top & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP+by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P+\varepsilon_1\delta^2 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \;\; P \succ 0,$$

при некоторых значениях скалярных параметров ε и α.

Тогда линейная обратная связь (10) с регулятором

$$k = P^{-1}y$$

робастно стабилизирует систему (7) внутри эллипсоида

$$\mathcal{E} = \Big\{ x_\ell \in \mathbb{R}^n : \quad x_\ell^\top P^{-1} x_\ell \leqslant 1 \Big\}$$

при всех допустимых внешних возмущениях (8) и матричных неопределенностях (9).

Как и выше, эллипсоид стабилизируемости для системы (7), (8) существует не при любом размахе внешних возмущений γ. Ответ на вопрос о максимально допустимом размахе γ дается следующим дискретным аналогом теоремы 3.

Теорема 7. Максимальный размах $\widehat{\gamma}$ внешних возмущений (8) в системе (7), при котором эллипсоид стабилизируемости существует, дается решением задачи

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top & PH^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top & 0 \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top & 0 \\ y^\top & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP+by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P+\varepsilon_1\delta^2 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится относительно матричной переменой $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярных переменных γ и ε_1 и скалярных параметров α и ε.

Как и в непрерывном случае, максимизируя (для допустимого $\gamma \leqslant \widehat{\gamma}$) объем эллипсоида, получаем следующее следствие из теоремы 6.

Следствие 3. Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{y}$ — решение задачи выпуклой оптимизации

$$\max \log\det P$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top & PH^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top & 0 \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top & 0 \\ y^\top & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P + \varepsilon_1\delta^2 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярной переменной ε_1 и скалярных параметров ε и α.

Тогда эллипсоид

$$\widehat{\mathcal{E}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^\top \widehat{P}^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

является эллипсоидом робастной стабилизируемости для билинейной системы (7), замкнутой линейной обратной связью (10) с регулятором

$$\widehat{k} = \widehat{P}^{-1}\widehat{y},$$

при всех допустимых внешних возмущениях (8) и матричных неопределенностях (9).

Наконец, следующая теорема является дискретной версией теоремы 4.

Теорема 8. Пусть c — заданный вектор и пусть $\widehat{\rho}$ — решение задачи

$$\max \rho$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & y & PA^\top + yb^\top & PH^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top & 0 \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top & 0 \\ y^\top & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon}I & 0 & 0 \\ AP + by^\top & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P + \varepsilon_1\delta^2 FF^\top & 0 \\ HP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho c^\top \\ \rho c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, векторной переменной $y \in \mathbb{R}^n$, скалярным переменным ρ и ε_1 и скалярным параметрам α и ε.

Тогда точка $\widehat{\rho}c$ лежит на границе области робастной стабилизируемости системы (7), (8) *по направлению c.*

6. Заключение

В статье введены понятия эллипсоида робастной стабилизируемости и области робастной стабилизируемости билинейной системы управления, подверженной воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений и содержащей структурированную матричную неопределенность; предложен простой и легкореализуемый с вычислительной точки зрения подход к их конструктивному построению.

Полученные результаты могут быть обобщены на системы с многомерным управлением и на задачи синтеза линейной обратной связи по выходу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mohler R.R.* Bilinear Control Processes. N.Y.: Acad. Press, 1973.
2. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: I // АиТ. 2019. № 2. С. 46–63.

   Khlebnikov M.V. Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances: I // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 2. P. 234–249.
3. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: II // АиТ. 2019. № 8. С. 29–43.

   Khlebnikov M.V. Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances: II // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 8. P. 1390–1402.
4. *Ryan E., Buckingham N.* On Asymptotically Stabilizing Feedback Control of Bilinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1983. V. 28. No. 8. P. 863–864.
5. *Chen L.K., Yang X., Mohler R.R.* Stability Analysis of Bilinear Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1991. V. 36. No. 11. P. 1310–1315.
6. *Čelikovský S.* On the Global Linearization of Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1990. V. 15. No. 5. P. 433-439.
7. *Čelikovský S.* On the Stabilization of the Homogeneous Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1993. V. 21. No. 6. P. 503–510.
8. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Асимптотические наблюдатели для некоторых классов билинейных систем с линейным входом // ДАН. Теория управления. 2004. Т. 398. № 1. С. 38–43.
9. *Belozyorov V.Y.* Design of Linear Feedback for Bilinear Control Systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2002. V. 11. No. 2. P. 493–511.
10. *Belozyorov V.Y.* On Stability Cones for Quadratic Systems of Differential Equations // J. Dyn. Control Syst. 2005. V. 11. No. 3. P. 329–351.
11. *Andrieu V., Tarbouriech S.* Global Asymptotic Stabilization for a Class of Bilinear Systems by Hybrid Output Feedback // IEEE Trans. Automat. Contr. 2013. V. 58. No. 6. P. 1602–1608.
12. *Coutinho D., de Souza C.E.* Nonlinear State Feedback Design with a Guaranteed Stability Domain for Locally Stabilizable Unstable Quadratic Systems // IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2012. V. 59. No. 2. P. 360–370.
13. *Omran H., Hetel L., Richard J.-P., et al.* Stability Analysis of Bilinear Systems under Aperiodic Sampled-Data Control // Automatica. 2014. V. 50. No. 4. P. 1288–1295.

14. *Kung C.-C., Chen T.-H., Chen W.-C., et al.* Quasi-Sliding Mode Control for a Class of Multivariable Discrete Time Bilinear Systems // Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). Seoul, Korea. October 2012. P. 1878–1883.
15. *Athanasopoulos N., Bitsoris G.* Constrained Stabilization of Bilinear Discrete-Time Systems Using Polyhedral Lyapunov Functions // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 2502–2507.
16. *Athanasopoulos N., Bitsoris G.* Stability Analysis and Control of Bilinear Discrete-Time Systems: A Dual Approach // Proc. 18th IFAC World Congress. Milano, Italy, August 28–September 2, 2011. P. 6443–6448.
17. *Tibken B., Hofer E.P., Sigmund A.* The Ellipsoid Method for Systematic Bilinear Observer Design // Proc. 13th IFAC World Congress. San Francisco, USA, June 30–July 5, 1996. P. 377–382.
18. *Tarbouriech S., Queinnec I., Calliero T.R., et al.* Control Design for Bilinear Systems with a Guaranteed Region of Stability: An LMI-Based Approach // Proc. 17th Mediterranean Conf. on Control & Automation (MED'09). Thessaloniki, Greece. June 2009. P. 809–814.
19. *Amato F., Cosentino C., Merola A.* Stabilization of Bilinear Systems via Linear State Feedback Control // IEEE Trans. Circ. Syst. II: Express Briefs. 2009. V. 56. No. 1. P. 76–80.
20. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
21. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
22. *Khlebnikov M.V.* Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // 14th Eur. Control Conf. (ECC'15). Linz, Austria, July 15–17, 2015. IEEE Catalog Number (USB): CFP1590U-USB. P. 160–164.
23. *Хлебников М.В.* Квадратичная стабилизация билинейной системы управления // АиТ. 2016. № 6. С. 47–60.

    Khlebnikov M.V. Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 980–991.
24. *Хлебников М.В.* Квадратичная стабилизация дискретной билинейной системы управления // АиТ. 2018. № 7. С. 59–79.

    Khlebnikov M.V. Quadratic Stabilization of Discrete-Time Bilinear Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 7. P. 1222–1239.
25. *Khlebnikov M.V.* Quadratic Stabilization of Discrete-Time Bilinear Control Systems // 2018 Eur. Control Conf. (ECC18). Limassol, Cyprus, June 12–15, 2018. IEEE Catalog Number (USB): CFP1890U-USB. P. 201–205.
26. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
27. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 28.08.2019

После доработки 20.10.2019

Принята к публикации 28.11.2019