

© 2020 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychev@yandex.ru)
(АО «ВНИИ «Градиент», Ростов-на-Дону)

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НЕКОРРЕКТНЫХ УСЛОВИЯХ НАБЛЮДЕНИЯ

Решаются задачи численно-аналитического представления решения уравнения, описывающего динамический объект и его измеряемого выхода, а также оптимального вычисления значений непрерывных линейных функционалов (числовых характеристик) от измеряемых функций на основе некорректных данных, содержащих не только флуктуационную погрешность, но и сингулярную помеху. Метод обеспечивает максимально возможную декомпозицию вычислительных процедур, не требует выполнения традиционных операций линеаризации и выбора начальных приближений, а также не связан с расчетом спектральных коэффициентов в конечных линейных комбинациях (с заданными базисными функциями), описывающих интегральные кривые, измеряемые функции и сингулярную помеху.

Ключевые слова: идентификация, динамический объект, измеряемый выход, непрерывный линейный функционал, числовая характеристика, сингулярная помеха, некорректные наблюдения, автокомпенсационное оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231020060086

1. Введение

В различных областях, связанных с решением задач оптимального управления, оценивания, фильтрации, прогнозирования и распознавания образов [1–12], возникает необходимость решения векторного обыкновенного дифференциального уравнения (например, уравнения свободного движения), соответствующего некоторому многомерному динамическому объекту (ДО). При этом необходимо заранее строить приближенное аналитическое решение (требуемого качества) для данного уравнения, которое должно зависеть от начального условия и других характерных параметров, принимающих значения из заданного множества допустимости. Если ДО снабжен измеряемым выходом, то также целесообразно иметь приближенное аналитическое описание (требуемого качества) данного выхода для указанного множества допустимости. Кроме того, часто возникает необходимость оптимального оценивания некоторых числовых характеристик (ЧХ) от измеряемых функций, к которым можно отнести начальное условие, производные различного порядка, определенные интегралы, спектральные коэффициенты соответствующих разложений и др., т.е. речь идет об оценке значений непрерывных линейных функционалов [13–16]. Так, для триангуляционных комплексов пассивной локализации движущихся излучающих целей весьма важной является задача нахождения производных от измеряемых пеленгов (азимута и угла места) для

каждой приемной позиции комплекса [5, 6]. Использование указанных ЧХ позволяет решать актуальные задачи прогнозирования угловых траекторий (например, при срыве и пропуске наблюдений) и отождествления пеленгов группы движущихся излучающих целей для многопозиционного триангуляционного комплекса [5].

В [13–16] развит эффективный в вычислительном плане метод оптимального автокомпенсационного оценивания ЧХ от информационного сообщения, реализация которого наблюдается в аддитивной смеси с флуктуационным шумом и сингулярной помехой (не исключается также наличие маскирующего сигнала). Помеха на интервале наблюдения может многократно превосходить (по абсолютной величине) сумму реализаций информационного сообщения и шума, т.е. речь идет о так называемых некорректных наблюдениях, с которыми часто приходится сталкиваться на практике [5, 6, 13–16]. Достоинство метода автокомпенсационного оценивания (инвариантного к сингулярной помехе) состоит в том, что он позволяет решать задачу вычисления ЧХ без традиционного расширения пространства состояний и ориентирован не только на гладкие, но и на кусочно-непрерывные помехи с известными и неизвестными точками разрыва первого рода, когда на участке непрерывности помеха описывается одним из базисов (априорно неизвестным), принадлежащим конечному семейству возможных (для данной помехи) функциональных базисов.

В [13] на основе идей автокомпенсационного оценивания [14–16] и опорных интегральных кривых ([17] — скалярный случай, [18] — векторный случай) развит метод численно-аналитического описания ДО (для заданной области допустимости) и оценивания ЧХ его интегральной кривой по выборкам этой кривой, содержащей флуктуационный шум и сингулярную помеху. К недостаткам такого метода можно отнести то, что рассматривается лишь скалярный ДО, в качестве измеряемого параметра выступает непосредственно интегральная кривая ДО, а это, как правило, не вполне соответствует потребностям практики. Для большинства прикладных задач более актуальным является оценивание ЧХ для векторного измеряемого выхода ДО.

Цель статьи — разработать метод численно-аналитического описания решения дифференциального уравнения и измеряемого выхода многомерного ДО для заданной области допустимости, а также оптимального оценивания ЧХ измеряемых функций (сохраняя достоинства метода [13]) по результатам некорректных наблюдений. Очевидно, что возможная нелинейность, отсутствие (как правило) общего решения соответствующего дифференциального уравнения, его зависимость не только от времени, но и от других характерных параметров (начального условия и коэффициентов правой части уравнения) делают эту задачу нетривиальной.

2. Постановка задачи

Рассмотрим многомерный ДО, описываемый моделью

$$dz/dt = \bar{f}(t, z, \eta), \quad z \in G_z \subset \mathbb{R}^{I_1}, \quad \eta \in G_\eta \subset \mathbb{R}^{I_2}, \quad t \in G_t = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}^1,$$

где $\eta = [\eta_i, i = \overline{1, I_2}]^T$ — вектор постоянных параметров неопределенности, которые могут принимать значения из заданной области допустимости $G_\eta = \{[r_1, p_1], [r_2, p_2], \dots, [r_{I_2}, p_{I_2}]\}$, $[r_i, d_i] \subset \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, I_2}$, $z_0 = z(t_0) \in G_{z_0} = \{[c_1, d_1], [c_2, d_2], \dots, [c_{I_1}, d_{I_1}]\}$, $G_{z_0} \subseteq G_z$, $[c_i, d_i] \subset \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, I_1}$. Данная модель может рассматриваться как самостоятельно, так и в качестве уравнения свободного движения для некоторого управляемого детерминированного или стохастического ДО. Вводя расширенный вектор $x = [z^T, \eta^T]^T \in \mathbb{R}^{I_1+I_2} = \mathbb{R}^I$ и учитывая, что $d\eta/dt \equiv 0$, приходим к другому описанию ДО в виде дифференциального уравнения

$$(2.1) \quad dx/dt = f(t, x), \quad t \in G_t = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}^1, \quad x \in \mathbb{R}^I,$$

где $x = x(t, x_0) = [x_i(t, x_0), i = \overline{1, I}]^T$ — решение уравнения с начальным условием $x_0 = x(t_0, x_0) = [x_{i0}, i = \overline{1, I}]^T \in G_{x_0}$, $G_{x_0} = \{x_0 \in \mathbb{R}^I : c_i \leq x_{i0} \leq d_i, i = \overline{1, I}\}$ — гиперпараллелепипед возможных начальных условий, $f(t, x)$ — функция, имеющая ту гладкость (по аргументам t и x), которая соответствует рассматриваемому ДО и требуется по смыслу проводимых в дальнейшем выкладок.

Для уравнения (2.1) справедливо

$$f(t, x) = [f_i(t, x), i = \overline{1, I}]^T = [\bar{f}_i(t, z, \eta), i = \overline{1, I_1}, \bar{f}_j(t, z, \eta), j = \overline{I_1 + 1, I}]^T,$$

где $\bar{f}_j(t, z, \eta) \equiv 0$, $j = \overline{I_1 + 1, I}$. При гладкой правой части $f(t, x)$ (с учетом существования всевозможных производных определенного порядка по t и x) решение $x(t, x_0)$ уравнения (2.1) и его соответствующие частные производные существуют и непрерывны в области $G_{xt} = \{G_{x_0}, G_t\}$ (см. [19, с. 124, 125]). Будем полагать, что гладкие частные решения $x_i(t, x_0)$ принадлежат пространству непрерывных функций $C[G_{xt}]$ с равномерной сходимостью, при этом норме этого пространства соответствует обозначение $\|\cdot\|_{C[G_{xt}]}$ (см. [20, с. 51, 52]).

Уравнению (2.1) можно поставить в соответствие приближенное аналитическое решение $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x_0)$, где $\tilde{x}_0 = \tilde{x}(t_0, x_0)$, при этом в общем случае $\max_i |\tilde{x}_{i0} - x_{i0}| \neq 0$, $i = \overline{1, I}$. Считаем, что $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x_0) = [\tilde{x}_i(t, x_0), i = \overline{1, I}]^T$ является ε_0 -приближенным по невязке решением [21]: $\max_i |\tilde{x}_{i0} - x_{i0}| \leq \varepsilon_0$, $d\tilde{x}_i/dt = f_i(t, \tilde{x}) + \vartheta_i(t)$, $\max_{i,t} |\vartheta_i(t)| \leq \varepsilon_0$, $t \in G_t$. В дальнейшем близость точной $x_i = x_i(t, x_0)$ и приближенной $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(t, x_0)$ фазовых координат ДО для фиксированного x_0 будем характеризовать невязкой $\varepsilon_{xi}(x_0) = \max_{t \in G_t} |\tilde{x}_i(t, x_0) - x_i(t, x_0)|$, соответственно для оценки близости их производных первого порядка (по аргументу t) вводится невязка $\varepsilon_{xi}^{(1)}(x_0) = \max_{t \in G_t} |\tilde{x}_i^{(1)}(t, x_0) - x_i^{(1)}(t, x_0)|$. Для оценки близости векторных решений $x(t, x_0)$, $\tilde{x}(t, x_0)$ и их производных $x^{(1)}(t, x_0)$, $\tilde{x}^{(1)}(t, x_0)$ используются невязки $\varepsilon_x(x_0) = \max_i \varepsilon_{xi}(x_0)$ и $\varepsilon_x^{(1)}(x_0) = \max_i \varepsilon_{xi}^{(1)}(x_0)$ соответственно.

Зададимся также векторным уравнением измеряемого выхода ДО

$$(2.2) \quad y(t) = \varphi(t, x(t, x_0)) \in \mathbb{R}^J, \quad t \in G_t,$$

где $y(t) = [y_j(t, x_0), j = \overline{1, J}]^T$ – вектор измеряемых функций с координатами $y_j(t, x_0)$, которые также принадлежат $C[G_{xt}]$, $\varphi(t, x)$ – гладкая функция своих аргументов (степень гладкости также определяется типом измеряемого выхода рассматриваемого ДО).

На траекториях $y_j(t, x_0) \in C^r[G_{xt}]$ вводится семейство Ω ЧХ ($\omega \in \Omega$), которые необходимы при решении тех или иных целевых задач, связанных с наблюдением за конкретным ДО, при этом будем использовать представление $\omega\{y_j(t, x_0)\} = \omega_j\{x_0\} \in \mathbb{R}^1$.

Воспользуемся дискретными уравнениями наблюдения за ДО

$$(2.3) \quad h_{jn} = y_{jn}(x'_0) + s_{jn} + \xi_{jn}, \quad j = \overline{1, J}, \quad n = \overline{0, N_j},$$

где $h_{jn} = h_j(t_{jn})$, $y_{jn}(x_0) = y_j(t_{jn}, x_0)$, $s_{jn} = s_j(t_{jn})$, $\xi_{jn} = \xi_j(t_{jn})$, $t_{jn} \in G_t$. В этом уравнении: $x'_0 \in G_{x_0}$ – неизвестное начальное условие, $s_j(t)$ – сингулярная помеха, $\xi_j(t)$ – флуктуационная погрешность. Введение индекса j во временную сетку $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$ позволяет рассмотреть случай асинхронных измерений различных функций выхода ДО.

Помеху опишем в виде $s_j(t) = C_j^T \Theta_j(t)$, где $C_j = [c_{jp}, p = \overline{1, M_{sj}}]^T$ – вектор неизвестных спектральных коэффициентов, $\Theta_j(t) = [\theta_{jp}(t), p = \overline{1, M_{sj}}]^T$ – вектор заданных базисных функций, M_{sj} – заданное число степеней свободы (на практике часто прибегают к упрощениям $M_{sj} = M_s$ и $\Theta_j(t) = \Theta(t)$). Вектор $\Theta_j(t)$, соответствующий $y_j(t, x_0)$, может формироваться из семейства базисных функций, которые в наибольшей степени соответствуют основным факторам неопределенности, отвечающим различным наиболее вероятным условиям наблюдения за ДО. Такое семейство должно предусматривать возможность появления сингулярных помех самого разного типа, с которыми можно столкнуться на практике при исследовании конкретного ДО в тех или иных условиях наблюдения.

Шум $\xi_j(t)$ на измерительной сетке $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$ характеризуется нулевым математическим ожиданием и соответствующей невырожденной корреляционной матрицей K_{Ξ_j} .

Введем векторные обозначения:

$$H_j = [h_{jn}, n = \overline{0, N_j}]^T, \quad Y_j = [y_{jn}(x'_0), n = \overline{0, N_j}]^T, \\ S_j = [s_{jn}, n = \overline{0, N_j}]^T, \quad \Xi_j = [\xi_{jn}, n = \overline{0, N_j}]^T.$$

Это позволяет перейти от (2.3) к векторному уравнению наблюдения $H_j = Y_j + S_j + \Xi_j$. Для фиксированного $j \in \overline{1, J}$ из Ω выберем произвольную ЧХ ω : $y_j(t, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^1$, в другой записи $\omega\{y_j(t, x_0)\} = \omega_j \in \mathbb{R}^1$. На основе наблюдения H_j нужно дать оценку значения ω_j , т.е. вычислить ЧХ измеряемой функции $y_j(t, x_0)$. Данную оценку будем искать в классе линейных оценок (здесь и далее индекс * соответствует некоторой оценке)

$$(2.4) \quad \omega_j^* = P_j^T H_j = P_j^T (Y_j + S_j + \Xi_j) = P_j^T Y_j + P_j^T S_j + P_j^T \Xi_j = \omega_{Y_j}^* + \omega_{S_j}^* + \omega_{\Xi_j}^*,$$

где $P_j = [p_{jn}, n = \overline{0, N_j}]^T$ – вектор искомых весовых коэффициентов.

В силу линейности процедуры оценивания (2.4) при фиксированном P_j дисперсия ошибки вычисления характеристики ω_j находится как

$$\sigma_j^2 = P_j^T K_{j\Xi} P_j.$$

Выбор оптимального значения P_j^* для вектора P_j соответствует критерию

$$P_j^* = \min_{P_j} \sigma_j^2,$$

при этом должны выполняться условия несмещенности оценки

$$P_j^T Y_j = \omega \{y_j(t, x_0)\} = \omega_j$$

и ее инвариантности к помехе

$$P_j^T S_j = 0.$$

Требуется с учетом (2.1)–(2.4): сформировать алгоритм построения численно-аналитического решения $\tilde{x}(t, x_0)$; обсудить вопросы точности и оптимизации выбора параметров данного алгоритма; сформировать алгоритм построения численно-аналитического выражения для измеряемого многомерного выхода ДО; сформировать алгоритм нахождения оптимального вектора P_j^* и оценки ω_j^* и рассмотреть возможность оценивания различных ЧХ на основе наблюдений H_j ; исследовать методическую погрешность данного алгоритма; определить условия и границы применимости развиваемого метода, дать комментарии к достигаемому вычислительному эффекту.

3. Численно-аналитическое решение дифференциального уравнения динамического объекта (этап 1)

Для формирования решения уравнения (2.1) в области G_{xt} можно использовать широко применяющуюся в общей теории приближенных методов [22] математическую конструкцию

$$(3.1) \quad \tilde{x}_i(t, x_0) = \sum \beta_{ik}^x \zeta_{ik}^x(t, x_0), \quad i = \overline{1, I},$$

где \sum — одномерная сумма по индексу k с заданным числом неизвестных коэффициентов β_{ik}^x и известных базисных $\zeta_{ik}^x(t, x_0)$. Очевидно, что с учетом гладкости решения $x_i(t, x_0)$ число слагаемых в сумме можно подобрать так, чтобы для любого сколь угодно малого $\delta_{xi} \geq 0$ обеспечивалось выполнение условия $\varepsilon_{xi}(x_0) < \delta_{xi}$ независимо от конкретного значения $x_0 \in G_{x0}$. В частном случае можно перейти от (3.1) к приближению на основе многомерного многочлена (см. [23, с. 152])

$$(3.2) \quad \tilde{x}_i(t, x_0) = \sum \alpha_{im}^x z^m, \quad i = \overline{1, I},$$

$z = (t, x_{10}, \dots, x_{I0})$, \sum — многомерная сумма по мультииндексу m с заданным числом неизвестных коэффициентов α_{im}^x . Представление (3.2) используется в

теореме Вейерштрасса [23], подтверждающей возможность наилучшего приближения к $x_i(t, x_0)$ в равномерной метрике для области G_{xt} . Для гладких решений хорошее приближение можно получить на основе конструкции

$$(3.3) \quad \tilde{x}_i(t, x_0) = [\Psi_i^x(t)]^T B_i^x \Lambda_i^x(x_0), \quad i = \overline{1, I},$$

где $\Psi_i^x(t)$ и $\Lambda_i^x(x_0)$ — векторы заданных гладких базисных функций соответствующей размерности, B_i^x — матрица неизвестных коэффициентов. Если в качестве координат векторов $\Psi_i^x(t)$ и $\Lambda_i^x(x_0)$ использовать многомерные многочлены с соответствующими мультииндексами (по аналогии с [23, с. 152]), то представление (3.3) несложно получить из (3.1). На практике конструкция (3.3) широко распространена для описания большого класса ДО.

Для расчета коэффициентов, фигурирующих в математических конструкциях (3.1)–(3.3), воспользуемся методом опорных интегральных кривых (ОИК) решения дифференциальных уравнений [17, 18]. Обобщим метод ОИК на векторное уравнение (2.1). Для этого в области G_{x_0} рассмотрим сетку, состоящую из многомерных узлов $x_{0(r)} \in G_{x_0}$, $r \in \overline{1, M_x}$. Этим узлам поставим в соответствие семейство ОИК $x_{i(r)} = x_i(t, x_{0(r)})$, $i = \overline{1, I}$, $r = \overline{1, M_x}$, которое формируется на основе одного из известных высокоточных численных методов интегрирования. Погрешностями построения ОИК в дальнейшем будем пренебрегать (по аналогии с [17, 18]). На практике данное семейство задается таблично.

Теперь в области G_t задается временная сетка $\{t_{(ik)}\}$, $k = \overline{1, M_{ti}}$, объема которой достаточно для представления фазовых координат $x_i(t, x_{0(r)})$ в области G_{xt} с требуемой точностью. Далее с использованием семейства ОИК формируется массив чисел

$$(3.4) \quad x_{i(rk)} = x_i(t_{(ik)}, x_{0(r)}), \quad i = \overline{1, I}, \quad r = \overline{1, M_x}, \quad k = \overline{1, M_{ti}}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов в формулах (3.1)–(3.3) можно применять известные операторы E_1^x , E_2^x и E_3^x (интерполяции или аппроксимации [23–25]), при этом с учетом (3.4), используя эти операторы, вычисляются указанные коэффициенты

$$(3.5) \quad E_1^x : \{x_{i(rk)}\} \rightarrow \{\beta_{ik}^x\}, \quad E_2^x : \{x_{i(rk)}\} \rightarrow \{\alpha_{im}^x\}, \quad E_3^x : \{x_{i(rk)}\} \rightarrow \{B_i^x\}.$$

При построении численно-аналитического решения $\tilde{x}(t, x_0)$ уравнения (2.1) на базе (3.5) в общем случае применяется неравномерная сетка $\{t_{(ik)}\}$ по аргументу t . Кроме того, для многих ДО зависимость фазовой координаты $x_i(t, x_0)$ от x_0 является слабо выраженной, что существенно снижает объем M_x вычислительной сетки по начальному условию x_0 и упрощает рассмотренную процедуру (интерполяционную или аппроксимационную) построения численно-аналитического решения $\tilde{x}(t, x_0)$ уравнения (2.1).

Таким образом, априорно на первом этапе (до получения измерительных данных) строится приближенное аналитическое решение $\tilde{x}(t, x_0)$ уравнения (2.1), обеспечивающее в области G_{xt} требуемую для практики точность анализа ДО. В число параметров, позволяющих достичь такой точности, можно отнести объемы используемых сеток (M_{ti} и M_x), кроме того,

важен выбор систем базисных функций в приближениях (3.1)–(3.3) с учетом вида правой части уравнения (2.1).

Конкретизируем описанную процедуру на случай, когда при построении решения на базе (3.3) используются фундаментальные многочлены интерполяции (как тензорное произведение одномерных фундаментальных многочленов [23]). С этой целью в области G_{x_0} зададим многомерную вычислительную сетку $\{x_{0(m)}\} = \{x_{0(m_1, \dots, m_I)}\}$ (где $m = (m_1, \dots, m_I)$ — мультииндекс, $m_i = \overline{1, M_{xi}}$, $i = \overline{1, I}$, $\prod M_{xi} = M_x$, \prod — знак умножения по индексу $i = \overline{1, I}$) и для всех ее узлов построим семейство ОИК $x_{i(m)} = x_{i(m_1, \dots, m_I)} = x_i(t, x_{0(m)}) = x_i(t, x_{0(m_1, \dots, m_I)})$, $i = \overline{1, I}$. На отрезке $c_i \leq x_{i0} \leq d_i$ задаются узлы $x_{i0(1)}, \dots, x_{i0(M_{xi})}$ и принимается, что

$$\psi_{ik}^x(t) = L_{i(k)}(t) = \prod_{j=1, j \neq k}^{M_{ti}} (t - t_{i(j)}) / (t_{i(k)} - t_{i(j)}).$$

В этом случае решение (3.3) имеет вид

$$\tilde{x}_i(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_{ti}} \sum_m x_{i(mk)} L_{i(k)}(t) L_{i(m)}(x_0), \quad i = \overline{1, I},$$

где \sum_m — многомерная сумма по мультииндексу m ,

$$L_{i(m)}(x_0) = \prod_{i=1}^I L_{(m_i)}(x_{i0}),$$

$$L_{(m_i)}(x_{i0}) = \sum_{q=1, q \neq m_i}^{M_{xi}} (x_{i0} - x_{i0(q)}) / (x_{i0(m_i)} - x_{i0(q)}).$$

Если $\tilde{x}_i(t, x_0)$ является ε_0 -приближенным по невязке решением, то для погрешности $\varepsilon_{xi}(x_0)$ представления фазовой координаты $x_i(t, x_0)$ с использованием $\tilde{x}_i(t, x_0)$ справедлива оценка (по аналогии с [21])

$$\varepsilon_{xi}(x_0) \leq \varepsilon_0 \left[(L_0^{-1} + 1) \exp(L_0 |t - t_0|) - L_0^{-1} \right],$$

где $t \in G_t$, $x_0 \in G_{x_0}$, L_0 — константа Липшица для правой части уравнения (2.1). Соответственно для оценки близости точного $x(t, x_0)$ и приближенного $\tilde{x}(t, x_0)$ векторных решений применима оценка

$$\varepsilon_x(x_0) \leq \varepsilon_0 \left\{ \sqrt{I} \exp(L_0 I^2 T) + (L_0 I)^{-1} [\exp(L_0 I^2 T) - 1] \right\}.$$

Опираясь на [23–25], можно также оценить вклад наследственной погрешности и погрешности округлений в результирующую ошибку построения приближенного решения уравнения (2.1). При учете погрешностей интерполяции и аппроксимации на качество формируемого численно-аналитического решения достаточно воспользоваться оценками, которые приводятся в [23–25].

4. Численно-аналитическое описание измеряемого выхода динамического объекта (этап 1)

Точный выход ДО можно представить в виде

$$y(t) = \varphi(t, x(t, x_0)) = \gamma(t, x_0) \in \mathbb{R}^J,$$

при этом $\varphi : G_{xt} \rightarrow G_{yt}$ — гладкая функция по t и x_0 . Соответственно для приближенного выхода ДО имеем

$$\tilde{y}(t) = \varphi(t, \tilde{x}(t, x_0)) = \tilde{\gamma}(t, x_0) \in \mathbb{R}^J.$$

По аналогии с разделом 3 для численно-аналитического описания измеряемого выхода ДО можно использовать семейство ОИК, при этом также применяем принцип гладкой зависимости $y(t) = \gamma(t, x_0)$ от своих аргументов. Для этой цели семейству ОИК $x_{(r)} = x(t, x_{0(r)})$, $r = \overline{1, M_x}$, поставим в соответствие семейство выходных траекторий

$$y_{j(r)}(t) = \varphi_j(t, x(t, x_{0(r)})) = \gamma_j(t, x_{0(r)}), \quad j \in \overline{1, J}, \quad r = \overline{1, M_x},$$

которые представим массивом чисел

$$y_{j(rk)} = \varphi_j(t_{i(k)}, x(t_{i(k)}, x_{0(r)})) = \gamma_j(t_{i(k)}, x_{0(r)}), \\ j \in \overline{1, J}, \quad r = \overline{1, M_x}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Теперь по аналогии с (3.5) можно получить оценки неизвестных коэффициентов в приближенных выражениях для измеряемого выхода ДО, если в формулах (3.1)–(3.3) заменить символ x на y , а символ i на j :

$$E_1^y : \{y_{j(rk)}\} \rightarrow \{\beta_{jk}^y\}, \quad E_2^y : \{y_{j(rk)}\} \rightarrow \{\alpha_{jm}^y\}, \quad E_3^y : \{y_{j(rk)}\} \rightarrow \{B_j^y\}.$$

По аналогии с (3.3) выход ДО представим так:

$$(4.1) \quad \tilde{y}_j(t) = \left[\Psi_j^y(t) \right]^T B_j^y \Lambda_j^y(x_0), \quad j = \overline{1, J},$$

$$(4.2) \quad \tilde{y}_j(t) = \tilde{\gamma}_j(t, x_0) = \sum_{k=1}^{M_t} \sum_m y_{j(mk)} L_{j(k)}(t) L_{j(m)}(x_0), \quad j = \overline{1, J}.$$

Формулы (4.1) и (4.2) являются удобными в численно-аналитических расчетах и в максимальной степени ориентированы на оперативные вычисления.

5. Оценивание числовых характеристик измеряемых параметров динамического объекта (этап 2)

Этап 2 связан непосредственно с обработкой поступающих измерений и согласно современной концепции должен характеризоваться минимальными вычислительными затратами, заданной оперативностью и устойчивостью к

сингулярной помехе. Выполнить эти требования возможно, если воспользоваться процедурой автокомпенсационного оценивания ЧХ при некорректных условиях наблюдения. С учетом (4.1) выходную траекторию ДО зададим в виде

$$(5.1) \quad \tilde{y}_j(t) = \tilde{\gamma}_j(t, x'_0) = \left[B_j^y(x'_0) \right]^T \Psi_j^y(t) = \bar{Y}_j^T \Psi_j^y(t), \quad j = \overline{1, J},$$

где $\bar{Y}_j = [y_j(t_{(k)}), k = \overline{1, M_t}]^T = B_j^y(x'_0)$ — вектор временных отсчетов траектории $\tilde{y}_j(t) = \tilde{\gamma}_j(t, x'_0)$ на вычислительной сетке $\{t_{(k)}\}_{k=1}^{M_t}$, $x'_0 \in G_{x0}$ — неизвестное начальное условие, фигурирующее в уравнении наблюдения (2.3), $\Psi_j^y(t) = [\psi_{jk}^y(t), k = \overline{1, M_t}]^T$ — вектор базисных функций. Полагаем, что

$$\tilde{\gamma}_j(t_{(k)}, x'_0) = \bar{Y}_j^T \Psi_j^y(t_{(k)}) \approx y_j(t_{(k)}),$$

при этом вектор временных отсчетов координаты $y_{jn} = \gamma_j(t_{jn}, x_0)$ на измерительной сетке $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$ (где $N_j \gg M_t$) приближенно может быть задан в виде $Y_j \approx \bar{Y}_j^T \Psi_j^y$, $j = \overline{1, J}$, где $\Psi_j^y = [\psi_{jkn}^y, k = \overline{1, M_t}, n = \overline{0, N_j}]$ — матрица отсчетов $\psi_{jkn}^y = \psi_{jk}^y(t_{jn})$ функций $\psi_{jk}^y(t)$.

Условие несмещенности оценки ЧХ (см. раздел 2) принимает вид

$$P_j^T Y_j = \omega \{ \gamma_j(t, x_0) \} = \left[\omega \{ \Psi_j^y(t) \} \right]^T \bar{Y}_j = P_j^T \left(\Psi_j^y \right)^T \bar{Y}_j = \omega_j,$$

где $\omega \{ \Psi_j^y(t) \} = \left[\omega \{ \psi_{jk}^y(t) \}, k = \overline{1, M_t} \right]^T$ — вектор значений ЧХ ω на базисных функциях $\psi_{jk}^y(t)$. Отсюда следует окончательное условие несмещенности

$$(5.2) \quad \Psi_j^y P_j = \omega \{ \Psi_j^y(t) \}.$$

Поскольку необходимо, чтобы

$$\omega \{ s_j(t) \} = \omega \{ C_j^T \Theta_j(t) \} = C_j^T \omega \{ \Theta_j(t) \} = P_j^T S_j = 0,$$

то условие инвариантности (см. раздел 2) можно преобразовать к виду

$$(5.3) \quad \Theta_j P_j = [0]_{M_{sj} \times 1},$$

где $[0]_{M_{sj} \times 1}$ — нулевой вектор-столбец размерности $M_{sj} \times 1$,

$\Theta_j = [\theta_{jsn}, s = \overline{1, M_{sj}}, n = \overline{0, N_j}]$ — матрица отсчетов $\theta_{jsn} = \theta_{js}(t_{jn})$ базисных функций сингулярной помехи.

Задача нахождения оптимальной оценки P_j^* вектора P_j решается методом условной оптимизации Лагранжа на базе критерия $P_j^* = \min_{P_j} \sigma_j^2$ с учетом

ограничений (5.2) и (5.3). В итоге получаем процедуру автокомпенсационного оценивания ЧХ применительно к измеряемому выходу ДО

$$(5.4) \quad P_j^* = Z_{j1} \left(\Psi_j^y \right)^T \left[\Psi_j^y Z_{j1} \left(\Psi_j^y \right)^T \right]^{-1} \omega \left\{ \Psi_j^y(t) \right\},$$

$$(5.5) \quad \omega_{j0}^* = [P_j^*]^T H_j = H_j^T P_j^*,$$

где $Z_{j1} = Z_{j2} K_{j\Xi}^{-1}$, $Z_{j2} = E_j - K_{j\Xi}^{-1} \Theta_j^T \left(\Theta_j K_{j\Xi}^{-1} \Theta_j^T \right)^{-1} \Theta_j$, E_j — единичная матрица.

Из (5.4) непосредственно вытекает, что матрицы $K_{j\Xi}$, $\Theta_j K_{j\Xi}^{-1} \Theta_j^T$ и $\Psi_j^y Z_{j1} \left(\Psi_j^y \right)^T$ должны быть невырожденными и хорошо обусловленными, что соответствует получению единственного и устойчивого решения P_j^* . Данный вопрос относится к сфере оптимального планирования измерительного эксперимента и в данной статье не рассматривается. При рациональном выборе основных параметров процедуры (5.4), (5.5) можно избежать необходимости решения некорректной (с вычислительной точки зрения) задачи оценивания.

Для дисперсии оптимальной оценки ω_j^* числовой характеристики ω_j имеем выражение

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \sigma_j^2 &= [P_j^*]^T K_{j\Xi} P_j^* = \\ &= \left[\omega \left\{ \Psi_j^y(t) \right\} \right]^T W_{j1} \Psi_j^y Z_{j1}^T K_{j\Xi} Z_{j1} \left(\Psi_j^y \right)^T W_{j2} \omega \left\{ \Psi_j^y(t) \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{где } W_{j1} = \left[\Psi_j^y \left(Z_{j1} \right)^T \left(\Psi_j^y \right)^T \right]^{-1}, \quad W_{j2} = \left[\Psi_j^y Z_{j1} \left(\Psi_j^y \right)^T \right]^{-1}.$$

Выражения (5.4)–(5.6) имеют явный векторно-матричный вид, что существенно упрощает их применение в любой вычислительной среде. Оценка ЧХ (5.5) формируется сразу, без промежуточного вычисления спектральных коэффициентов измеряемой функции и сингулярной помехи, т.е. без расширения пространства состояний. Кроме того, эта оценка является несмещенной, поскольку достигается инвариантность результата оценивания к сингулярной помехе. В силу этого алгоритм нахождения оптимального значения ЧХ на базе выражений (5.4) и (5.5) можно отнести к классу линейных автокомпенсационных алгоритмов.

Следует отметить, что задачу оценивания ЧХ можно было бы решать традиционно — путем расширения пространства состояний. Но тогда в вектор оцениваемых параметров надо было бы включить все спектральные коэффициенты, входящие в линейные комбинации измеряемой функции и сингулярной помехи. Оценив эти коэффициенты, далее можно находить искомую ЧХ с учетом этих комбинаций. Однако в [13–16] показано (а также это следует из (5.4) и (5.5)), что можно сразу найти оценку скалярной ЧХ (без вычисления указанных коэффициентов), оперируя с обратными матрицами гораздо меньшего размера (что очень полезно с вычислительной точки зрения).

Дадим оценку усредненной методической погрешности δ_j оценивания ЧХ применительно к представлению (4.1). Поскольку в (4.1) не учитывается

“хвост”

$$\Delta_j(t, x_0) = \gamma_j(t, x_0) - \left[\Psi_j^y(t) \right]^T B_j^y \Lambda_j^y(x_0)$$

бесконечного ряда, то имеем (используя символ математического ожидания $M[\cdot]$), что

$$\begin{aligned} \delta_j = M[\omega_j - \omega_j^*] = M \left[\omega \left\{ \left[\Psi_j^y(t) \right]^T B_j^y \Lambda_j^y(x_0) \right\} + \right. \\ \left. + \omega \{ \Delta_j(t, x_0) \} - \omega_{Y_j}^* - \omega_{\Delta_j}^* - \omega_{S_j}^* - \omega_{\Xi_j}^* \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{Y_j}^* = (P_j^*)^T Y_j, \quad \omega_{\Delta_j}^* = (P_j^*)^T \Delta_j, \quad \Delta_j = [\Delta(t_n, x_{j0}), n = \overline{0, N}]^T, \\ \omega_{S_j}^* = P_j^T S_j, \quad \omega_{\Xi_j}^* = P_j^T \Xi_j. \end{aligned}$$

Так как $\omega \left\{ \left[\Psi_j^y(t) \right]^T B_j^y \Lambda_j^y(x_0) \right\} = \omega_{y_j}^*$ (условие несмещенности), $\omega_{S_j}^* = P_j^T S_j = 0$ (условие инвариантности) и $M[\Xi_j] = 0$ (шум является центрированным), то вытекает равенство

$$\begin{aligned} (5.7) \quad \delta_j = M \left[\omega \{ \Delta_j(t, x_0) \} - (P_j^*)^T \Delta_j - (P_j^*)^T \Xi_j \right] = \\ = \omega \{ \Delta_j(t, x_0) \} - (P_j^*)^T \Delta_j. \end{aligned}$$

Таким образом, методическая погрешность оценивания в среднем определяется значением ЧХ на “хвосте” бесконечного ряда и линейной оценкой этого значения.

Необходимые и достаточные условия существования и единственности решения (5.4), (5.5) задачи оценивания ЧХ измеряемого выхода ДО требуют невырожденности и соблюдения некоторых ограничений на ранги ряда матриц. Выполнение этих условий на практике обеспечивается рациональным выбором векторов $\Psi_j^y(t)$ и $\Theta_j(t)$ базисных функций, числа измерительных узлов $\{t_{jn}\}_{n=0}^{N_j}$ и их расположением, числа степеней свободы в моделях приближенного решения дифференциального уравнения и измеряемого выхода ДО, а также сингулярной помехи. Все эти вопросы относятся к планированию измерительного эксперимента. Используя результаты из [9, 10], можно получить оптимальные оценки параметров предлагаемого метода с учетом статистических характеристик флуктуационных погрешностей измерений. В статье не рассматриваются эти вопросы, чтобы не перегружать объем статьи, хотя они и важны для практики, но являются второстепенными для теории результатами.

Теперь рассмотрим вопрос, связанный с параметрической идентификацией j -го измеряемого выхода ДО (где $j \in \overline{1, J}$). Для этого в соответствии с

алгоритмом (5.4), (5.5) необходимо оценить вектор коэффициентов \bar{Y}_j в модели (5.1). Согласно данному алгоритму находятся оптимальные оценки $y_{j(k)}^*$ отсчетов измеряемой функции $y_j(t) = \gamma_j(t, x'_0)$ в узлах $t_{(k)}$, $k = \overline{1, M_t}$, с учетом некорректных наблюдений (2.3). Если истинные значения отсчетов $y_j(t)$ рассматривать как ЧХ измеряемой функции $y_j(t) = \gamma_j(t, x'_0)$ с фиксированным (но неизвестным) начальным условием x'_0 , т.е. $y_{j(k)} = \omega \{ \gamma_j(t, x'_0) \}$, то можно воспользоваться оценками

$$(5.8) \quad \omega_j^* = y_{j(k)}^* = H_j^T Z_{j1} \left(\Psi_j^y \right)^T \left[\Psi_j^y Z_{j1} \left(\Psi_j^y \right)^T \right]^{-1} \omega \left\{ \Psi_j^y(t) \right\}, \quad j = \overline{0, J},$$

положив $\omega \{ \Psi_{yj}(t) \} = [0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]^T$ – нулевой столбец с единицей в k -й позиции. Зная оценку $\bar{Y}_j^* = [y_{j(k)}^*, k = \overline{1, M_t}]^T$ вектора $\bar{Y}_j = [y_j(t_{(k)}), k = \overline{1, M_t}]^T$, формируем оценки выходных траекторий $\tilde{y}_j^*(t) = [\Psi_j^y(t)]^T \bar{Y}_j^*$, $j = \overline{1, J}$, для рассматриваемого ДО.

Таким образом, несмотря на то что рассматриваемый ДО и его выход являются нелинейными, оценивание ЧХ на выходных траекториях ДО осуществляется без привлечения традиционно используемых процедур линеаризации нелинейных функций.

6. Некоторые обобщения, вычислительные аспекты, практические рекомендации

Задачу оценивания, рассмотренную в разделе 5, также можно обобщить на многомерный случай, который связан с оценкой векторной ЧХ $\omega = [\omega_d, d = \overline{1, D}]^T$ на выходных траекториях ДО. В этом случае оценка находится в векторно-матричном виде $\omega_j^* = P_j^* H_j$, где

$$P_j^* = [p_{jdn}^*, d = \overline{1, D}, n = \overline{0, N}]$$

– оценка матрицы P_j весовых коэффициентов. Данная матрица находится из условия минимизации следа корреляционной матрицы $K_j = P_j K_{j\Xi} P_j^T$ этой оценки, кроме того, также должны быть выполнены условия несмещенности и инвариантности, рассмотренные в разделе 5, по отношению ко всем координатам вектора ω_j^* . Несложный анализ показывает, что данная задача разбивается на D подзадач, связанных с оцениванием по каждой координате вектора $\omega = [\omega_d, d = \overline{1, D}]^T$, т.е. достигается максимально возможная декомпозиция вычислительной процедуры.

Для оценки вычислительной эффективности развитого автокомпенсационного метода оценивания ЧХ измеряемых функций ДО достаточно воспользоваться результатами из [15], которые демонстрируют возможность реализации процедуры оценивания в некорректных условиях наблюдения на основе распределенной обработки данных. В качестве показателя вычислительной эффективности метода можно принять время, затрачиваемое на получение искомых оценок. Данное время определяется быстродействием распределенной среды, общим числом операций, необходимых при реализации метода, и

способом программирования. В [15] показано, что поскольку процедура оценивания не требует расширения пространства состояний, то реализуемые на ее основе алгоритмы позволяют достичь значительного выигрыша в вычислительной эффективности. В [15] дана количественная оценка достигаемого выигрыша на конкретном примере, связанном с решением известной задачи сглаживания результатов измерений, когда в качестве ЧХ выступает значение измеряемой функции в фиксированной точке интервала наблюдения. Показано, что для принятых исходных данных выигрыш по сравнению с известным расширенным методом наименьших квадратов составил 1,47 раза.

В качестве ЧХ могут рассматриваться выборочное значение j -й измеряемой функции в произвольной точке $t' \in G_t$ (в этом случае $\omega \{ \Psi_y(t) \} = [\psi_{yk}(t'), k = \overline{1, M_t}]^T$), значение производной r -го порядка в точке t' (в этом случае $\omega \{ \Psi_y(t) \} = [\psi_{yk}^{(r)}(t'), k = \overline{1, M_t}]^T$), значение определенного интеграла на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ (в этом случае $\omega \{ \Psi_y(t) \} = [\int_{t_0}^{t_0+T} \psi_{yk}(\tau) d\tau, k = \overline{1, M_t}]^T$) и др.

Предложенный алгоритм оценивания можно выполнять на подвижной сетке (“скользящем окне”) $\{t_{j,r+l-1}\}_{l=-\bar{n}_j/2}^{\bar{n}_j/2} \in G_t$, где $(\bar{n}_{j+1} + 1)$ — объем “скользящего окна”, r характеризует положение его центрального узла в момент времени $t_{jr} \in G_t$, а символ j позволяет занумеровать узлы “скользящего окна” при фиксированном r . Очевидно, что для формирования полномерного “скользящего окна” объемом $\bar{n}_{j+1} + 1$ должны выполняться ограничения $1 + \bar{n}_j/2 \leq r \leq 1 + N_j - \bar{n}_j/2$ и $-\bar{n}_j/2 \leq l \leq \bar{n}_j/2$, в противном случае алгоритм оценивания реализуется на неполномерном “скользящем окне” нарастающего объема (это относится к краям временного отрезка $[t_0, T]$). Но и в этом случае имеется ограничение — этого объема должно быть достаточно для обеспечения невырожденности задачи оценивания.

Известно, что точность оценивания сглаженного значения измеряемой функции — наибольшая в середине “скользящего окна”, что также в полной мере относится к нахождению различных ЧХ (например, производных), которые соответствуют некоторой произвольной точке $t' \in G_t$, являющейся одним из узлов подвижной сетки. Алгоритм оценивания несложно реализовать и на адаптивном “скользящем окне”, объем которого меняется оптимальным образом с учетом условий наблюдения за ДО.

7. Иллюстративный пример

Оценим эффективность предлагаемого метода применительно к ракете, движущейся в однородном поле силы тяжести, при линейном законе расхода массы и отсутствии сопротивления среды (см. [12, с. 31–34]). Криволинейное движение ракеты описывается системой дифференциальных уравнений

$$dz_1/dt = -g_0 z_2^{-1}, \quad dz_2/dt = c_v \eta (1 - \eta t)^{-1} - g_0 \text{th}(z_1),$$

где время измеряется в секундах, $z_1 = x_1$ — фазовая координата (безразмерная), соответствующая углу β (рад) наклона вектора скорости к горизонту, $z_1 = \ln [\text{tg}(\pi/4 + \beta/2)]$, $z_2 = x_2$ — величина скорости ракеты (м/с),

g_0 — ускорение силы тяжести (м/с²), $\eta = x_3$ — удельный расход массы ракеты (с⁻¹), c_v — относительная скорость отбрасываемых частиц (м/с). Далее полагаем, что $g_0 = 9,80665$ (взято из справочника), $c_v = 2290$, $t_0 = 0$, $T = 70$, $x_{i0} = x_i(0) \in G_{xi} = [c_i, d_i]$, $i = \overline{1,3}$, $c_1 = 1,0107$, $d_1 = 2,4362$, $c_2 = 100$, $d_2 = 200$, $c_3 = r = 0,0060$, $d_3 = p = 0,0100$, в качестве измеряемой функции y используем угол β , т.е. $J = 1$, $y = \beta$ (с учетом скалярного выхода ДО в используемых далее формулах индекс j опускается).

Для построения численно-аналитического решения принято $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$, следовательно, $I = I_1 + I_2 = 3$, при этом: $f_1(t, x) = -g_0 x_2^{-1}$, $f_2(t, x) = c_v x_3 (1 - x_3 t)^{-1} - g_0 \text{th}(x_1)$, $f_3(t, x) \equiv 0$, $m = (m_1, m_2, m_3)$, $M_{x_1} = 4$, $M_{x_2} = 6$, $M_{x_3} = 5$, $M_x = M_{x_1} M_{x_2} M_{x_3} = 120$, $M_t = 11$, $M_s = 2$, $\psi_{xk}(t) = L_{(k)}(t)$, $L_{(m)}(x_0) = L_{(m_1, m_2, m_3)}(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = L_{(m_1)}(x_{10}) L_{(m_2)}(x_{20}) L_{(m_3)}(x_{30})$, $t_{(k)} = 7(k - 1)$, $k = \overline{1, 11}$.

При расчетах погрешность операций над числами составляла $2,2 \cdot 10^{-16}$, а результаты вычислений представлены с точностью до четвертого знака после запятой. Вычисления выполнялись на компьютере средней мощности, аппаратная часть которого построена на базе процессора Intel Core i7 с оперативной памятью объемом 8 Гб и твердотельным диском Samsung 850 Pro. В качестве операционной системы использовалась Windows 10 Pro, а среды численного моделирования — MATLAB R2018b. Средняя загрузка ресурсов процессора составила 45 %, а оперативной памяти — 80 %. При построении приближенного аналитического решения на базе полиномов Лагранжа использовалась откомпилированная функция [26], написанная на языке MATLAB, что позволило увеличить оперативность вычислений в 40 раз за счет оптимизации работы с циклическими операциями [27].

Этап 1. Для построения семейства ОИК применялся метод Рунге–Кутты 4-го порядка с контролируемой точностью 10^{-5} . Время вычислений в части формирования семейства ОИК составило 17,3 секунд, в части приближенного аналитического решения на основе построенного семейства ОИК — 195,7 секунд. В итоге общее время расчета составило 222,5 секунд (с учетом подготовки исходных данных и представления результатов расчета).

С целью наглядности результатов моделирования для оценки точности использовалась частная невязка $\bar{\varepsilon}_{xi} = |x_i(t, x_0) - \tilde{x}_i(t, x_0)|$, $i \in \{1, 2\}$, как функция от времени t и начального условия x_0 . Так, на рис. 1 представлена зависимость частной невязки $\bar{\varepsilon}_{x1}$ от t и x_{10} для фиксированных значений $x_{20} = 104$ и $x_{30} = 0,0063$. При этом на исходной области $\{G_{x_0}, G_t\}$ имеем общую невязку $\varepsilon_{x1} = \max_{x_0} \varepsilon_{x1}(x_0) = 0,0020$ (где $\varepsilon_{x1}(x_0) = \max_t |\tilde{x}_1(t, x_0) - x_1(t, x_0)|$), что составляет 0,3237 %. Данный максимум соответствует узлу ($t = 27$, $x_{10} = 2,1466$, $x_{20} = 104$, $x_{30} = 0,0063$). На усеченной области $\{\bar{G}_{x_0}, \bar{G}_t\}$ (где $\bar{G}_{x_0} = \{[1,3170; 1,7454], [120; 180], [0,0070; 0,0090]\}$ и $G_t = [7,63]$) получили общую невязку $\varepsilon_{x1} = 0,0004$, что составляет 0,1853 %. Данный максимум соответствует узлу ($t = 36$, $x_{10} = 1,5065$, $x_{20} = 128$, $x_{30} = 0,0070$).

На рис. 2 представлена зависимость частной невязки $\bar{\varepsilon}_{x2}$ от t и x_{30} для фиксированных значений $x_{10} = 2,1466$ и $x_{20} = 124$. При этом на исходной области $\{G_{x_0}, G_t\}$ имеем общую невязку $\varepsilon_{x2} = \max_{x_0} \varepsilon_{x2}(x_0) = 4,0542$ (где $\varepsilon_{x2}(x_0) =$

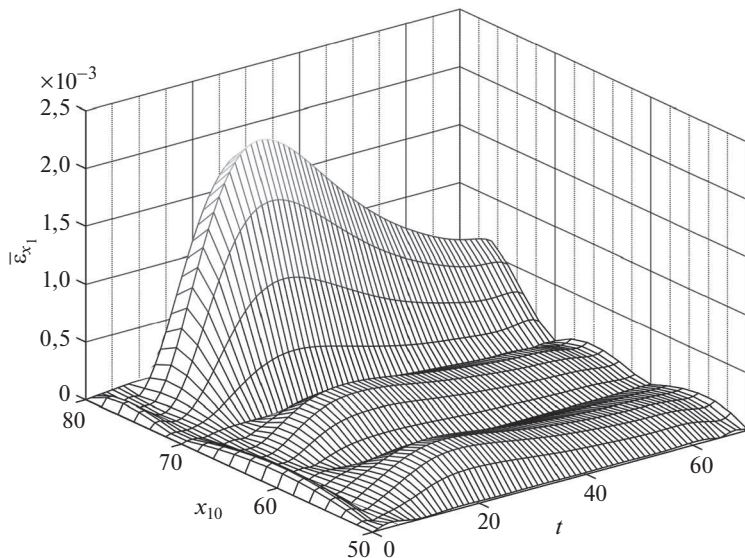


Рис. 1. Зависимость невязки частной $\bar{\varepsilon}_{x_1}$ от t и x_{10} для фиксированных значений x_{20} и x_{30} .

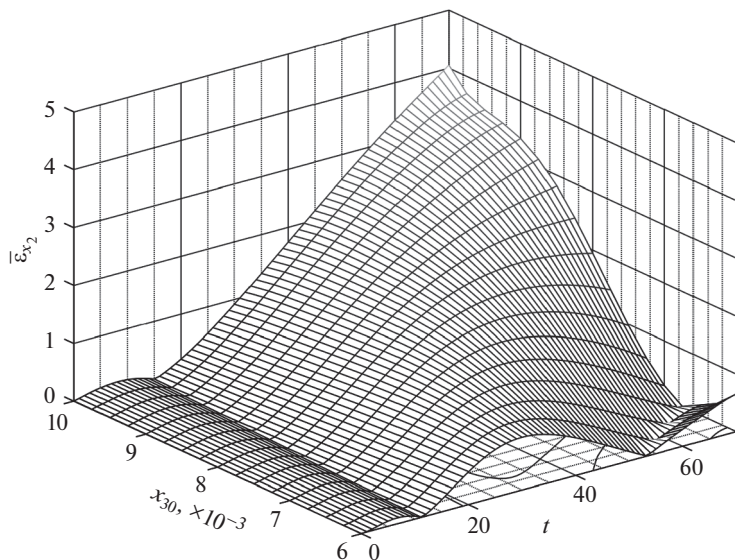


Рис. 2. Зависимость частной невязки $\bar{\varepsilon}_{x_2}$ от t и x_{30} для фиксированных значений x_{10} и x_{20} .

$= \max_t |\tilde{x}_2(t, x_0) - x_2(t, x_0)|$), что составляет 0,1744%. Данный максимум соответствует узлу $(t = 70, x_{10} = 2,1466, x_{20} = 124, x_{30} = 0,0100)$. На усеченной области $\{\bar{G}_{x_0}, \bar{G}_t\}$ получили общую невязку $\varepsilon_{x_2} = 0,6355$, что составляет 0,0367%. Данный максимум соответствует узлу $(t = 63, x_{10} = 1,5065, x_{20} = 180, x_{30} = 0,0090)$.

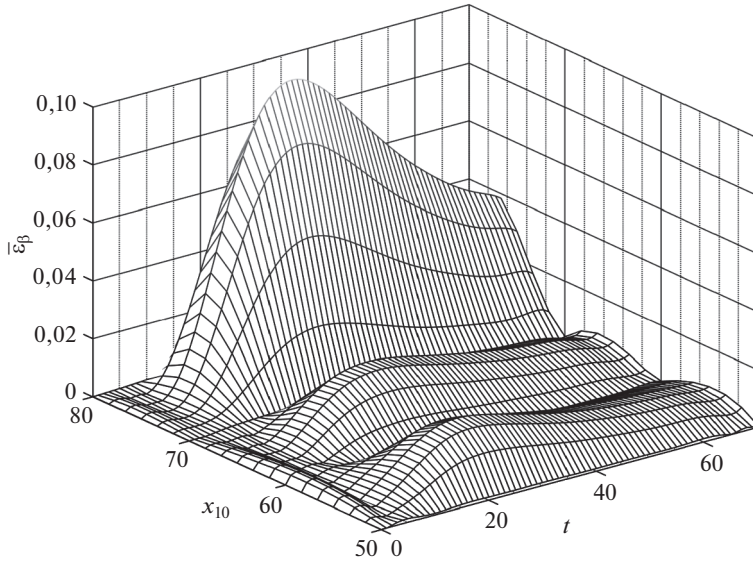


Рис. 3. Зависимость частной невязки $\bar{\varepsilon}_\beta$ от t и x_{10} для фиксированных значений x_{20} и x_{30} .

Учитывая, что выход ДО может быть представлен в виде

$$y = \beta = 2 \{ \arctg [\exp (z_1)] - \pi / 4 \},$$

на рис. 3 представлен трехмерный график частной невязки

$$\bar{\varepsilon}_\beta = |\gamma(t, x_0) - \tilde{\gamma}^*(t, x_0)|$$

как функции от t и x_{10} для фиксированных значений $x_{20} = 108$ и $x_{30} = 0,0063$.

Соответственно на рис. 4 рассмотрен случай зависимости $\bar{\varepsilon}_\beta$ от t и x_{30} для фиксированных значений $x_{10} = 2,1466$ и $x_{20} = 108$. При этом на исходной области $\{G_{x_0}, G_t\}$ имеем общую невязку $\varepsilon_\beta = \max_{x_0} \varepsilon_\beta(x_0) = 0,0988$ (где $\varepsilon_\beta(x_0) = \max_t |\tilde{\beta}(t, x_0) - \beta(t, x_0)|$), что составляет 0,3303%. Данный максимум соответствует узлу ($t = 31, x_{10} = 2,1466, x_{20} = 108, x_{30} = 0,0063$). На усеченной области $\{\tilde{G}_{x_0}, \tilde{G}_t\}$ получили общую невязку $\varepsilon_\beta = 0,0199$, что составляет 0,2197%. Данный максимум соответствует узлу ($t = 38, x_{10} = 1,5065, x_{20} = 128, x_{30} = 0,0070$).

Соответственно для производной $y^{(1)} = \beta^{(1)}$ на исходной области $\{G_{x_0}, G_t\}$ имеем общую невязку

$$\varepsilon_\beta^{(1)} = \max_{x_0} \varepsilon_\beta^{(1)}(x_0) = 5,4919$$

(где $\varepsilon_\beta^{(1)}(x_0) = \max_t |\tilde{\beta}^{(1)}(t, x_0) - \beta^{(1)}(t, x_0)|$), что составляет 6,9520%. Данный максимум соответствует узлу ($t = 1, x_{10} = 2,4362, x_{20} = 100, x_{30} = 0,0060$). На усеченной области $\{\tilde{G}_{x_0}, \tilde{G}_t\}$ получили общую невязку $\varepsilon_\beta^{(1)} = 3,1612$,

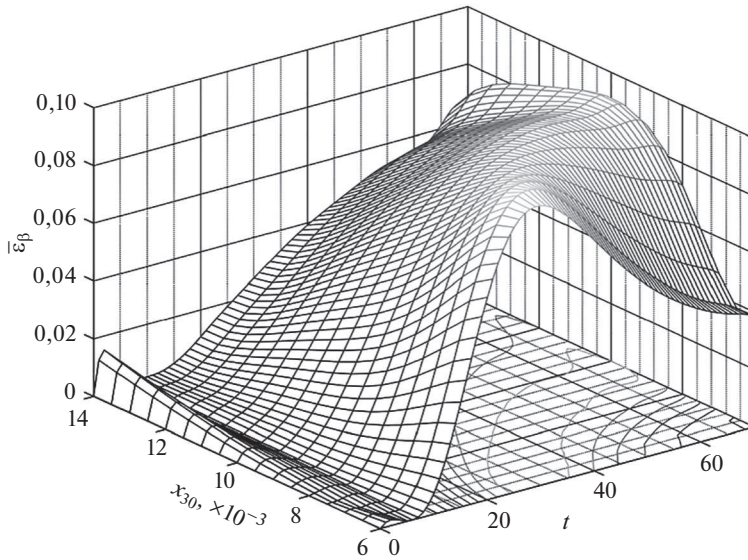


Рис. 4. Зависимость частной невязки $\bar{\epsilon}_\beta$ от t и x_{30} для фиксированных значений x_{10} и x_{20} .

что составляет 5,5860%. Данный максимум соответствует узлу ($t = 8$, $x_{10} = 1,7354$, $x_{20} = 120$, $x_{30} = 0,0070$).

Результаты численного эксперимента наглядно показывают возможность качественного описания как входных, так и выходных параметров ДО с помощью разработанного численно-аналитического метода. Для уменьшения негативных краевых эффектов необходимо сужать области задания параметров t и x_0 .

Этап 2. При реализации данного этапа использовались также следующие данные: $x'_{10} = 1,7354$, $x'_{20} = 112$, $x'_{30} = 0,0800$, $s(t) = c_1\theta_1(t) + c_2\theta_2(t)$, $c_1 = 5$, $\theta_1(t) = \sin(0,64t)$, $c_2 = 15$, $\theta_2(t) = \exp(-0,07t)$, $K_\Xi = \text{diag}(\sigma, \dots, \sigma)$, $\sigma = \pi/360$, $\{t_n\}_{n=0}^N$, $N = 70$, $t_n - t_{n-1} = 1$, $\bar{n} = 20$, $11 \leq r \leq 61$. Алгоритм оценивания реализовывался на полномерном “скользящем окне” с 21 узлом, при этом первая оценка измеряемого параметра и его производной относятся к текущему моменту времени $t_{20} = 20$, а последняя — к моменту $t_{70} = 70$. Именно при $t_{20} = 20$ было сформировано первое полномерное “скользящее окно”, а при $t_{70} = 70$ — последнее. Поскольку все оценки привязываются к середине “скользящего окна”, то первая полученная оценка соответствовала моменту $t_{10} = 10$, а последняя — моменту $t_{60} = 60$. Следовательно, приводимые далее характеристики точности относятся к усеченному отрезку времени $\bar{G}_t = [10, 60]$.

На рис. 5 приведены графики зависимости, характеризующие сингулярную помеху $s(t)$. С использованием датчика случайных чисел и принятых исходных данных было сформировано уравнение наблюдения, при этом на рис. 6 представлены графики истинного значения измеряемой функции $y = \beta$ и наблюдения $h = y + s + \xi$. Начиная с момента времени $t_n = 20$ для каждого положения “скользящего окна” (всего 51 положение, т.е. $11 \leq r \leq 61$)

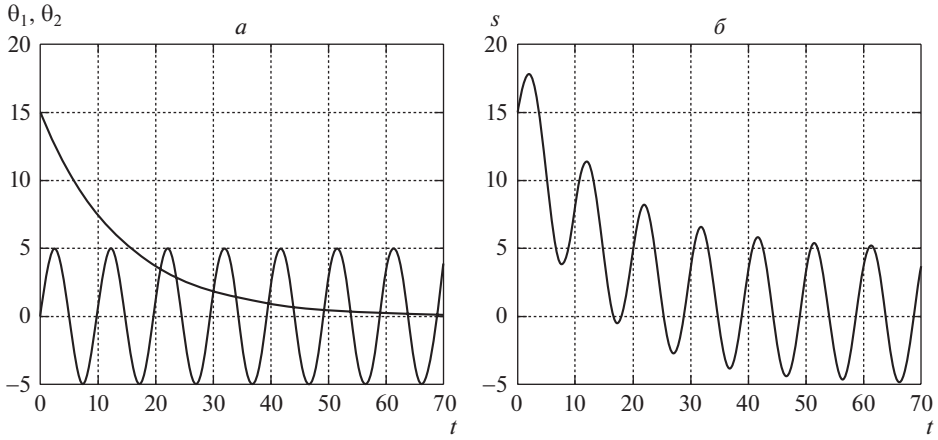


Рис. 5. Зависимости, характеризующие сингулярную помету: *a* — семейство базисных функций, *б* — сингулярная помета.

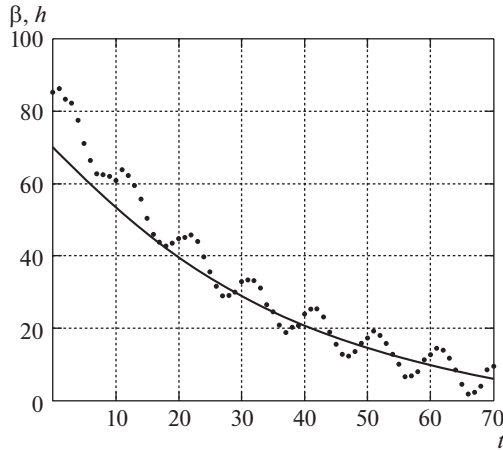


Рис. 6. Графики измеряемой функции и наблюдения: сплошная линия — измеряемая функция; точечная линия — наблюдение.

формировались текущие оценки β_n^* и $\beta_n^{(1)*}$, соответствующие центральному узлу. Для описания выходной координаты $y(t) = \beta(t)$ в пределах “скользящего окна” использовалась линейная комбинация из трех первых полиномов Лежандра, т.е. в формуле (4.1) принималось: $M_t = 3$,

$$\psi_{yk}(t) = P_{k-1}(\tau) = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{d^{k-1} [(\tau^2 - 1)^{k-1}]}{d\tau^{k-1}},$$

$$k = \overline{1, 3}, \quad \tau = \tau(t), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Для перехода от параметра $\tau \in [-1, 1]$ к временной координате

$$t \in [t_{j,r-\bar{n}_j/2-1}, t_{j,r+\bar{n}_j/2-1}] \in G_t$$

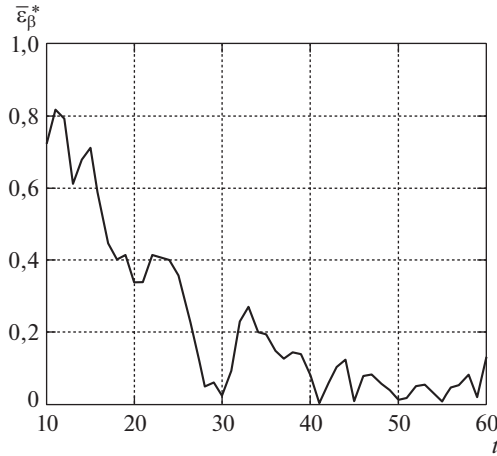


Рис. 7. Невязка оценивания выходной координаты.

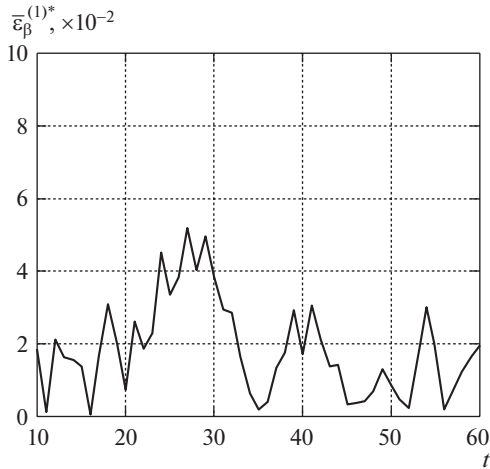


Рис. 8. Невязка оценивания производной выходной координаты.

применялось линейное преобразование:

$$t = 2^{-1} \left[t_{j,r-\bar{n}_j/2-1} + t_{j,r+\bar{n}_j/2-1} - \tau \left(t_{j,r-\bar{n}_j/2-1} - t_{j,r+\bar{n}_j/2-1} \right) \right].$$

Далее представлены графики зависимости частной невязки $\bar{\varepsilon}_\beta^*$ оценивания выходной координаты (рис. 7) и ее производной $\bar{\varepsilon}_\beta^{(1)*}$ (рис. 8) в от времени при фиксированном начальном условии $x'_0 = [1,7354; 112; 0,0800]^T$, при этом общая невязка для выходной координаты составляет $\varepsilon_\beta^* = \max_t \bar{\varepsilon}_\beta^* = 0,8162$ (соответственно 1,5717%), а для производной $\varepsilon_\beta^{(1)*} = \max_t \bar{\varepsilon}_\beta^{(1)*} = 0,0518$ (соответственно 5,0601%).

Проводился сравнительный анализ по оперативности (т.е. по времени формирования оценок, выраженном в секундах) разработанного автокомпенсационного метода (АМ) и известного расширенного метода наименьших квадратов (РМНК). Для одного фиксированного положения “скользящего окна” фиксировалось частное время ($T_{\text{РМНК}}$ и $T_{\text{АМ}}$) построения оценки производной $\beta^{(1)}$ в середине этого окна (один эксперимент). Проводилась тысяча таких экспериментов с последующим усреднением полученных результатов, при этом для частных результатов имеем $T_{\text{РМНК}} \in \{71 \cdot 10^{-6}, \dots, 123 \cdot 10^{-6}\}$ и $T_{\text{АМ}} \in \{31 \cdot 10^{-6}, \dots, 54 \cdot 10^{-6}\}$, а общий усредненный выигрыш по оперативности составил $\bar{T}_{\text{РМНК}}/\bar{T}_{\text{АМ}} = 2,32$ раза (здесь черта означает усреднение).

Также обнаружено, что при наличии в уравнении наблюдения одновременно гармонической и экспоненциальной составляющих сингулярной помехи РМНК приводит к некорректным оценкам производной для всех положений “скользящего окна”, что объясняется известным эффектом “размазывания точности” при расширении пространства состояний. Удовлетворительный по точности результат оказался возможным только при наличии одной (гармонической) составляющей, в этом случае частная невязка составила 0,0025 для последнего положения “скользящего окна”.

Результаты моделирования подтверждают возможность эффективного решения задачи оценивания ЧХ на выходных траекториях ДО даже при некорректных наблюдениях, содержащих сингулярную помеху.

8. Заключение

Развитый численно-аналитический метод исследования ДО ориентирован, в первую очередь, на случаи, связанные с решением широкого круга прикладных задач, требующих вычислений в реальном времени. Данный метод предполагает вынесение основного объема вычислений на первый (предварительный) этап, не связанный непосредственно с наблюдением ДО. К концу этого этапа на базе семейства ОИК необходимо сформировать аналитическое решение дифференциального уравнения и аналитическое выражение для измеряемого выхода ДО, справедливые для заданной области изменения временной координаты, начальных условий и других характерных параметров. К первому этапу также относятся операции, связанные с формированием вектор-столбца или матрицы весовых коэффициентов оптимального оценивания, учитывающих спектральный состав измеряемых параметров, сингулярной помехи и статистические характеристики флуктуационного шума. На втором (основном) этапе реализуются операции, связанные с оперативным оцениванием значений ЧХ измеряемых функций по результатам некорректных наблюдений, а также решением других целевых задач, требующих использования полученных численно-аналитических описаний входных и выходных переменных ДО. Любые ЧХ поведения ДО находятся в виде скалярного произведения вектора наблюдений и соответствующего вектора весовых коэффициентов.

Выражаю свою благодарность моим аспирантам Раду П.Ю. и Кондрашову А.Г. за помощь в проведении вычислительного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высш. шк., 1989.
2. *Пантелеев А.В., Бортакровский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.
3. *Красовский А.А.* Науковедение и состояние теории процессов управления. Обзор // *АиТ.* 2000. № 4. С. 3–19.
Krasovskii A.A. Theory of Science and Status of the Control Theory // *Autom. Remote Control.* 2000. V. 61. No. 4. Part 1. P. 537–553.
4. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
5. *Бульчев Ю.Г., Манин А.П.* Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
6. *Бульчев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др.* Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов / Под ред. А.П. Манина и В.В. Васильева. М.: Машиностроение – Полет, 2016.
7. *Бульчев Ю.Г., Бурлай И.В., Манин А.А.* Аналитическое конструирование систем управления на основе метода опорных интегральных кривых // *АиТ.* 1994. № 7. С. 37–48.
Bulychev Yu.G., Burlai I.V., Manin A.A. Analytic Construction of Control Systems by the Method of Supporting Integral // *Autom. Remote Control.* 1994. V. 55. No. 7. Part 1. P. 954–963.
8. *Бульчев Ю.Г., Манин А.А.* Синтез адаптивных систем оптимального управления стохастическими объектами на основе прогнозирующей модели // *АиТ.* 1995. № 9. С. 81–92.
Bulychev Yu.G., Manin A.A. Synthesis of Adaptive Optimal Control Systems for Stochastic Objects from a Forecast Model // *Autom. Remote Control.* 1995. V. 56. No. 9. Part 2. P. 1268–1277.
9. *Брандин В.Н., Васильев А.А., Худяков С.Т.* Основы экспериментальной космической баллистики. М.: Машиностроение, 1974.
10. *Брандин В.Н., Разоренов Г.Н.* Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978.
11. *Льюнг Л.* О точности модели в идентификации систем // *Изв. АН. Техн. кибернетика.* 1992. № 6. С. 55–64.
12. *Воробьев Л.М.* К теории полета ракет. М.: Машиностроение, 1970.
13. *Бульчев Ю.Г., Мельников А.В.* Численно-аналитический метод исследования поведения динамической системы по результатам некорректных наблюдений без расширения пространства состояний // *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 2019. Т. 59. № 6. С. 937–950.
14. *Леонов В.А., Поплавский Б.К.* Фильтрация ошибок измерений при оценивании линейного преобразования полезного сигнала // *Изв. АН. Техн. кибернетика.* 1992. № 1. С. 163–170.
15. *Бульчев Ю.Г., Елисеев А.В.* Вычислительная схема инвариантно-несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // *Журн. вычисл. матем. и мат. физ.* 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
16. *Бульчев Ю.Г., Елисеев А.В., Бородин Л.И. и др.* Обобщенное инвариантно-несмещенное маскирование и оценивание информационных процессов в условиях мультиструктурных помех // *АиТ.* 2010. № 4. С. 140–149.

Bulychev Yu.G., Eliseev A.V., Borodin L.I., et al. Generalized Invariant-Unbiased Masking and Estimation of Informational Processes with Multistructural Noise // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 4. P. 672–680.

17. *Булычев Ю.Г.* Метод опорных интегральных кривых решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1988. Т. 28. № 10. С. 1482–1490.
18. *Булычев Ю.Г.* Методы численно-аналитического интегрирования дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1991. Т. 31. № 9. С. 1305–1319.
19. *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
20. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
21. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985.
22. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
23. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
24. *Иванов В.В.* Методы вычислений на ЭВМ. Киев.: Наук. думка, 1986.
25. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
26. Mex-Files // GNU Octave [Электронный ресурс]
URL: https://octave.org/doc/interpreter/Mex_002dFiles.html.
27. Techniques to Improve Performance // MATLAB Documentation [Электронный ресурс] URL: https://www.mathworks.com/help/matlab/matlab_prog/techniques-for-improving-performance.html.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 18.09.2019

После доработки 14.11.2019

Принята к публикации 28.11.2019