Автоматика и телемеханика, № 7, 2020

Нелинейные системы

**© 2020 г. К.Г. ГАРАЕВ, д-р физ.-мат. наук (fmf@kai.ru)
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ)**

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ ПРИВОДИМОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ставится задача приводимости оптимальных процессов и предлагается теоретико-групповой подход к ее решению, основанный на инфинитезимальном аппарате Ли–Овсянникова [1].

Ключевые слова: оптимальное управление, уравнение Беллмана, теория групп Ли, приводимость оптимальных процессов.

DOI: 10.31857/S0005231020070016

1. Введение

В проблеме управления теоретико-групповые методы впервые были использованы в работах Павлова В.Г., Кухтенко А.И., Семенова В.Н., Павловского Ю.Н., Яковенко Г.Н., Гараева К.Г., Можаева Г.В., Борецкого И.Ф. и других исследователей. Среди зарубежных авторов первые публикации в этом направлении принадлежат Арбибу М., Брокету Р., Барнету С., Херману Р., Калману Р. и другим ученым (см., например, [2, 3]). Использование группового подхода позволяет реализовать идеи эрлангенской программы Ф. Клейна в проблеме управления.

Остановимся кратко на тех конкретных задачах, при изучении которых используется групповой подход.

Известно, что при синтезе оптимального управления возникает труднопреодолимая проблема — «проклятие размерности» (Р. Беллман), одним из эффективных методов решения которой является операция декомпозиции, приводящая к расщеплению исходной системы управления на подсистемы, для каждой из которых формируется своя локальная задача [4–9]. В [10–13] разработана общая теория декомпозиции и агрегирования систем с постоянным вектором управления, основанная на теории инвариантов групп непрерывных преобразований; проблеме агрегирования посвящена также работа [14]. Теория групп позволила провести классификацию видов декомпозиции, найти количество подсистем и их размерности и тем самым определить целесообразность декомпозиции для динамических систем с управлением.

Исследованию влияния возмущений параметров систем автоматического управления на их выходные характеристики, т.е. изучению чувствительности систем, посвящены (на языке теории групп) работы [15–17].

Ряд работ (например, [3, 18–24]) посвящен проблемам управляемости и наблюдаемости динамических систем. Введенное в [25] понятие L-системы позволяет в ряде случаев заменить дифференциальные уравнения принципа максимума эквивалентными конечными соотношениями.

Групповой подход к проблеме конструирования систем управления, обеспечивающих инвариантность характеристик системы по отношению к внешним возмущениям, предложен в [19, 20, 22, 26].

Задаче синтеза оптимального управления посвящены работы [25, 27, 28]. В частности, в [27] введено понятие инвариантного оптимального процесса и определены условия его существования (выражающие инвариантность многообразия и функционала относительно одной и той же группы преобразований), что позволило свести проблему синтеза управления к оптимальной задаче с меньшим числом переменных при сохранении экстремального значения функционала.

Следует отметить, что если направление исследований, связанное с групповым подходом к изучению систем управления с сосредоточенными параметрами, развивается достаточно интенсивно, то в отношении систем с распределенными параметрами имеются только единичные публикации [15, 27, 29, 30–33].

2. Постановка и решение задачи приводимости оптимального процесса

Пусть процесс управления на отрезке $[t_0, t_k]$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i\,(t, x, u) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

с заданными начальными условиями $x^i\,(t_0) = x_0^i$.

Качество управляемого процесса оценивается функционалом

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_k} \varphi\,(t, x, u)\, dt, \tag{2}$$

определенным на движениях системы (1). Здесь $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ — фазовые координаты; $u = \left(u^1, \ldots, u^m\right)$ — управляющие воздействия; f^i, φ — непрерывно дифференцируемые функции; отрезок времени $[t_0, t_k]$ предполагается фиксированным.

Требуется найти управление u, реализующее на движениях системы (1) минимум функционала (2).

Следуя [27], будем называть исследуемый управляемый процесс оптимально инвариантным относительно локальной группы Ли с оператором

$$U = \xi_t\,(t, x, u)\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi_x^i\,(t, x, u)\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \xi_u^j\,(t, x, u)\,\frac{\partial}{\partial u^j},$$
$$(i = 1, \ldots, n;\;\; j = 1, \ldots, m)\,,$$

если функционал J является интегральным инвариантом этой группы (в смысле Ли–Чеботарева [34, 35]) и если система (1) допускает эту же группу непрерывных преобразований.

Другими словами: и уравнения (1), и функционал (2) инвариантны относительно оператора U. Необходимое и достаточное условие оптимальной инвариантности исследуемого процесса согласно [34, 36] можно записать в виде

$$\xi_t \frac{\partial f^k}{\partial t} + \xi_x^l \frac{\partial f^k}{\partial x^l} + \xi_u^i \frac{\partial f^k}{\partial u^i} = \frac{\partial \xi_x^k}{\partial t} + f^l \frac{\partial \xi_x^k}{\partial x^l} - f^k \frac{\partial \xi_t}{\partial t} - f^k f^l \frac{\partial \xi_t}{\partial x^l}, \tag{3}$$

$$U(\varphi) + \varphi D_t(\xi_t) = 0, \tag{4}$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + x^l \frac{\partial}{\partial x^l} + u^i \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (k, l = 1, \ldots, n;\ \ i = 1, \ldots, m).$$

Отметим, что условия инвариантности (3), (4) позволяют, вообще говоря, решать две самостоятельные задачи.

Прямая задача. Функции f^i и φ заданы. Требуется найти группу G_r.

Обратная задача. Задана группа G_r. Требуется найти f^i и φ (отыскание функции φ Н.Г. Чеботарев называет задачей конструирования объемов).

Задание процесса (1), (2) будем понимать в смысле либо прямой, либо обратной задач.

Одним из конструктивных методов исследования оптимально инвариантных процессов может оказаться предлагаемый здесь метод редуцирования (приводимости) оптимальных процессов, который заключается в следующем. Находятся такие преобразования переменных исходной задачи к новым переменным в некотором вспомогательном пространстве, в котором оптимальная задача трансформируется в задачу, решаемую в ряде случаев проще исходной. Следует заметить, что применительно к задачам механики тел переменной массы задача приводимости была впервые сформулирована И.В. Мещерским в форме метода «отображения движения» [37]. С математической точки зрения метод приводимости приводит к следующей задаче. Требуется найти гладкое взаимно-однозначное преобразование (диффеоморфизм) T

$$\bar{t} = \bar{t}(t, x), \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(t, x), \quad \bar{u}^j = \bar{u}^j(t, x, u) \tag{5}$$
$$(i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, m),$$

переводящее оптимальную систему (1) в систему вида

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \bar{f}^i(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}), \tag{6}$$

а функционал (2) — в функционал

$$J = \int\limits_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_k} \bar{\varphi}(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u})\, d\bar{t}, \tag{7}$$

где $\bar{f}^i$ и $\bar{\varphi}$ — функции, структура которых задается заранее.

Если, например, функции $\bar{f}^i$ и $\bar{\varphi}$ не содержат в явном виде $\bar{t}$, то имеет место частная задача редуцирования: требуется найти преобразование T, переводящее систему (1) в автономную систему, а функционал (2) — в инвариантный относительно новой независимой переменной функционал. Тогда если отображение T — диффеоморфизм, то в случае программного управления сопряженная система будет допускать первый интеграл [38], а в задаче синтеза оптимального управления соответствующее уравнение Беллмана будет уравнением с независящими от нового «времени» $\bar{t}$ коэффициентами [39]; при этом в случае фиксированных начального и конечного состояний системы и свободного времени перехода его решение не будет зависеть явным образом от $\bar{t}$. Отметим, что для неуправляемых процессов задача автономизации линейных динамических систем в рамках метода факторизации дифференциальных операторов была рассмотрена в [40].

В дальнейшем будем предполагать, что управляемый процесс (1), (2) инвариантен относительно интранзитивной группы G_r (т.е. группы, имеющей нетривиальные и функционально независимые алгебраические инварианты) с оператором U, а процесс (6), (7) — относительно группы G_r с оператором

$$U = \xi_{\bar{t}}\left(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \xi_{\bar{x}}^{i}\left(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{i}} + \xi_{\bar{u}}^{j}\left(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{j}}. \tag{8}$$

Пусть T_a (a — групповой параметр) — любое преобразование группы G_1. Если отображение (5) — диффеоморфизм, то в системе координат (t, x, u) однопараметрическое семейство преобразований $\bar{T}_a$, определяемое равенством $\bar{T}_a = T T_a T^{-1}$ согласно С. Ли [35], вновь определяет локальную группу Ли $\bar{G}_1$, получаемую из T_a с помощью преобразования подобия T.

В новой системе координат $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u})$ оператор U принимает вид

$$\bar{U} = U\left(\bar{t}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + U\left(\bar{x}^{i}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{i}} + U\left(\bar{u}^{j}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{j}}, \tag{9}$$

координаты которого с помощью равенства (5) выражаются через $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u})$.

Следовательно, преобразование T, осуществляющее редуцирование оптимальных процессов, является решением квазилинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$U\left(\bar{t}\right) = \xi_{\bar{t}}\left(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}\right), \quad U\left(\bar{x}^{i}\right) = \xi_{\bar{x}}^{i}\left(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}\right), \quad U\left(\bar{u}^{i}\right) = \xi_{\bar{u}}^{j}\left(\bar{t}, \bar{x}, \bar{u}\right) \tag{10}$$
$$(i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m).$$

Покажем, что частная задача приводимости, поставленная выше, является разрешимой. Действительно, так как в этом случае $\xi_t = 1$, $\xi_x^i = \xi_u^j = 0$, то из уравнения (10) в силу интранзитивности группы следует, что новые фазовые координаты $\bar{x}^i$ и управляющие воздействия $\bar{u}^j$ являются алгебраическими инвариантами, а новая независимая переменная $\bar{t}$ является решением линейного дифференциального уравнения $U\left(\bar{t}\right) = 1$. Отметим попутно, что если известно преобразование, переводящее оптимальный процесс (1), (2) в оптимальный процесс (6), (7), то уравнения (10) позволяют найти группу, допускаемую исходным оптимально инвариантным процессом (1), (2).

3. Пример

В качестве примера рассмотрим задачу синтеза оптимального управления процессом, поведение которого описывается уравнением

$$x^{(n)} = F\left(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}\right) + b(t)\,u, \quad t \in [t_0, t_n] \tag{11}$$

с начальными условиями $x^{(i-1)}(t_0) = x_0^i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Запишем (11) в равносильной форме $\left(x = x^1\right)$:

$$\begin{gathered} \frac{dx^1}{dt} = x^2, \quad \frac{dx^2}{dt} = x^3, \ \ldots, \ \frac{dx^{n-1}}{dt} = x^n; \\ \frac{dx^n}{dt} = F\left(t, x^1, x^2, \ldots, x^n\right) + b(t)\,u. \end{gathered} \tag{12}$$

Функционал (2) зададим в виде

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_k} \left[S(t, x) + m(t)\,u^2\right] dt \quad (m(t) > 0)\,. \tag{13}$$

Оператор группы G, относительно которой остается инвариантным процесс (12), (13), будем искать в виде (рассматривается обратная задача)

$$U = \xi_t(t)\frac{\partial}{\partial t} + a(t)\,x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \xi_x^i(t, x)\frac{\partial}{\partial x^i} + g(t)\,u\frac{\partial}{\partial u} \quad (i = 2, \ldots, n)\,,$$

где $\xi_t(t)$, $a(t)$, $\xi_x^i(t, x)$, $g(t)$ — произвольные дифференцируемые функции. Определяющие уравнения (3) запишутся так:

$$\xi_x^{k+1} = \frac{\partial \xi_x^k}{\partial t} + x^{l+1}\frac{\partial \xi_x^k}{\partial x^l} - x^{k+1}\dot{\xi}_t \quad (l = 1, \ldots, k; \quad k = 1, \ldots, n-1)\,, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial \xi_x^n}{\partial t} + x^{k+1}\frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^k} + (F + bu)\left(\frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^n} - \dot{\xi}_t\right) = \xi_t\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_x^i\frac{\partial F}{\partial x^i} + \dot{b}u\xi_t + bgu \\ (k = 1, \ldots, n-1; \quad i = 1, \ldots, n)\,. \end{gathered} \tag{15}$$

Так как координаты ξ_x^i и функция F по условию не зависят от u, то уравнение (15) расщепляется на два уравнения

$$\begin{gathered} \frac{\partial \xi_x^n}{\partial t} + x^{k+1}\frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^k} + F\left(\frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^n} - \dot{\xi}_t\right) = \xi_t\frac{\partial F}{\partial t} + \xi_x^i\frac{\partial F}{\partial x^i} \\ (k = 1, \ldots, n-1; \quad i = 1, \ldots, n)\,; \end{gathered} \tag{16}$$

$$b\left(\frac{\partial \xi_x^n}{\partial x^n} - \dot{\xi}_t\right) = \dot{b}\xi_t + bg. \tag{17}$$

Решая систему (14), получим

$$\xi_x^i = x^1 a^{i-1} + P_j^i x^j, \tag{18}$$

$$P_j^i = C_{i-1}^{j-1} a^{(i-j)} - C_{i-1}^{j-2} \xi_t^{(i+1-j)} \quad (j = 2, \ldots, i; \quad i = 2, \ldots, n), \tag{19}$$

где через C_n^m обозначено число сочетаний из n элементов по m. Частное решение уравнений (10) для случая $\xi_{\bar{t}} = 1$, $\xi_{\bar{x}}^i = 0$, $\xi_{\bar{u}} = 0$ выберем в виде

$$\bar{t} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{\xi_t(t)}, \quad \bar{x}^k = m_i^k x^i, \quad \bar{u} = ub\xi_t^n \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a}{\xi_t} dt\right) \tag{20}$$
$$(i = 1, \ldots, k; \;\; k = 1, \ldots, n),$$

где функции $m_i^k(t)$ удовлетворяют системе рекуррентных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{gathered}
\xi_t \dot{m}_1^k + m_i^k a^{(i-1)} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k); \\
\xi_t \dot{m}_2^k + P_2^i m_i^k = 0 \quad (i = 2, \ldots, k); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_t \dot{m}_{k-1}^k + P_{n-1}^i m_i^k = 0 \quad (i = k-1, \ldots, k); \\
\xi_t \dot{m}_k^k + P_k^k m_k^k = 0 \quad (k = 1, \ldots, n),
\end{gathered} \tag{21}$$

которая для достаточно гладких функций $\xi_t(t)$ и $a(t)$ всегда имеет общее решение, определяемое путем последовательного интегрирования (начиная с последнего уравнения системы). Так как здесь подходит любое частное решение, то начальные условия к этой системе удобно задать в виде $m_i^k(t_0) = \delta_i^k$ так, что $\bar{x}^k(0) = x^k(t_0)$ и из последнего уравнения получим

$$m_k^k(t) = \left[\frac{\xi_t(t)}{\xi_t(t_0)}\right]^{k-1} \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a(t)}{\xi_t(t)} dt\right) \tag{22}$$

(δ_i^k — символ Кронекера).

Решения уравнений (16) и (17) имеют соответственно вид

$$F(t) = \xi_t^{1-n} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a}{\xi_t} dt\right) \left[\frac{\omega\left(m_i^1 x^i, \ldots, m_i^n x^n\right)}{\xi_t} - \dot{m}_i^n x^i - m_{j-1}^n x^j\right] \tag{23}$$
$$(i = 1, \ldots, n; \quad j = 2, \ldots, n),$$

$$g = a - n\dot{\xi}_t - \xi_t \dot{b}/b. \tag{24}$$

Здесь ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов; b и ξ_t — произвольные достаточное число раз дифференцируемые функции переменного t.

Подвергая (12) преобразованиям (20), получим

$$(25)\quad \frac{d\bar{x}^1}{d\bar{t}} = \bar{x}^2, \quad \frac{d\bar{x}^2}{d\bar{t}} = \bar{x}^3, \quad \ldots, \quad \frac{d\bar{x}^{n-1}}{d\bar{t}} = \bar{x}^n; \quad \frac{d\bar{x}^n}{d\bar{t}} = \omega\left(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n\right) + \bar{u}.$$

С л е д с т в и е. *Если в формуле* (23) *положить* $\omega = \beta_k \bar{x}^k$, *где* β_k — *постоянные, то*

$$(26)\quad F = \xi_t^{1-n} \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a}{\xi_t} dt\right) \left[x^1 \left(\frac{\beta_k m_1^k}{\xi_t} - \dot{m}_1^n\right) + x^i \left(\frac{\beta_k m_i^k}{\xi_t} - \dot{m}_i^n - m_{i-1}^n\right)\right]$$

$$(i = 2, \ldots, n; \;\; k = 1, \ldots, n)\,.$$

Таким образом, если функция F задана в виде (26), то линейное однородное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами с помощью подстановки (20) приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Если $a = 0$, то $m_i^k = \mathrm{const}$ и подстановка (20) совпадает с одной из подстановок, указанных в [41].

Отметим, что для частного случая неуправляемой системы третьего порядка из (25) следует основной результат работы [42].

Функции $S\,(t, x)$, $m\,(t)$, допускающие приводимость оптимальной задачи, в соответствии с (4) удовлетворяют уравнению

$$(27)\qquad \xi_t \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \dot{m}u^2\right) + ax^1 \frac{\partial S}{\partial x^1} + P_j^i x^j \frac{\partial S}{\partial x^i} + 2mu\xi_u + \left(S + mu^2\right)\dot{\xi}_t = 0$$

$$(j = 2, \ldots, i; \quad i = 2, \ldots, n)\,,$$

откуда с учетом (19), (24) следует

$$(28)\qquad S\,(t, x) = \psi\left(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n\right)/\xi_t,$$

где ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция;

$$(29)\qquad m\,(t) = cb^2 \xi_t^{2n-1} \exp\left(-2\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a}{\xi_t} dt\right).$$

Функционал (13) в новых переменных примет вид

$$(30)\qquad J = \int\limits_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_k} \left[\psi\,(\bar{x}) + c\bar{u}^2\right] d\bar{t},$$

где c — произвольная постоянная и

$$\bar{t}_k = \int\limits_{t_0}^{t_k} \frac{dt}{\xi_t\,(t)}.$$

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 1. Пусть в системе (12) *функция* $F(t,x)$ *задана равенством* (23), *а в функционале* (13) *функции* $S(t,x)$ *и* $m(t)$ *определяются соответственно формулами* (28) *и* (29). *Тогда преобразование* T (20) *осуществляет приводимость управляемого процесса* (12), (13) *в инвариантный относительно «времени»* $\bar{t}$ *процесс* (25), (30).

Покажем, что преобразование T является взаимно-однозначным; для этого достаточно установить, что его якобиан

$$J(T) = \frac{\alpha(t)}{\xi_t(t)}|M|, \quad M = \left|m_i^k\right|, \quad \alpha = b\xi_t^n \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} \frac{a}{\xi_t} dt\right)$$

не равен нулю: $J(t) \neq 0$.

Следовательно, нужно доказать, что определитель $|M| \neq 0$. Так как $i < k$, то матрица M является треугольной и, следовательно, $M = \prod\limits_{k=1}^{n} m_n^k(t)$, где $m_n^k(t)$ определяются равенством (22). Таким образом, при естественном предположении $b(t) \neq 0$, $\xi_t(t) \neq 0$ преобразование T есть диффеоморфизм.

Следуя [43], введем следующее понятие.

Определение. Уравнение Р. Беллмана, соответствующее оптимальному процессу (12), (13), *инвариантно относительно преобразования* T (20), *если в результате преобразования этого уравнения получается уравнение, совпадающее с уравнением Р. Беллмана, составленным для оптимального процесса* (25), (30).

Утверждение 2. Уравнение Р. Беллмана для оптимальной задачи (12), (13) *инвариантно относительно преобразования* (20).

Действительно, уравнение Р. Беллмана для оптимальной задачи (12), (13) согласно [39] имеет вид

$$(31) \quad -\frac{\partial \omega}{\partial t} = \max\left[S + mu^2 + x^{k+1}\frac{\partial \omega}{\partial x^k} + (F + bu)\frac{\partial \omega}{\partial x^n}\right] \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Подвергая уравнение (31) преобразованиям (20), получим

$$(32) \quad -\frac{\partial \omega}{\partial \bar{t}} = \max\left[\psi + c\bar{u}^2 + \bar{x}^{k+1}\frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}^k} + (\omega + \bar{u})\frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}^n}\right] \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Но равенство (32) есть уравнение Р. Беллмана для оптимальной задачи (25), (30), что и доказывает это утверждение.

4. Заключение

В работе дана постановка задачи приводимости оптимальных процессов с сосредоточенными параметрами и предложен метод ее решения с привлечением теории групп С. Ли.

В качестве примера рассмотрена задача приводимости оптимального процесса, заданного нелинейным уравнением n-го порядка и квадратичным относительно управления функционалом.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при решении задачи синтеза регуляторов для линейных и нелинейных автоматических систем различных назначений.

При написании раздела «Введение» был использован материал, любезно предоставленный автору профессором В.Г. Павловым, которому автор выражает глубокую благодарность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Борецкий И.Ф., Павлов В.Г.* О некоторых свойствах динамических систем, связанных с их симметрией / Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Изд-во АН УССР, 1980. Вып. 47. С. 25–34.
3. *Брокетт Р.У.* Алгебры Ли и группы Ли в теории управления / Математические методы в теории систем. М.: Мир, 1979. С. 174–220.
4. *Борецкий И.Ф., Павлов В.Г.* О единственности декомпозиции в линейной задаче оптимального управления с квадратичным критерием качества // АиТ. 1979. № 11. С. 10–15.

   Boretskiy I.F., Pavlov V.G. On Uniqueness of Decomposition in a Linear Optimal Control Problem with a Quadratic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 11. P. 1563–1568.
5. *Кухтенко А.И.* Основные задачи теории управления сложными системами / Сложные системы управления. АН УССР. Институт кибернетики. Киев, 1968. Вып. 1. С. 3–37.
6. *Можаев Г.В.* Об использовании симметрии в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества // АиТ. 1975. № 6. С. 22–30.

   Mozhaev G.V. On the Use of Symmetry in Linear Optimal Control Problems with a Quadratic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 1975. V. 36. No. 6. P. 892–899.
7. *Удилов В.В., Ковбаса Г.Т.* О декомпозиции многомерных симметричных линейных систем автоматического управления / Сложные системы управления. Киев: Изд-во АН УССР, 1972. С. 65–81.
8. *Шайкин М.Е.* Теоретико-групповые методы декомпозиции симметричных многосвязных динамических систем // АиТ. 1973. № 9. С. 22–32.

   Shaykin M.Ye. Group-Theoretic Methods of Decomposition of Symmetrical Multivariable Dynamical Systems // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 9. P. 1383–1392.
9. *Ramar K., Ramaswami B.* Transformation of timevariable multiinput systems to a canonical form / IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. V. AC-16. P. 371–374.
10. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. I // Вычислит. математика и мат. физика. 1971. № 4. С. 862–872.
11. *Павловский Ю.Н.* Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. II // Вычислит. математика и мат. физика. 1971. Т. 14. № 5. С. 1093–1103.

12. *Павловский Ю.Н.* К вопросу об агрегировании и построении иерархических управляющих структур для одного класса сложных систем // Вычислит. математика и мат. физика. 1971. Т. 11. № 6. С. 1510–1520.

13. *Павловский Ю.Н.* Агрегирование, декомпозиция, групповые свойства, декомпозиционные структуры динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1978. Вып. 39. С. 53–63.

14. *Елкин Е.Н.* Об условиях агрегирования управляемых динамических систем // Вычислит. математика и мат. физика. 1978. Т. 18. № 4. С. 928–934.

15. *Борецкий И.Ф., Павлов В.Г.* Теоретико-групповая интерпретация чувствительности гладких динамических систем // АиТ. 1980. № 2. С. 5–10.

    Boretskiy I.F., Pavlov V.G. Group-Theoretic Interpretation of Smooth Dynamic System Sensitivity // Autom. Remote Control. 1980. V. 41. No. 2.

16. *Гараев К.Г., Павлов В.Г.* Непрерывные группы преобразований в задаче чувствительности систем с распределенными параметрами. Теория инвариантности и ее применение / Тр. V Всесоюзн. сов. Киев. 1979. С. 330–334.

17. *Павлов В.Г.* Использование понятия инфинитезимального преобразования в исследовании чувствительности линейных оптимальных систем / Тр. КАИ. Казань. 1971. Вып. 135. С. 3–9.

18. *Борецкий И.Ф.* Управляемость и наблюдаемость нелинейных систем при отображениях / ВИНИТИ. Москва. 1981. № 954. С. 16–22.

19. *Борецкий И.Ф., Павлов В.Г.* Теоретико-групповая интерпретация некоторых свойств линейной динамической системы // АиТ. 1979. № 2. С. 12–15.

    Boretskiy I.F., Pavlov V.G. Group-Theoretic Interpretation of Some Properties of a Linear Dynamic System // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 2. P. 163–165.

20. *Кухтенко А.И. и др.* Абстрактная теория систем. Современное состояние и тенденции развития // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1972. Вып. 15. С. 4–22.

21. *Семенов В.Н.* Об управляемости нелинейных динамических систем управления // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1971. Вып. 8. С. 38–40.

22. *Яковенко Г.Н.* Групповой подход к управляемости и инвариантности динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1978. № 38. С. 21–29.

23. *Paul C.R., Kuol L.* Controllability and observability of linear dynamical systems // SIAM J. Contr. 1972. V. 10. No. 2. P. 252–264.

24. *Wonham W.M.* Dynamic observes: geometric theory // IEEE Trans. Automat. Contr. 1970. V. AC-15. P. 258–259.

25. *Яковенко Г.Н.* Траекторный синтез оптимального управления // АиТ. 1972. № 6. С. 5–12.

    Yakovenko G.N. Design of Optimal Control by Evolution Trajectories // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 6. P. 889–895.

26. *Яковенко Г.Н.* Симметрии по состоянию в системах с управлением / Прикладная механика и математика: Межвед. сб. науч. тр. М.: МФТИ, 1992. С. 155–176.

27. *Павлов В.Г.* Построение некоторых инвариантных решений в частной задаче аналитического конструирования регуляторов // АиТ. 1972. № 6. С. 192–195.

    Pavlov V.G. Obtaining Certain Invariant Solutions in a Particular Problem of Regulator Analytical Construction // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 6. P. 1054–1057.

28. *Ikeda M., Sakamoto K.* On the concept of symmetry in Pontryagins maximum principle // SIAM J. Contr. 1975. V. 13. P. 389–399.

29. *Павлов В.Г.* Групповые свойства и инвариантные решения в задаче аналитического конструирования регуляторов в процессе с распределенными параметрами // АиТ. 1973. № 8. С. 5–12.

    Pavlov V.G. Group Properties and Invariant Solutions in the Problem of Analytical Design of Controllers in a Process with Distributed Parameters // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 8. P. 1201–1207.

30. *Garaev K.G., Kuznetsov V.K.* An invariant variational problem of the laminar boundary layer // J. Appl. Math. Mechan. 2011. V. 75. No. 4. P. 404–409.

31. *Garaev K.G.* On a Problem of Optimal Control of the Laminar Boundary Layer in Incompressible Flow // Russian Aeronaut. 2017. V. 60. No. 2. P. 299–302.

32. *Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R.* Problem of Optimal Control of the Turbulent Boundary Layer on a Permeable Surface in Supersonic Gas Flow // Fluid Dynam. 2018. V. 53. No. 4. P. 573–581.

33. *Garaev K.G., Mukhametzyanov I.R.* To the Problem of Friction Minimization on Permeable Surfaces at Supersonic Flow Rate // Russian Aeronaut. (Iz.VUZ). 2018. V. 61. No. 3. P. 391–395.

34. *Чеботарев Н.Г.* Теория групп Ли. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1940.

35. *Lie S., Scheffers G.* Vorlesungen über differentialgleichungeh mit bekannten infinitesimalen transformationen. Leipzig, 1891.

36. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

37. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. М.: Гостехтеоретиздат, 1952.

38. *Понтрягин Л.С., Болтянский А.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.

39. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: НИЛ, 1960.

40. *Беркович Л.М., Розов Н.Х.* Система обыкновенных дифференциальных уравнений, приводимая к автономному виду // Тр. Семинара по дифференц. уравнениям. Куйбышев. 1975. С. 98–114.

41. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979.

42. *Дасарати Р., Странивасан Б.* О подстановках, сводящих нестационарные системы в эквивалентные системы с постоянными коэффициентами // Экспресс-информация. Системы автоматического управления. 1968. № 27.

43. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 16.10.2019

После доработки 24.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020