

© 2020 г. В.О. НИКИФОРОВ, д-р техн. наук (nikiforov\_vo@itmo.ru),  
А.В. ПАРАМОНОВ, канд. тех. наук (avr.atrax@gmail.com),  
Д.Н. ГЕРАСИМОВ, канд. тех. наук (gerasimovdn@mail.ru)  
(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

## АЛГОРИТМЫ АДАПТИВНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ<sup>1</sup>

В статье представлены два алгоритма адаптивного управления по состоянию для класса линейных многоканальных объектов в условиях внешних возмущений и наличия запаздывания в канале управления. Задающее воздействие и внешнее возмущение рассматриваются в качестве мультигармонических сигналов с неизвестными частотами, амплитудами и начальными фазами. Алгоритмы синтезированы с использованием метода прямого адаптивного управления, основанного на принципе внутренней модели, и не требуют проведения процедуры идентификации параметров возмущения и/или сигнала задания.

*Ключевые слова:* адаптивное слежение, многоканальная система, компенсация возмущений, запаздывание по управлению, внутренняя модель.

DOI: 10.31857/S0005231020060098

### 1. Введение

В статье для класса линейных многоканальных систем с запаздыванием по управлению решается задача адаптивного слежения за сигналом задания в условиях внешних возмущений.

Обеспечение слежения за задающим сигналом в условиях внешних возмущений относится к фундаментальным проблемам теории автоматического управления и является предметом активных исследований на протяжении нескольких десятилетий. Среди предложенных решений широкое применение получил метод внутренней модели, в соответствии с которым задающее воздействие и/или внешнее возмущение моделируется в качестве выхода линейной автономной динамической модели (виртуального генератора), возбуждаемой ненулевыми начальными условиями. В этом случае для полной компенсации возмущающего воздействия и/или достижения нулевой установившейся ошибки слежения за сигналом задания модель виртуального генератора должна быть соответствующим образом воспроизведена в законе управления [1–3]. При реализации такого подхода иногда говорят о сервоуправлении или о регулировании, понимая под этим обеспечение асимптотического слежения за задающим сигналом с одновременной компенсацией внешнего возмущения.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 08-08).

Ранние работы в этой области были посвящены классической реализации метода внутренней модели, основанной на предположении, что параметры виртуального генератора известны, что означает точное знание формы внешнего сигнала [1–5]. Случай, когда априорно известен только некоторый класс внешних воздействий, но не их точные параметры, является более реалистичным с практической точки зрения. В этом случае используется адаптивная реализация метода внутренней модели [6–11], когда параметры виртуального генератора предполагаются неизвестными, и для построения закона управления используется специальный алгоритм адаптации, формирующий настраиваемые параметры регулятора. Позже адаптивная реализация метода внутренней модели была расширена на нелинейные объекты [12–15], а также на классы систем с параметрически неопределенными объектами [16, 17] и многоканальной средой [18, 19].

В последнее десятилетие предметом интенсивных исследований стали задачи адаптивного регулирования в системах с запаздыванием в канале управления. Данное запаздывание может быть обусловлено работой вычислительного блока, исполнительных механизмов, а также структурными особенностями объекта управления. Для такого класса задач большое развитие получил идентификационный подход [20–26], в соответствии с которым в алгоритме управления используется специальный блок идентификации параметров внешних сигналов и расчетный блок, генерирующий параметры алгоритма управления.

Одним из недостатков идентификационного подхода является тот факт, что, как правило, его реализация требует знания точного числа гармоник, некоторых априорных оценок возможных значений их частот, а иногда и минимальной разности частот между соседними гармониками. Другой недостаток заключается в требовании выполнения условия неисчезающего возбуждения [27], при нарушении которого идентификационный подход оказывается неэффективным.

Альтернативным идентификационному подходу является метод прямого адаптивного управления [10, 28], который позволяет исключить этап идентификации параметров сигнала задания и/или возмущения и осуществить непосредственную настройку алгоритма управления для обеспечения заданной цели управления. При этом для синтеза закона управления из априорной информации о виртуальном генераторе используется только его порядок. Иными словами априорно известна только верхняя оценка количества гармоник во внешнем сигнале.

Однако обеспечение устойчивости систем прямого адаптивного управления с запаздыванием является сложной и не до конца решенной задачей и, как правило, предусматривает определение критических значений коэффициента адаптации и/или запаздывания, при которых сохраняется устойчивость системы [29, 30].

Сохранение работоспособности замкнутой системы при произвольных значениях коэффициента адаптации и запаздывания по управлению может быть обеспечено путем специальной модификации сигнала ошибки, что успешно применялось при решении задачи компенсации возмущений для одноканаль-

ных [31] и многоканальных систем [32], а так же в задачах по обеспечению слежения за эталонным сигналом [33, 34]. В статьях [31, 33] представлены решения по управлению одноканальными неустойчивыми объектами, а в работах [32, 34] рассматривался случай многоканального асимптотически устойчивого объекта, что не требовало отдельного решения задачи его стабилизации.

Настоящая статья развивает подход, изначально предложенный в [31–34], на случай одновременного решения задач асимптотического слежения за сигналом задания и компенсации внешнего возмущения для неустойчивого многоканального объекта управления. В статье предлагаются два различных алгоритма адаптивного регулирования, один из которых основан на построении единого регрессора и, как следствие, общего алгоритма адаптации для задачи слежения и задачи компенсации. Второй алгоритм основан на раздельном решении задач слежения и компенсации. Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки, которые будут обсуждены в заключении.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе формулируется постановка задачи. В третьем разделе приводится параметризация возмущения и сигнала задания. Четвертый и пятый раздел посвящены процедуре синтеза алгоритмов управления с объединенным и раздельным алгоритмами адаптации. В конце разделов приведены результаты компьютерного моделирования.

В статье использованы следующие обозначения:  $s = d/dt$  — оператор дифференцирования по времени,  $I_{n \times n}$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ ,  $blockdiag(A_1, \dots, A_n)$  — блочно-диагональная матрица с соответствующими элементами,  $P = P^T \succ 0$  — симметричная положительно определенная матрица,  $\|x\|$  — евклидова норма вектора  $x$ .

## 2. Постановка задачи

Рассматривается линейный стационарный многоканальный объект вида

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u(t - \tau) + \delta), \\ y = Cx, \end{cases}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния объекта,  $u \in \mathbb{R}^q$  — вектор управляющих воздействий,  $y \in \mathbb{R}^q$  — вектор регулируемых переменных,  $n \geq q$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  — известные матрицы,  $\tau$  — известное запаздывание,  $\delta \in \mathbb{R}^q$  — вектор неизмеряемых внешних возмущений.

Целью управления является синтез закона управления, обеспечивающего ограниченность всех сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия:

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|g(t) - y(t)\| = 0,$$

где  $g \in \mathbb{R}^q$  — вектор задающих (эталонных) сигналов<sup>2</sup>. Поставленная задача решается при выполнении следующих допущений.

<sup>2</sup> В статье все сигналы (управления, задания, возмущения и т.п.) являются векторными. Поэтому термин “векторный” в дальнейшем будет опускаться.

*Допущение 1.* Тройка матриц  $(A, B, C)$  полностью управляемая и наблюдаемая, а передаточная матрица  $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$  невырождена, т.е.  $\det W(s) \neq 0$ .

*Допущение 2.* Возмущающее воздействие  $\delta$  и эталонный сигнал  $g$  описываются моделями:

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = \Gamma_1 z_1, \\ \delta = H_1 z_1, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{z}_2 = \Gamma_2 z_2, \\ g = H_2 z_2, \end{cases}$$

где  $z_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$  — векторы состояния с неизвестными начальными условиями,  $\Gamma_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$ ,  $\Gamma_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$  — матрицы постоянных коэффициентов, все собственные значения которых являются простыми и лежат на мнимой оси,  $H_1 \in \mathbb{R}^{q \times m_1}$ ,  $H_2 \in \mathbb{R}^{q \times m_2}$  — постоянные матрицы. Без потери общности будем считать, что пары  $(\Gamma_1, H_1)$  и  $(\Gamma_2, H_2)$  полностью наблюдаемы.

*Допущение 3.* Параметры матриц  $\Gamma_1, H_1, \Gamma_2, H_2$  неизвестны, в то время как размерности  $m_1$  и  $m_2$  известны. Сигнал  $g$  доступен прямым измерениям.

*Допущение 4.* Нули передаточной матрицы  $W(s)$  не совпадают с собственными числами матрицы  $\Gamma_2$ .

*Замечание 1.* Модели виртуальных генераторов (3) и (4) описывают целые классы внешних воздействий. Так генератор второго порядка в зависимости от конкретных значений параметров и начальных условий может генерировать как гармонические сигналы различных частот и амплитуд, так и постоянные сигналы различных амплитуд (хотя для постоянных сигналов достаточно генератора первого порядка). Поэтому порядки виртуальных генераторов  $m_i$  ( $i = 1, 2$ ) могут рассматриваться как верхние оценки динамических порядков действительных моделей внешних сигналов. Точного совпадения порядков виртуальных и действительных генераторов внешних сигналов, а также возбуждения начальными условиями всех мод виртуального генератора не требуется.

Рассматриваемая задача будет решена в несколько шагов. Сначала с использованием специальных наблюдателей будут построены параметризованные модели возмущения, сигнала задания и их будущих значений. Затем с использованием модифицированной схемы расширения будут сформированы алгоритмы адаптивной настройки коэффициентов регулятора, позволяющие избежать физически нереализуемой процедуры настройки прошлых значений настраиваемых коэффициентов. На последнем шаге будет построена стабилизирующая обратная связь, использующая оценку будущего значения вектора состояния, и будет доказано достижение цели управления в замкнутой системе.

Ниже будут предложены два решения рассматриваемой задачи. Одно из них основано на построении общей регрессионной модели для двух внешних сигналов — задания и возмущения, и на синтезе общего алгоритма адаптации.

Второе решение основывается на раздельном решении задач слежения и компенсации и на раздельной адаптивной настройке соответствующих компонент алгоритма управления. Общими для двух подходов будут параметризованные модели внешних сигналов.

### 3. Параметризация возмущения и сигнала задания

Для того, чтобы можно было применить универсальные методы адаптивной настройки закона управления, представим сигналы задания и возмущение в параметризованном виде — а именно, в виде линейных регрессионных моделей с неизвестными постоянными параметрами. Как было показано в [35, 36], сигналы  $\delta$  и  $g$  можно представить в виде:

$$(5) \quad \delta = \Theta_1 \xi_1 + \varsigma_1,$$

$$(6) \quad g = \Theta_2 \xi_2 + \varsigma_2,$$

где  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{q \times m_1}$  и  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{q \times m_2}$  — матрицы неизвестных постоянных параметров, сигналы  $\varsigma_1$  и  $\varsigma_2$  порождены ненулевыми начальными условиями и экспоненциально затухают<sup>3</sup>, а регрессоры  $\xi_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$  и  $\xi_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$  являются векторами состояний фильтров

$$(7) \quad \dot{\xi}_1 = G_1 \xi_1 + L_1 \delta,$$

$$(8) \quad \dot{\xi}_2 = G_2 \xi_2 + L_2 g$$

с произвольными гурвицевыми матрицами  $G_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$  и  $G_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ , образующими с соответствующими матрицами постоянных коэффициентов  $L_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times q}$  и  $L_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times q}$  полностью управляемые пары.

Использование фильтров (7) и (8) приводит к двум важным результатам. Во-первых, полученные с помощью них регрессионные модели (5) и (6) хорошо известны в современной теории адаптивного управления [27, 37] и в теории идентификации [38] и позволяют использовать широкий класс универсальных алгоритмов адаптации и идентификации. В настоящей работе будут применены методы прямого (безыдентификационного) адаптивного управления.

Во-вторых, подставляя (5) в (7) и (6) в (8) получаем канонические формы генераторов внешних сигналов

$$(9) \quad \dot{\xi}_i = (G_i + L_i \Theta_i) \xi_i, \quad i = 1, 2,$$

которые с использованием фундаментального решения позволяют получить аналитические выражения будущих значений регрессоров

$$(10) \quad \xi_i(t + \tau) = \exp((G_i + L_i \Theta_i)\tau) \xi_i(t), \quad i = 1, 2,$$

<sup>3</sup> Сигналы  $\varsigma_1$  и  $\varsigma_2$  не влияют на устойчивость замкнутой системы, и поэтому в дальнейшем рассмотрении будут исключены.

а также сигнала возмущения

$$(11) \quad \delta(t + \tau) = \Theta_1 \xi_1(t + \tau) = \Psi_1^* \xi_1,$$

где  $\exp((G_i + L_i \Theta_i)\tau)$  — матричная экспонента ( $i = 1, 2$ ),  $\Psi_1^* = \Theta_1 \exp((G_1 + L_1 \Theta_1)\tau)$  — матрица неизвестных параметров размерности  $q \times m_1$ .

Следует отметить, что фильтр (7) физически нереализуем, так как использует неизмеряемое возмущение. Поэтому вместо него используем физически реализуемый наблюдатель регрессора  $\xi_1$ , структура которого определяется следующей леммой [36].

*Лемма 1. Пусть выполняются допущения 1, 2, 3. Введем в рассмотрение наблюдатель, формирующий оценку  $\hat{\xi}_1$  неизмеряемого регрессора  $\xi_1$ :*

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1 = \eta + Nx, \\ \dot{\eta} = G_1 \eta + (G_1 N - NA)x - NBu(t - \tau), \end{cases}$$

где  $\eta \in \mathbb{R}^{m_1}$  — вспомогательный вектор,  $N \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$  — произвольная матрица, удовлетворяющая равенству  $NB = L_1$ . Тогда оценка  $\hat{\xi}_1$  ограничена и сходится к  $\xi_1$  экспоненциально.

Лемма 1 доказывается путем дифференцирования вектора ошибки наблюдения  $\tilde{\xi}_1 = \xi_1 - \hat{\xi}_1$  с учетом (1), (7) и (12), что приводит к уравнению  $\dot{\tilde{\xi}}_1 = G_1 \tilde{\xi}_1$ .

С помощью замены  $\xi_1$  на оценку  $\hat{\xi}_1$  в (11) окончательно получаем (без учета экспоненциально затухающего слагаемого):

$$(13) \quad \delta(t + \tau) = \Psi_1^* \hat{\xi}_1.$$

Выражения (10) и (13) будут использованы при синтезе закона адаптивного регулирования с целью компенсации запаздывания  $\tau$ .

#### 4. Алгоритм управления с общим регрессором

##### 4.1. Построение модели ошибки и выбор структуры закона управления

Для формирования модели ошибки слежения введем в рассмотрение матрицу преобразования координат  $M \in \mathbb{R}^{n \times m_2}$ , удовлетворяющую условию

$$(14) \quad CM = \Theta_2.$$

Тогда модели ошибки по состоянию и по выходу могут быть заданы в виде

$$(15) \quad e = M\xi_2 - x,$$

$$(16) \quad \varepsilon = g - y$$

соответственно. В силу (14) ошибку по выходу можно представить как  $\varepsilon = Ce$ .

Вычислим производную ошибки (15) с учетом (1), (9) и (13):

$$(17) \quad \dot{e} = M(G_2 + L_2\Theta_2)\xi_2 - \left( Ax + B(u(t - \tau) + \Psi_1^*\hat{\xi}_1(t - \tau)) \right).$$

Добавляя и вычитая из правой части последнего уравнения  $AM\xi_2$ , после элементарных преобразований получим:

$$(18) \quad \dot{e} = Ae + (M(G_2 + L_2\Theta_2) - AM)\xi_2 - B(u(t - \tau) + \Psi_1^*\xi_1(t - \tau)).$$

Как известно [3, 11], выполнение допущений 1 и 2 гарантирует существование по крайней мере одного набора матриц  $M$  и  $\Theta_2^*$ , который одновременно удовлетворяет выражению (14) и следующему равенству:

$$(19) \quad M(G_2 + L_2\Theta_2) - AM = B\Theta_2^*.$$

Равенство (19) с учетом (10) позволяет получить модель ошибки в виде

$$(20) \quad \dot{e} = Ae + B \left( -\Psi_1^*\hat{\xi}_1(t - \tau) + \Psi_2^*\xi_2(t - \tau) - u(t - \tau) \right),$$

где  $\Psi_2^* = \Theta_2^* \exp((G_2 + L_2\Theta_2)\tau)$  — неизвестная матрица постоянных параметров. Вводя обозначения для *общей матрицы* неизвестных параметров

$$\Psi = [\Psi_1^*, \Psi_2^*]$$

и для *общего регрессора*

$$\xi^\top(t) = \left[ -\hat{\xi}_1^\top(t), \xi_2^\top(t) \right],$$

окончательно получаем:

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{e} = Ae + B(\Psi\xi(t - \tau) - u(t - \tau)), \\ \varepsilon = Ce. \end{cases}$$

Анализ последнего выражения мотивирует следующий выбор структуры алгоритма управления:

$$(22) \quad u = u_s + \hat{\Psi}\xi,$$

где  $\hat{\Psi}$  является матрицей настраиваемых параметров, а  $u_s$  — стабилизирующая компонента закона управления. Ниже будет синтезирован алгоритм адаптивной настройки матрицы  $\hat{\Psi}$ , а также выбрано правило формирования  $u_s$ . Особенностью предлагаемого подхода является возможность независимого синтеза алгоритма адаптивной настройки и стабилизирующей обратной связи.

## 4.2. Синтез алгоритма адаптации

Подставляя (22) в (21), получаем

$$(23) \quad \begin{cases} \dot{e} = Ae + B(\tilde{\Psi}(t - \tau)\xi(t - \tau) - u_s(t - \tau)), \\ \varepsilon = Ce, \end{cases}$$

где  $\tilde{\Psi} = \Psi - \hat{\Psi}$  — матрица параметрических ошибок.

Сигнал  $e$  является недоступным прямым измерениям (матрица  $M$  является неизвестной), матрица  $A$  в общем случае может быть неустойчивой, а сама модель ошибки (23) содержит прошлые значения настраиваемых параметров  $\hat{\Psi}(t - \tau)$ . Для преодоления указанных проблем предлагается использовать метод расширенной ошибки<sup>4</sup>, который изначально был предложен для синтеза систем адаптивного управления по выходу [39] (см. также обзор [40]), а позже была продемонстрирована его эффективность при построении алгоритмов адаптации в системах с запаздыванием [31, 33].

*Лемма 2. Введем в рассмотрение динамический фильтр вида*

$$(24) \quad \begin{cases} \dot{\hat{e}} = A\hat{e} + L_s(\varepsilon + C\hat{e}) + B(\hat{\Psi}(t - \tau)\xi(t - \tau) + u_s(t - \tau)), \\ \hat{\varepsilon} = \varepsilon + C\hat{e} - \Xi(t - \tau)\hat{\psi}(t), \end{cases}$$

где матрица  $L_s \in \mathbb{R}^{n \times q}$  выбрана таким образом, что матрица  $A_s = A + L_s C$  гурвицева,  $\hat{\psi} = \text{col}(\hat{\Psi}_1^\top, \dots, \hat{\Psi}_q^\top) \in \mathbb{R}^{q(m_1+m_2)}$  — вектор настраиваемых параметров,  $\hat{\Psi}_i^\top$  — строки матрицы  $\hat{\Psi}$ ,  $\Xi(t - \tau) \in \mathbb{R}^{q \times q(m_1+m_2)}$  — матричный регрессор вида

$$\Xi(t - \tau) = \begin{bmatrix} W_{s11}(s) [\xi(t - \tau)] & \dots & W_{s1q}(s) [\xi(t - \tau)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{sq1}(s) [\xi(t - \tau)] & \dots & W_{sqq}(s) [\xi(t - \tau)] \end{bmatrix},$$

$W_s(s) = C(sI - A_s)^{-1}B$  — асимптотически устойчивая передаточная функция. Тогда для сигнала расширенной ошибки  $\hat{e}$  справедливо следующее равенство:

$$(25) \quad \hat{\varepsilon} = \Xi(t - \tau)\tilde{\psi}(t),$$

где  $\tilde{\psi} = \psi - \hat{\psi}$  — вектор параметрических ошибок.

*Доказательство.* Введем вспомогательные переменные  $\hat{e}^* = e + \hat{e}$  и  $\varepsilon^* = \varepsilon + C\hat{e}$ . Тогда, вычисляя производную  $\dot{\hat{e}}^*$ , с учетом (23) и (24) можно показать, что

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}^* = A_s \hat{e}^* + B\Psi\xi(t - \tau), \\ \varepsilon^* = Ce^* \end{cases}$$

---

<sup>4</sup> В англоязычной литературе данный подход получил название *augmented error* [39]. Здесь будем следовать терминологии статьи [40], понимая, что процедура “расширения” состоит не в увеличении размерности векторного сигнала, а в добавлении к нему некоторой корректирующей составляющей.



или  $\varepsilon^* = W_s(s)[\Psi\xi(t - \tau)]$ . Нетрудно убедиться, что с учетом свойств линейных систем

$$\begin{aligned} W_s(s)[\Psi\xi(t - \tau)] &= \begin{bmatrix} W_{s11}(s) & \dots & W_{s1q}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{sq1}(s) & \dots & W_{sq q}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_1^\top \xi(t - \tau) \\ \vdots \\ \Psi_q^\top \xi(t - \tau) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} W_{s11}(s) [\xi^\top(t - \tau)\Psi_1] + \dots + W_{s1q}(s) [\xi^\top(t - \tau)\Psi_q] \\ \vdots \\ W_{sq1}(s) [\xi^\top(t - \tau)\Psi_1] + \dots + W_{sq q}(s) [\xi^\top(t - \tau)\Psi_q] \end{bmatrix} = \\ &= \Xi(t - \tau) \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_q \end{bmatrix} = \Xi(t - \tau)\psi. \end{aligned}$$

По существу, последние выражения представляют собой следствие леммы о перестановке<sup>5</sup> [41] для матричного случая, утверждающей справедливость равенства

$$(26) \quad W_s(s)[\Psi\xi(t - \tau)] = \Xi(t - \tau)\psi,$$

которое будет использовано при доказательстве леммы 3. Подставляя (26) во второе выражение (24), непосредственно получаем (25). Лемма доказана.

*Замечание 2.* В частном случае скалярного объекта, т.е. когда  $y, u, \delta \in \mathbb{R}^1$ , а  $\Psi$  является вектором-строкой размерности  $1 \times (m_1 + m_2)$ , второе уравнение системы (24) и модель (25) принимают вид

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon} &= \varepsilon + C\hat{\varepsilon} - \bar{\xi}^\top(t - \tau)\hat{\psi}(t), \\ \hat{\varepsilon} &= \bar{\xi}^\top(t - \tau)\tilde{\psi}(t) \end{aligned}$$

соответственно, где  $\bar{\xi} = W_s(s)[\xi]$  — отфильтрованный регрессор.

Модель (25) позволяет использовать широкий класс универсальных алгоритмов адаптации, например градиентного вида:

$$(27) \quad \dot{\hat{\psi}} = \Gamma\bar{\Xi}^\top(t - \tau)\hat{\varepsilon},$$

где  $\Gamma \in \mathbb{R}^{q(m_1+m_2) \times q(m_1+m_2)}$  — положительно определенная матрица. Особо отметим, что в силу ограниченности регрессора  $\bar{\Xi}$  нормирование алгоритма адаптации (27), использующего не истинную  $\varepsilon$ , а расширенную  $\hat{\varepsilon}$  ошибку слежения, не требуется.

Тогда вне зависимости от свойств устойчивости замкнутой системы алгоритм адаптации (27) будет обладать следующими свойствами.

<sup>5</sup> В англоязычной литературе данная лемма носит название “*The swapping lemma*” [27].

*Лемма 3.* Пусть выполняются допущения 1–4. Тогда алгоритм адаптации (27) совместно с наблюдателем возмущения (12), наблюдателем задающего воздействия (8), законом управления (22) и схемой расширения (24) применительно к объекту управления (1) будет обеспечивать:

- 1) ограниченность  $\|\hat{\varepsilon}\|, \|\hat{\psi}\|, \|\hat{\Psi}\|$ ;
- 2) асимптотическое стремление  $\|\tilde{\Psi}(t)\xi(t)\| \rightarrow 0$ , а также

$$\|\tilde{\Psi}(t - \tau)\xi(t - \tau)\| \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Для анализа устойчивости системы, замкнутой алгоритмом адаптации (27), выберем функцию Ляпунова

$$(28) \quad V = \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\top \Gamma^{-1} \tilde{\psi},$$

производная которой с учетом (27) имеет вид  $\dot{V} = -\hat{\varepsilon}^\top \hat{\varepsilon} \leq 0$ . Из последнего неравенства непосредственно следует свойство 1 леммы 3, а также стремление  $\|\hat{\varepsilon}\| \rightarrow 0$  и  $\|\Xi(t - \tau)\tilde{\psi}(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  [27]. Так как регрессор  $\xi$  ограничен (см. лемму 1 и (8)), то из (27) следует  $\|\hat{\psi}\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Из последнего стремления непосредственно получаем  $\|\dot{\tilde{\Psi}}\| \rightarrow 0$ ; тогда с учетом леммы о перестановке (см. также (26)) имеем, что  $\Xi(t - \tau)\tilde{\psi}(t) \rightarrow W_s(s)[\tilde{\Psi}(t - \tau)\xi(t)]$  при  $t \rightarrow \infty$  и, как следствие,  $\|\tilde{\Psi}(t - \tau)\xi(t)\| \rightarrow 0$  (а также  $\|\tilde{\Psi}(t - \tau)\xi(t - \tau)\| \rightarrow 0$  и  $\|\tilde{\Psi}(t)\xi(t)\| \rightarrow 0$ ). Лемма доказана.

### 4.3. Построение стабилизирующей компоненты

Используем теперь модель ошибки слежения (23) для синтеза стабилизирующей компоненты алгоритма управления  $u_s$ . Учитывая, что ошибка не доступна прямым измерениям, построим наблюдатель, структура и свойства которого определяются следующей леммой.

*Лемма 4.* Рассмотрим совместно с алгоритмом адаптации (27) наблюдатель ошибки по состоянию вида

$$(29) \quad \dot{\bar{e}} = A\bar{e} + L_e(\varepsilon - C\bar{e}) - Bu_s(t - \tau),$$

где  $\bar{e}$  — оценка вектора  $e$ , а матрица  $L_e \in \mathbb{R}^{n \times q}$  выбрана таким образом, что матрица  $A_e = A - L_e C$  гурвицева. Тогда для ошибки наблюдения  $\tilde{e} = e - \bar{e}$  справедливо равенство

$$(30) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{e}(t)\| = 0.$$

*Доказательство.* Дифференцируя  $\tilde{e}$  с учетом (23) и (29), получаем

$$(31) \quad \dot{\tilde{e}} = A_e \tilde{e} + B\tilde{\Psi}(t - \tau)\xi(t - \tau),$$

откуда с учетом свойства (2) Леммы 3 немедленно получаем справедливость (30).

Сформируем стабилизирующую компоненту сигнала управления в виде<sup>6</sup> [42]

$$(32) \quad u_s = -K \left[ \exp(A\tau)\bar{e}(t) - \int_{t-\tau}^t \exp(A(t-\mu))Bu_s(\mu)d\mu \right],$$

где матрица  $K \in \mathbb{R}^{q \times n}$  выбрана таким образом, что матрица  $A_s = A + BK$  гурвицева,  $\bar{e}$  — вектор состояния наблюдателя (29).

Тогда свойства замкнутой системы будут определяться следующим утверждением.

*Утверждение 1.* Пусть выполняются допущения 1–4. Тогда алгоритм управления (22) с наблюдателем возмущения (12) и наблюдателем задающего воздействия (8), схемой расширения (24), алгоритмом адаптации (27), наблюдателем ошибки слежения (29) и стабилизирующей компонентой (32) обеспечивает для объекта управления (1) ограниченность всех сигналов и выполнение целевого условия (2).

*Доказательство.* Вычисляя на основе (29) будущее значение вектора  $\bar{e}$ , получаем:

$$\bar{e}(t + \tau) = \exp(A\tau)\bar{e}(t) + \int_{t-\tau}^t \exp(A(t-\mu))(L_e C \tilde{e}(\tau + \mu) - Bu_s(\mu)) d\mu.$$

Тогда управление (32) можно представить в виде

$$(33) \quad u_s = -K(e(t + \tau) - \tilde{e}(t + \tau) - \Delta_e(t + \tau)),$$

где

$$\Delta_e(t + \tau) = \int_{t-\tau}^t \exp(A(t-\mu))L_e C \tilde{e}(\tau + \mu) d\mu.$$

Подставляя (33) в (23), получаем:

$$\dot{e} = A_s e + B(\tilde{\Psi}(t - \tau)\xi(t - \tau) - K\tilde{e} - K\Delta_e(t - \tau)).$$

Так как в силу леммы 3 имеем  $\|\tilde{\Psi}(t - \tau)\hat{\xi}(t - \tau)\| \rightarrow 0$ , в силу леммы 4  $\|\tilde{e}\| \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\|\Delta_e\| \rightarrow 0$ , то из последнего выражения непосредственно получаем ограниченность  $e$ , стремление  $\|e\| \rightarrow 0$ , выполнение целевого условия (2) и ограниченность  $u_s$ . С учетом ограниченности  $e$  и  $\xi_2$  получаем ограниченность  $x$ , из (12) — ограниченность  $\eta$ , а с учетом ограниченности  $u_s$  из (24) — ограниченность  $\hat{e}$ , а из (29) — ограниченность  $\bar{e}$ . Утверждение доказано.

<sup>6</sup> Следует отметить, что сформированное стабилизирующее управление не является внутренне устойчивым из-за возможности наличия неустойчивой матрицы  $A$  [43]. Поэтому на практике используются специальные методы устойчивой реализации таких алгоритмов [44, 45].

#### 4.4. Числовое моделирование

В качестве примера рассмотрим объект (1), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & -1,5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \tau = 3 \text{ с}$$

и  $\delta = \text{col}(2 \cos(6t), 3 \sin(0,8t))$ ,  $g = \text{col}(\cos(5t), 4 \sin(7t))$ . Наблюдатели задающего воздействия (8) и возмущения (12) построены со следующими параметрами:

$$G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -36 & -60 & -37 & -10 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие матрицы в выражениях (24), (29) и (32) выбраны как

$$L_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1,1 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad L_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1,1 & 1/6 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры алгоритма адаптации (27) были определены матрицей

$$\Gamma = \text{blockdiag} \left\{ 150I_{4 \times 4}, 300I_{4 \times 4}, 150I_{4 \times 4}, 300I_{4 \times 4} \right\}.$$

Графики переходных процессов в линейной многоканальной системе, замкнутой адаптивным регулятором с общим регрессором, представлены на рис. 1. Результаты численного моделирования демонстрируют полную компенсацию внешних возмущений и асимптотическую сходимость ошибки слежения к нулю.

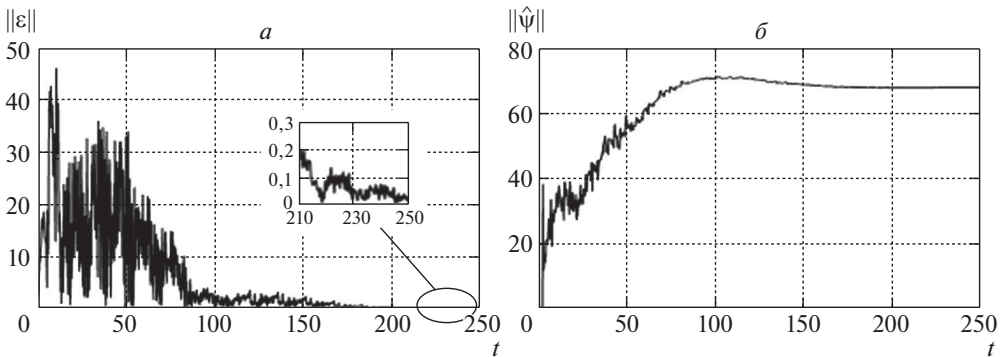


Рис. 1. Графики переходных процессов в системе, замкнутой алгоритмом управления с общим регрессором.

## 5. Алгоритм управления с раздельным решением задач слежения и компенсации

Будем использовать регрессоры  $\hat{\xi}_1$  и  $\xi_2$ , полученные с помощью наблюдателей (12) и (8) соответственно, а управление будем формировать в виде

$$(34) \quad u = u_c + u_t + u_s,$$

где  $u_c$  — компонента компенсации возмущения,  $u_t$  — следящая компонента,  $u_s$  — стабилизирующая компонента. Ниже представлена процедура последовательного независимого синтеза всех трех компонент.

### 5.1. Построение следящей компоненты

Обозначим через  $x^*(t)$  желаемую траекторию изменения вектора состояния объекта управления, обеспечивающую выполнение тождества  $\|e(t)\| \equiv 0$ , а через  $y^*(t)$  — желаемую траекторию изменения вектора выходных переменных. Очевидно, что  $x^* = M\xi_2$  и  $y^* = Cx^* = g$ . Построим генератор желаемой траектории  $x^*$ . Для этого продифференцируем  $x^* = M\xi_2$  с учетом (9). После элементарных преобразований получаем:

$$(35) \quad \dot{x}^* = A_s x^* + (M(G_2 + L_2\Theta_2) - A_s M) \xi_2,$$

где, как и раньше,  $A_s = A - BK$  гурвицева. Выполнение допущений 1 и 2 означает существование пары матриц  $M$  и  $\bar{\Theta}_2^*$ , одновременно удовлетворяющих двум уравнениям [3, 11]

$$M(G_2 + L_2\Theta_2) - A_s M = B\bar{\Theta}_2^*, \quad CM = \bar{\Theta}_2^*.$$

Тогда окончательно получаем:

$$(36) \quad \begin{cases} \dot{x}^* = A_s x^* + B\bar{\Psi}_2^* \xi_2(t - \tau), \\ g = y^* = Cx^*, \end{cases}$$

где  $\bar{\Psi}_2^* = \bar{\Theta}_2^* \exp((G_2 + L_2\Theta_2)\tau) - q \times m_2$  неизвестная матрица постоянных коэффициентов.

Виртуальный генератор желаемой траектории (36) может быть переписан в форме вход-выход

$$g = W_s(s) [\bar{\Psi}_2 \xi_2(t - \tau)]$$

или, с использованием леммы о перестановке [41] (см. также лемму 2 и выражение (26)), в форме статической модели

$$(37) \quad g = \Xi_2(t - \tau) \bar{\psi}_2,$$

где  $W_s(s) = C(sI - A_s)^{-1}B$ ,  $\bar{\psi}_2 = \text{col}(\bar{\Psi}_1^\top, \dots, \bar{\Psi}_q^\top) \in \mathbb{R}^{qm_2}$  — вектор неизвестных параметров,  $\bar{\Psi}_i^\top$  — строки матрицы  $\bar{\Psi}_2^*$ ,  $\Xi_2(t - \tau) \in \mathbb{R}^{q \times qm_2}$  — матричный регрессор вида

$$\Xi_2(t - \tau) = \begin{bmatrix} W_{s11}(s) [\xi_2(t - \tau)] & \dots & W_{s1q}(s) [\xi_2(t - \tau)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{sq1}(s) [\xi_2(t - \tau)] & \dots & W_{sqq}(s) [\xi_2(t - \tau)] \end{bmatrix}.$$

Сформируем настраиваемую модель генератора сигнала задания

$$(38) \quad \hat{g} = \Xi_2(t - \tau)\hat{\psi}_2,$$

вектор настраиваемых параметров  $\hat{\psi}_2$  которой генерируется алгоритмом адаптации

$$(39) \quad \dot{\hat{\psi}}_2 = \Gamma_\psi \Xi_2^\top(t - \tau)\varepsilon_g,$$

где  $\varepsilon_g = g - \hat{g}$  — ошибка воспроизведения сигнала задания,  $\Gamma_\psi > 0$  — матрица коэффициентов адаптации.

В целях дальнейшего анализа свойств устойчивости замкнутой системы определим  $q \times m_2$  матрицу настраиваемых параметров  $\hat{\Psi}_2$ , построенную на элементах вектора  $\hat{\psi}_2$  (процедура, обратная построению вектора  $\bar{\psi}_2$  из матрицы  $\bar{\Psi}_2^*$ ), а также вектор  $\tilde{\psi}_2 = \bar{\psi}_2 - \hat{\psi}_2$  и матрицу  $\tilde{\Psi}_2 = \bar{\Psi}_2^* - \hat{\Psi}_2$  параметрических ошибок.

Тогда вне зависимости от свойств устойчивости замкнутой системы алгоритм адаптации (39) будет обладать следующими свойствами.

*Лемма 5.* Пусть выполняются допущения 1–4. Тогда алгоритм адаптации (39) совместно с наблюдателем задающего воздействия (8) и настраиваемой моделью (38) будет обеспечивать:

- 1) ограниченность  $\|\varepsilon_g\|, \|\hat{\psi}_2\|$ ;
- 2) асимптотическое стремление  $\|\varepsilon_g\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ;
- 3) асимптотическое стремление  $\|\tilde{\Psi}_2(t)\xi_2(t)\| \rightarrow 0$ , а также

$$\|\tilde{\Psi}_2(t - \tau)\xi_2(t - \tau)\| \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Учтем, что модели ошибки воспроизведения сигнала задания и вектора параметрических ошибок имеют вид

$$\varepsilon_g = \Xi_2(t - \tau)\tilde{\psi}_2, \quad \dot{\tilde{\psi}}_2 = \Gamma_\psi \Xi_2^\top(t - \tau)\tilde{\psi}_2.$$

Тогда справедливость леммы доказывается с использованием функции Ляпунова  $V_g = 0,5\tilde{\psi}_2^\top \Gamma_g^{-1}\tilde{\psi}_2$  и тех же аргументов, что и при доказательстве леммы 3.

Свойства, определенные леммой 5, мотивируют следующий выбор следящей составляющей:

$$(40) \quad u_t = \hat{\Psi}_2 \xi_2.$$

## 5.2. Построение компенсирующей компоненты

Выберем компенсирующую компоненту в виде

$$(41) \quad u_c = \hat{\Psi}_1 \hat{\xi}_1,$$

где регрессор  $\hat{\xi}_1$  формируется наблюдателем возмущения (12), а  $\hat{\Psi}_1$  — матрица настраиваемых коэффициентов. Подставляя (34) и (41) в (1) с учетом (13), получаем:

$$(42) \quad \dot{x} = Ax + B \left( u_t(t - \tau) + u_s(t - \tau) + \tilde{\Psi}_1(t - \tau) \hat{\xi}_1(t - \tau) \right),$$

где  $\tilde{\Psi}_1 = \Psi_1^* - \hat{\Psi}_1$ .

Модель (42) не может быть использована для построения алгоритма адаптивной настройки матрицы  $\hat{\Psi}_1$ , так как содержит ее прошлое значение и в общем случае неустойчивую матрицу  $A$ . В соответствии с изложенным выше подходом для преодоления этих проблем предлагается использовать схему расширения [31], которая в данном случае определяется следующей системой уравнений:

$$(43) \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = x + \phi, \\ \dot{\phi} = A\phi + \bar{L}\bar{x} + B \left( (\hat{\Psi}_1(t - \tau) - \hat{\Psi}_1(t)) \hat{\xi}_1(t - \tau) - u_t(t - \tau) - u_s(t - \tau) \right), \end{cases}$$

где  $\bar{x}$  — расширенный вектор состояния,  $\phi$  — вспомогательный вектор, матрица  $\bar{L}$  выбрана так, что матрица  $\bar{A} = A + \bar{L}$  — гурвицева.

Вычисляя производную вектора  $\bar{x}$  в силу (42) и (43), получаем модель

$$(44) \quad \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + B\tilde{\Psi}_1(t)\hat{\xi}_1(t - \tau),$$

которая хорошо известна в современной теории адаптивного управления и позволяет выбрать, например, градиентный алгоритм адаптации вида

$$(45) \quad \dot{\hat{\Psi}}_1^\top = \Gamma \hat{\xi}_1(t - \tau) B^\top P \bar{x},$$

где  $\Gamma \succ 0$  — матрица коэффициентов адаптации, а матрица  $P$  является решением уравнения  $\bar{A}^\top P + P\bar{A} = -Q$ ,  $Q = Q^\top \succ 0$  — произвольная симметричная положительноопределенная матрица.

Тогда вне зависимости от свойств устойчивости замкнутой системы алгоритм адаптации (45) будет обладать следующими свойствами.

*Лемма 6. Пусть выполняются допущения 1–4. Тогда алгоритм адаптации (45) совместно с наблюдателем возмущения (12), законом управления (34) и схемой расширения (43) применительно к объекту управления (1) будет обеспечивать:*

- 1) ограниченность  $\|\bar{x}\|$  и  $\|\hat{\Psi}_1\|$ ,
- 2) асимптотическое стремление  $\|\tilde{\Psi}_1(t)\hat{\xi}_1(t)\| \rightarrow 0$ , а также

$$\|\tilde{\Psi}_1(t - \tau)\hat{\xi}_1(t - \tau)\| \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Производная функции Ляпунова  $V_s = \bar{x}^\top P \bar{x} + 0,5\tilde{\Psi}_1^\top \Gamma^{-1} \tilde{\Psi}_1$ , вычисленная в силу уравнения (44), имеет вид  $\dot{V}_s = -\bar{x}^\top Q \bar{x}$ , откуда следует ограниченность  $\bar{x}$  и  $\hat{\Psi}_1$ , стремление  $\|\bar{x}\| \rightarrow 0$  и  $\|\tilde{\Psi}_1\| \rightarrow 0$  и, как следствие, справедливость второго утверждения леммы.

### 5.3. Построение стабилизирующей компоненты

Для стабилизации объекта управления будем использовать вектор состояния  $x$ , который доступен прямым измерениям. Подставляя (34) и (41) в (1), получаем

$$(46) \quad \dot{x} = Ax + B \left( u_t(t - \tau) + u_s(t - \tau) + \tilde{\delta}(t - \tau) \right),$$

где  $\tilde{\delta}(t) = \tilde{\Psi}_1(t)\hat{\xi}_1(t)$  — ошибка компенсации возмущения. Выберем стабилизирующую компоненту в виде

$$(47) \quad u_s = -K \left[ \exp(A\tau)x(t) - \int_{t-\tau}^t \exp(A(t - \mu))B(u_t(\mu) + u_s(\mu))d\mu \right],$$

где матрица  $K$  обеспечивает гурвицевость матрицы замкнутой системы  $A_s = A - BK$ .

Тогда свойства замкнутой системы будут определяться следующим утверждением.

*Утверждение 2.* Пусть выполняются допущения 1–4. Тогда алгоритм управления (34) с наблюдателем возмущения (12) и наблюдателем задающего воздействия (8), следящей компонентой (40), алгоритмом адаптации следящей компоненты (39), настраиваемой моделью (38), компенсирующей компонентой (41), алгоритмом адаптации компенсирующей компоненты (45), схемой расширения (43) и стабилизирующей компонентой (47) обеспечивает для объекта управления (1) ограниченность всех сигналов и выполнение целевого условия (2).

*Доказательство.* Вычисляя для модели (46) значение вектора состояния  $x$  в момент времени  $t + \tau$ , можно показать, что

$$(48) \quad u_s(t) = -Kx(t + \tau) - \Delta_\delta(t + \tau),$$

где

$$\Delta_\delta(t + \tau) = \int_{t-\tau}^t \exp(A(t - \mu))B\tilde{\delta}(\mu)d\mu.$$

Вычисляя теперь производную ошибки слежения  $e^* = x^* - x$  с учетом (1), (36), (40), (41), (48), получаем:

$$\dot{e}^* = A_s e^* + B \left( \tilde{\Psi}_2(t - \tau)\hat{\xi}_2(t - \tau) - K\Delta_\delta(t) + \tilde{\delta}(t - \tau) \right).$$

Так как в силу леммы 5 имеем  $\|\tilde{\Psi}_2(t - \tau)\hat{\xi}_2(t - \tau)\| \rightarrow 0$ , а в силу леммы 6  $\|\tilde{\delta}\| \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\|\Delta_\delta\| \rightarrow 0$ , то из последнего выражения непосредственно получаем ограниченность  $e^*$ , стремление  $\|e^*\| \rightarrow 0$ , выполнение целевого условия 2, а также ограниченность  $u_s$  и  $x$ . С учетом ограниченности  $x$  и  $\bar{x}$  (см. лемму 6) из (43) получаем ограниченность  $\phi$ . Утверждение доказано.



#### 5.4. Числовое моделирование

Параметры объекта управления (1), возмущающего воздействия, сигнала задания, а так же наблюдателей задающего воздействия (8) и возмущения (12) выбраны такими же, как и в примере из раздела 4.4.

Соответствующие параметры и матрицы в выражениях (39), (47) и (45) выбраны как

$$K = \begin{bmatrix} 1,1 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_\psi = 2000I_{8 \times 8}, \quad P = \begin{bmatrix} 1,75 & 1 \\ 1 & 0,75 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = 100I_{2 \times 2}.$$

Результаты числового моделирования работы линейной многоканальной системы, замкнутой адаптивным регулятором с отдельными компонентами слежения и компенсации, иллюстрируют полную компенсацию внешних возмущений и сходимости ошибки слежения к нулю (см. рис. 2).

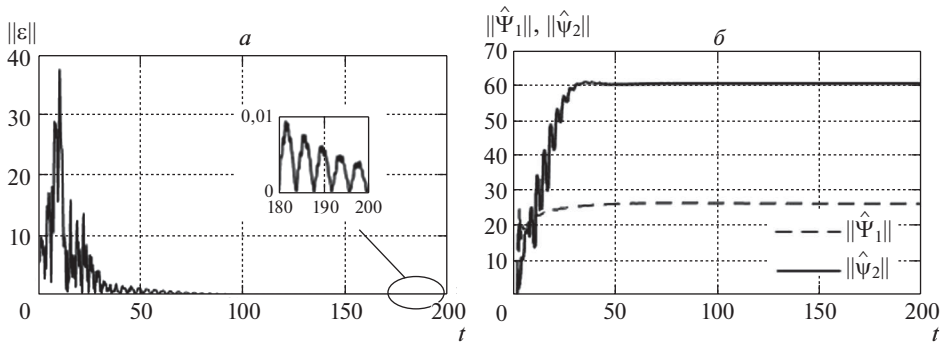


Рис. 2. Графики переходных процессов в системе, замкнутой алгоритмом управления с отдельными компонентами слежения и компенсации.

## 6. Заключение

В работе представлены два алгоритма адаптивного слежения за мультигармоническим сигналом для класса линейных неустойчивых многоканальных объектов с запаздыванием в каналах управления в условиях внешних возмущений.

Первый алгоритм построен с использованием объединенного регрессора. Такая схема позволяет одним алгоритмом адаптации (27) осуществлять одновременно компенсацию внешних возмущений и слежение за эталонным сигналом. При этом за счет применения схемы с расширенной ошибкой (24) стабилизирующая компонента закона управления (32) полностью независима от адаптивной. Поэтому параметры контура стабилизации и расширенной ошибки могут быть выбраны независимо друг от друга.

Во втором алгоритме использована схема с построением отдельных блоков компенсации и слежения. В этом случае адаптивные компоненты системы (39) и (45) работают независимо друг от друга, что позволяет провести бо-

лее гибкую настройку системы. Благодаря отсутствию фильтрации регрессора компенсирующего контура и дополнительного наблюдателя состояния (29) (который присутствует в первой схеме), алгоритм управления с отдельными адаптивными блоками использует на  $q^2 m_1 + n$  меньше интеграторов. В то же время следует отметить, что параметры стабилизирующего управления (47) сопряжены с параметрами фильтра регрессора алгоритма адаптации (39) следящей компоненты (40).

Дальнейшее развитие представленного подхода будет направлено на его применение для систем с неизмеряемым вектором состояния (что потребует построения специального наблюдателя возмущения), неизвестными параметрами и запаздыванием.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Johnson C. D.* Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 635–644.
2. *Francis D.A., Wonham W.M.* The internal model principle for linear multivariable regulators // App. Math. Optim. 1975. V. 2. P. 170–194.
3. *Davison E.J.* The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems // IEEE Trans. of Automatic Control. 1976. V. 21. P. 25–34.
4. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М: Наука, 1980.
5. *Дроздов В.Н., Мирошник И.В., Скорубский В.И.* Системы автоматического управления с микроЭВМ. Л.: Машиностроение, 1989.
6. *Bodson M., Douglas S.C.* Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency // Automatica. 1997. V. 33. No. 12. P. 2213–2221.
7. *Nikiforov V.O.* Adaptive servomechanism controller with an implicit reference model // Int. J. Control. 1997. V. 68. No. 2. P. 277–286.
8. *Никифоров В.О.* Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 69–73.
9. *Никифоров В.О.* Адаптивная компенсация внешних детерминированных возмущений // Мехатроника, автоматизация и управление. 2003. № 5. С. 8–12.
10. *Никифоров В.О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003.
11. *Marino R., Tomei P.* Output regulation for linear systems via adaptive internal model // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2199–2202.
12. *Byrnes C. I., Isidori A.* Nonlinear internal models for output regulation // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. V. 49. No. 12. P. 2244–2247.
13. *Serrani A., Isidori A., Marconi L.* Semi-global nonlinear output regulation with adaptive internal model // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 8. P. 1178–1194.
14. *Nikiforov V.O.* Nonlinear servocompensation of unknown external disturbances // Automatica. 2001. V. 37. P. 1647–1653.
15. *Gerasimov D.N., Pashenko A.V., Nikiforov V.O.* Improved Adaptive Compensation of Unmatched Multisinusoidal Disturbances in Uncertain Nonlinear Plants // Amer. Control Conf. ACC. 2020.

16. *Elliot E., Goodwin G.C.* Adaptive implementation of the internal model principle // Proc. of the 23d IEEE Conf. on Decision and Control. 1984. V. 23. P. 1292–1297.
17. *Palaniswami M., Goodwin G.C.* An adaptive implementation of the internal model principle // Proc. of the 1987 Amer. Control Conf. 1987. P. 600–605.
18. *Tao G.* Multivariable adaptive control: A survey // Automatica. 2014. V. 50. No. 11. P. 2737–2764.
19. *Wang L., Isidori A., Liu Z., Su H.* Robust output regulation for invertible nonlinear MIMO systems // Automatica. 2017. V. 82. P. 278–286.
20. *Pyrkin A.A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M.* Rejection of sinusoidal disturbance of unknown frequency for linear system with input delay // Amer. Control Conf. Baltimore, 2010. P. 5688–5693.
21. *Pyrkin A.A., Smyshlyaev A., Bekiaris-Liberis N., Krstic M.* Output control algorithm for unstable plant with input delay and cancellation of unknown biased harmonic disturbance // Time Delay System Conference, Prague, Czech Republic, 2010. P. 39–44.
22. *Pyrkin A.A., Bobtsov A.A.* Cancellation of unknown multiharmonic disturbance for nonlinear plant with input delay // Int. J. Adaptive Control Signal Proc. 2012. V. 26. No. 4. P. 302–315.
23. *Wang J., Vedyakov A.A., VEDIKOVA A.O., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Shavetov S.V.* Output adaptive controller for a class of MIMO systems with input delay and multisinusoidal disturbance // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. No. 11. P. 892–899.
24. *Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Nikiforov V.O., Vedyakov A.A., Kolyubin S.A., Borisov O.I.* Output control approach for delayed linear systems with adaptive rejection of multiharmonic disturbance // IFAC Proc. Volumes. 2014. V. 47. No. 3. P. 12110–12115.
25. *Pyrkin A.A., Bobtsov A.A.* Adaptive controller for linear system With input delay and output disturbance // IEEE Trans. Autom. Control. 2016. V. 61. No. 12. P. 4229–4234.
26. *Пыркин А.А., Бобцов А.А., Никифоров В.О. и др.* Компенсация полигармонического возмущения, действующего на состояние и выход линейного объекта с запаздыванием в канале управления // АИТ. 2015. № 12. С. 43–64.  
*Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Nikiforov V.O., et al.* Compensation of polyharmonic disturbance of state and output of a linear plant with delay in the control channel // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 12. P. 2124–2142.
27. *Narendra K., Annaswamy A.* Stable adaptive systems. New Jersey: Prentice Hall, 1989.
28. *Basturk H.I., Krstic M.* Adaptive sinusoidal disturbance cancellation for unknown LTI systems despite input delay // Automatica. 2015. V. 58. 131–138.
29. *Gerasimov D.N., Nikiforov V.O., Paramonov A.V.* Adaptive disturbance compensation in delayed linear systems: internal model approach // IEEE Conf. on Control Applications, CCA 2015. 2015. P. 1692–1696.
30. *Annaswamy A., Jang J., Lavretsky E.* Stability margins for adaptive controllers in the presence of time-delay // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf.. 2008. AIAA 2008-6659. doi: 10.2514/6.2008-6659
31. *Gerasimov D.N., Paramonov A.V., Nikiforov V.O.* Algorithms of adaptive disturbance compensation in linear systems with arbitrary input delay // Int. J. Control. 2018. DOI:10.1080/00207179.2018.1521527.
32. *Paramonov A.V., Gerasimov D.N., Nikiforov V.O.* Fast adaptive compensation of multi-sinusoidal disturbance in linear MIMO systems with multiple input delays // Eur. Control Conf. ECC. 2018. P. 2441–2446.

33. *Gerasimov D.N., Miliushin A.S., Nikiforov V.O.* Algorithms of adaptive tracking of unknown multisinusoidal signals in linear systems with arbitrary input delay // Int. J. Adaptive Control Signal Proc. 2019. V. 33. No. 6. P. 900–912.
34. *Gerasimov D.N., Miliushin A.S., Paramonov A.V., Nikiforov V.O.* Algorithms of adaptive tracking of unknown multi-sinusoidal signals in MIMO linear systems with multiple input delay // Proc. of the 2019 Amer. Control Conf. 2019. P. 3014–3019.
35. *Nikiforov V.O.* Adaptive servocompensation of input disturbances // IFAC Proc. Volumes. 1996. V. 29. No. 1. P. 5114–5119.
36. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних возмущений. 1. Объекты с известными параметрами // АиТ. 2004. № 10. С. 13–23.  
*Nikiforov V.O.* Observers of External Deterministic Disturbances. I. Objects with Known Parameters // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 10. P. 1531–1541.
37. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
38. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
39. *Monopoli R.V.* Model reference adaptive control with an augmented error signal // IEEE Trans. Autom. Control. 1974. V. 19. No. 5. P. 474–484.
40. *Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой. Обзор // АиТ. 1994. № 9. С. 3–22.  
*Nikiforov V.O., Fradkov A.L.* Adaptive Control Schemes with Extended Error // Autom. Remote Control. 1994. V. 55. No. 9. P. 1239–1255.
41. *Morse A.S.* Global stability of parameter adaptive control systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1980. V. 25. No. 3. P. 433–439.
42. *Artstein Z.* Linear systems with delayed controls: a reduction // IEEE Trans. Autom. Control. 1982. V. 27. No. 4. P. 869–879.
43. *Engelborghs K., Dambrine M., Roose D.* Limitations of a class of stabilization methods for delay systems // IEEE Trans. Automatic Control. 2001. V. 46. No. 2. P. 336–339.
44. *Mondie S., Michiels W.* Finite spectrum assignment of unstable time-delay systems with a safe implementation // IEEE Trans. Autom. Control. 2003. V. 48. No. 12. P. 2207–2212.
45. *Zhong Q.C.* On distributed delay in linear control laws-part I: discrete-delay implementations // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. V. 49. No. 11. P. 2074–2080.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.*

Поступила в редакцию 26.10.2019

После доработки 19.12.2019

Принята к публикации 30.01.2020