Автоматика и телемеханика, № 7, 2020

Стохастические системы

© 2020 г. **А.С. АРХИПОВ** (ege3145@yandex.ru),
К.В. СЕМЕНИХИН, д-р физ.-мат. наук (siemenkv@rambler.ru)
(Московский авиационный институт)

МИНИМАКСНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПО ВЕРОЯТНОСТНОМУ КРИТЕРИЮ ПРИ НАЛИЧИИ УНИМОДАЛЬНЫХ ПОМЕХ И ОГРАНИЧЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ[1]

Рассмотрена модель линейной регрессии с вектором ограниченных параметров и центрированным вектором помех, имеющим неопределенное унимодальное распределение, но известную ковариационную матрицу. Сформулирована задача минимаксного оценивания линейной комбинации неизвестных параметров с использованием вероятностного критерия. Минимаксная оценка определяется в результате минимизации вероятностной границы на области возможных значений дисперсии и квадрата смещения всевозможных линейных оценок. Установлена меньшая консервативность полученного робастного решения в сравнении с более широкими классами распределений.

Ключевые слова: минимаксная оценка, вероятностный критерий, ограниченные параметры, унимодальные помехи, наихудшее распределение.

DOI: 10.31857/S0005231020070028

1. Введение

Минимаксные постановки задач оценивания возникают при необходимости построить оценку, имеющую наилучшие показатели погрешности из расчета на наихудший случай сочетания неопределенных характеристик модели наблюдения. При такой трактовке проблема оценивания формулируется в виде задачи оптимизации, целью которой является выбор оценки, доставляющей минимум максимальному значению погрешности. При выборе оптимизационной формулировки необходимо учитывать, что широкие классы неопределенности приводят к сильно перестраховочным и потому малоэффективным статистическим решениям. Поэтому поиск минимаксных постановок, которые приводят к оценкам, сочетающим в себе свойства робастности и эффективности, остается актуальной проблемой. Одним из вариантов решения этой проблемы является сравнительный анализ решений минимаксных задач, соответствующих различным классам распределений.

В данной статье основным показателем качества оценивания выступает вероятность ошибки, т.е. вероятность превышения ошибкой оценки заданного

[1] Результаты работы получены в рамках выполнения госзадания № 9.7555.2017/БЧ.

порога. Этот вероятностный критерий был использован Бахадуром для определения специального понятия асимптотической эффективности [1]. В отличие от классического подхода, предложенного Фишером и развитого Рао и Крамером, это понятие основано на сравнении вероятности ошибки, а не среднеквадратической погрешности [2]. Неасимптотические границы для вероятности ошибки были получены при решении статистических задач распознавания и обучения [3]. При построении минимаксных линейных оценок скалярных параметрических функций по вероятностному критерию в [4] использовалось обобщенное неравенство Чебышёва. Для оценивания многомерных параметров, близких к минимизации вероятности ошибки является метод доверительного оценивания, при котором требуется построить доверительное множество наименьшего размера. Для моделей, содержащих одновременно гауссовские помехи и неопределенные параметры, метод нелинейного доверительного оценивания разработан в [5, 6]. Для стохастических многошаговых систем метод мультиоценок разработан в [7]. Задача минимаксного оценивания по вероятностному критерию при наличии неограниченных неизвестных параметров и случайных ошибок с неопределенным распределением и частично заданной ковариационной матрицей рассматривалась в [8]. В сравнении с этой работой специфика данной статьи определяется тем, что на неизвестные параметры накладываются априорные ограничения, а совместное распределение помех принадлежит классу унимодальных распределений.

Для построения минимаксных статистических решений в условиях неопределенности, описываемой с помощью ограничений на математические ожидания и ковариационные матрицы, применяется методология полуопределенного программирования и техника линейных матричных неравенств [9, 10]. Однако наихудшие значения вероятностных показателей качества на классе распределений, определяемых лишь условиями на моментные характеристики второго порядка, оказываются достаточно пессимистичными. Это легко видно из сравнения неравенств Чебышёва и Гаусса: сужение класса до унимодальных распределений позволяет снизить вероятностную границу в $9/4$ раз [11].

Важные факты об унимодальных распределениях собраны в [12]. Утверждение о том, что равномерное распределение доставляет минимум вероятности попадания в выпуклое множество на классе унимодальных распределений, обосновано в [13–15]. Если дополнительно наложены моментные ограничения, то эту оптимизационную постановку для некоторых специальных классов унимодальных распределений можно свести к задаче полуопределенного программирования [16].

В настоящей статье рассматривается задача минимаксного оценивания линейной комбинации ограниченных параметров в модели линейной регрессии при наличии центрированных помех с неопределенным распределением, но фиксированными дисперсиями и ковариациями. Основное внимание уделяется случаю симметричного унимодального распределения. Для этого класса помех разработан метод построения неасимптотических доверительных множеств [17, 18]. Благодаря [19], радиус доверительного интервала можно выбирать оптимальным образом на основе неулучшаемой границы для вероятности превышения симметричной унимодальной величиной заданного порога. Таким образом, решение задачи минимаксного оценивания для разных классов распределений получается за счет использования известных вероятностных границ, следующих из неравенств Селберга, Гаусса, Высочанского–Петунина и др.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную регрессионную модель

$$X = \langle a, \theta \rangle, \quad Y = B\theta + \eta, \tag{1}$$

в которой скалярная величина X подлежит оцениванию по фиксированному набору наблюдений, представленному в виде вектора $Y \in \mathbb{R}^n$ (скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают скалярное произведение).

Допустим, что вектор неизвестных параметров θ принадлежит заданному компактному множеству $\Theta \subset \mathbb{R}^p$, а вектор случайных помех $\eta \in \mathbb{R}^n$ имеет нулевое математическое ожидание и известную положительно определенную матрицу ковариаций K:

$$\mathsf{M}\eta = 0, \quad \mathsf{cov}\{\eta, \eta\} = K \succ O. \tag{2}$$

Матрица регрессии $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ и вектор коэффициентов $a \in \mathbb{R}^p$ предполагаются заданными, а информационная матрица $D = B^* K^{-1} B$ – невырожденной (символ * обозначает транспонирование).

Распределение вектора помех P_η будем считать неопределенным с точностью до принадлежности некоторому классу $\mathcal{H}(K)$, который содержит n-мерные распределения с учетом ограничений на моментные характеристики (2). Это условие будем записывать кратко в виде $\eta \sim \mathcal{H}(K)$.

В качестве $\mathcal{H}(K)$ будут рассматриваться:

1) класс $\mathcal{U}(K)$ симметричных унимодальных распределений;
2) класс $\mathcal{V}(K)$ унимодальных распределений;
3) класс $\mathcal{P}(K)$ всевозможных распределений.

Условие *унимодальности случайного вектора* $\eta \in \mathbb{R}^n$ означает, что при любом выборе вектора коэффициентов $g \in \mathbb{R}^n$ унимодальной будет величина $\langle \eta, g \rangle$. В [12] это свойство многомерного распределения именуется *линейной унимодальностью*. Выбор этого понятия связан с двумя причинами. Во-первых, его проверка требует лишь анализа линейных форм случайного вектора вместо изучения многомерного распределения. Во-вторых, понятие линейной унимодальности в сравнении с другими видами многомерной унимодальности определяет наиболее широкий класс распределений, в котором соблюдается инвариантность относительно линейных преобразований случайного вектора.

По определению

$$\eta \sim \mathcal{U}(K) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \eta, b \rangle \sim \mathcal{U}(d) \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^n,\ d \geqslant 0\colon\ d = \langle Kb, b \rangle, \tag{3}$$

где $\mathcal{U}(d)$ обозначает класс симметричных унимодальных распределений на прямой с нулевым средним и дисперсией d. Для скалярной величины условие $\xi \sim \mathcal{U}(d)$, помимо равенства $\mathsf{D}\xi = d$, означает, что вероятность попадания в любое борелевское множество B можно записать в виде

$$\mathsf{P}\{\xi \in B\} = (1-q)\delta_m(B) + q \int\limits_B f(x)\,dx, \tag{4}$$

где q — число из отрезка $[0,1]$, δ_m — мера Дирака, сосредоточенная в точке $m=0$, $f(x)$ — четная плотность вероятности, невозрастающая на полуоси $(0,\infty)$. Таким образом, для величины $\xi \sim \mathcal{U}(d)$ точка $m=0$ является одновременно центром симметрии, математическим ожиданием и модой.

В случае $\xi \sim \mathcal{V}(d)$ имеет место представление (4), в котором плотность вероятности $f(x)$ монотонно не возрастает при $x > m$ и монотонно не убывает при $x < m$, хотя точка m не обязана совпадать с нулем, а плотность вероятности $f(x)$ может быть несимметричной. Поэтому унимодальная величина $\xi \sim \mathcal{V}(d)$ имеет те же моментные характеристики $\mathsf{M}\xi = 0$, $\mathsf{D}\xi = d$, но произвольную моду m. Теперь формальное определение класса $\mathcal{V}(K)$ можно дать аналогично (3).

Описанные классы распределений связаны включениями

$$\mathcal{U}(K) \subset \mathcal{V}(K) \subset \mathcal{P}(K).$$

При построении оценок условие $\eta \sim \mathcal{U}(K)$ будет рассматриваться в качестве основного предположения о распределении помех, а классы $\mathcal{V}(K)$ и $\mathcal{P}(K)$ будут использоваться для анализа консервативности построенных оценок.

Рассмотрим линейную оценку величины X

$$\widetilde{X} = \langle f, Y\rangle + c, \tag{5}$$

где $f \in \mathbb{R}^n$ — вектор коэффициентов (оцениватель), а $c \in \mathbb{R}$ – коэффициент сдвига.

Пусть положительное число h определяет величину порога, превышение которого модулем ошибки оценивания $\widetilde{X} - X$ является весьма нежелательным событием. Вероятность этого события

$$\mathsf{P}\left\{|\widetilde{X} - X| \geqslant h\right\}, \tag{6}$$

называемая далее *вероятностью ошибки*, характеризует надежность оценки: чем меньше вероятность (6), тем более надежна оценка $\widetilde{X}$. Следовательно, для построения наиболее надежной оценки вероятность ошибки требуется минимизировать. Однако непосредственно сделать это невозможно, так как (6) зависит и от неопределенного распределения вектора помех, и от вектора неизвестных параметров. При этом пополнить или уточнить информацию об этих характеристиках невозможно в силу ограниченности объема наблюдений. Поэтому для формулировки корректной оптимизационной постановки задачи оценивания будем использовать *минимаксный подход*.

Итак, требуется минимизировать *гарантированное* значение вероятности ошибки в рамках имеющейся априорной информации за счет выбора коэффициентов оценки:

$$\sup_{\theta\in\Theta}\ \sup_{\eta\sim\mathcal{H}(K)} \mathsf{P}\left\{|\widetilde{X} - X| \geqslant h\right\} \to \min_{f\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R}}. \tag{7}$$

Если пара $(\hat{f}, \hat{c})$ доставляет минимум в (7), то соответствующую оценку $\hat{X} = \langle \hat{f}, Y \rangle + \hat{c}$ будем называть *минимаксной*, а вектор $\hat{f}$ при $\hat{c} = 0$ — *минимаксным оценивателем*.

Таким образом, цель данной работы — решение задачи минимаксного оценивания по *вероятностному критерию* (7) при наличии ограниченных неизвестных параметров и случайных помех с неопределенным унимодальным распределением.

Помимо построения минимаксной оценки $\hat{X}$, важным представляется нахождение *наихудшего распределения* $\widehat{\mathsf{P}}_\eta$, на котором достигается максимум вероятности ошибки на классе $\mathcal{H}(K)$:

$$\sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} \mathsf{P}\left\{|\hat{X} - X| \geqslant h\right\} = \widehat{\mathsf{P}}\left\{|\hat{X} - X| \geqslant h\right\},$$

где $\widehat{\mathsf{P}}$ — символ вероятности, вычисляемой в предложении $\eta \sim \widehat{\mathsf{P}}_\eta$.

Замечание 1. Предположение о том, что ковариационная матрица вектора помех фиксирована, не является принципиальным. Условие (2) можно без ограничения общности заменить на матричное неравенство $\mathsf{cov}\{\eta, \eta\} \preccurlyeq K$, которое позволяет учесть ограниченность дисперсий и неопределенность ковариаций. Однако рассмотрение более общих множеств неопределенности для матриц $\mathsf{cov}\{\eta, \eta\}$ выходит за рамки данной статьи.

3. Вероятностные границы

Определим гарантированное значение вероятности ошибки

$$\sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} \mathsf{P}\left\{|\widetilde{X} - X| \geqslant h\right\} \tag{8}$$

при условии, что задано определенное значение вектора параметров θ. В этом случае дисперсия и смещение оценки (5) также будут фиксированы:

$$d = \mathsf{D}\widetilde{X} = \langle Kf, f \rangle, \qquad r = \mathsf{M}\{\widetilde{X} - X\} = c + \langle B^* f - a, \theta \rangle. \tag{9}$$

Тогда вероятность ошибки равна $\mathsf{P}\{|\varepsilon + r| \geqslant h\}$, где ε — *центрированная ошибка*. Она имеет нулевое математическое ожидание, дисперсию d и распределение из соответствующего класса, который будем обозначать как $\mathcal{H}(d)$.

Если $\mathcal{H}(d)$ совпадает с одним из определенных выше классов $\mathcal{U}(d)$, $\mathcal{V}(d)$ или $\mathcal{P}(d)$, то условия $\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)$ и $-\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)$ равносильны, поэтому знак смещения r не имеет значения. Благодаря этому факту, определим вероятностную границу

$$\pi_h^{\mathcal{H}}(d, r^2) = \sup_{\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)} \mathsf{P}\{|\varepsilon + r| \geqslant h\} \tag{10}$$

как функцию пары аргументов: дисперсии d и квадрата смещения r^2.

Для решения задачи минимаксного оценивания по вероятностному критерию принципиальным является следующий вопрос: “Совпадает ли граница (10) с гарантированным значением вероятности ошибки (8)?”

Как показывает приведенная ниже теорема, ответ на этот вопрос положителен, по крайней мере, для двух классов $\mathcal{U}(K)$ или $\mathcal{P}(K)$.

Теорема 1. *Для любой линейной оценки* (5) *гарантированное значение вероятности ошибки при фиксированном значении θ равно соответствующей вероятностной границе*:

$$\sup_{\eta\sim\mathcal{H}(K)} \mathsf{P}\left\{|\widetilde{X}-X|\geqslant h\right\} = \pi_h^{\mathcal{H}}(d,r^2), \tag{11}$$

где d, r определяются выражениями (9), *а $\mathcal{H}(K)$ — любой из двух классов распределений $\mathcal{U}(K)$ или $\mathcal{P}(K)$.*

Доказательства этой и последующих теорем вынесены в Приложение.

В доказательстве теоремы 1 используется специальная конструкция вектора помех, имеющего наихудшее распределение. Однако для того чтобы утверждать, что это распределение действительно принадлежит классу $\mathcal{V}(K)$, не хватает факта об унимодальности свертки унимодального и симметричного унимодального распределений. Но такое утверждение без дополнительных предположений неверно. К тому же вид наихудшего распределения центрированной ошибки в задаче (10) в случае $\mathcal{H}=\mathcal{V}$ не известен. Поэтому для класса унимодальных распределений $\mathcal{V}(K)$ можно утверждать лишь неравенство

$$\sup_{\eta\sim\mathcal{V}(K)} \mathsf{P}\left\{|\widetilde{X}-X|\geqslant h\right\} \leqslant \pi_h^{\mathcal{V}}(d,r^2).$$

О вероятностных границах известно следующее:

$$\pi_h^{\mathcal{U}}(d,r^2) = \begin{cases} 4d/(9h^2), & d\leqslant 3h^2/4, \quad |r|\leqslant (1-1/\sqrt{2})h,\\ 1-h/\sqrt{3d}, & d\geqslant 3h^2/4, \quad |r|\leqslant (1-1/\sqrt{2})h,\\ 1, & |r|\geqslant h, \end{cases} \tag{12}$$

$$\pi_h^{\mathcal{V}}(d,r^2) \leqslant \overline{\pi}_h^{\mathcal{V}}(d,r^2) = \begin{cases} 4(d+r^2)/(9h^2), & d+r^2\leqslant 3h^2/8,\\ 4(d+r^2)/(3h^2)-1/3, & 3h^2/8\leqslant d+r^2\leqslant h^2,\\ 1, & d+r^2\geqslant h^2; \end{cases} \tag{13}$$

$$\pi_h^{\mathcal{P}}(d,r^2) = \begin{cases} d/(d+(h-|r|)^2), & d+r^2\leqslant |r|h,\\ (d+r^2)/h^2, & |r|h\leqslant d+r^2\leqslant h^2,\\ 1, & d+r^2\geqslant h^2. \end{cases} \tag{14}$$

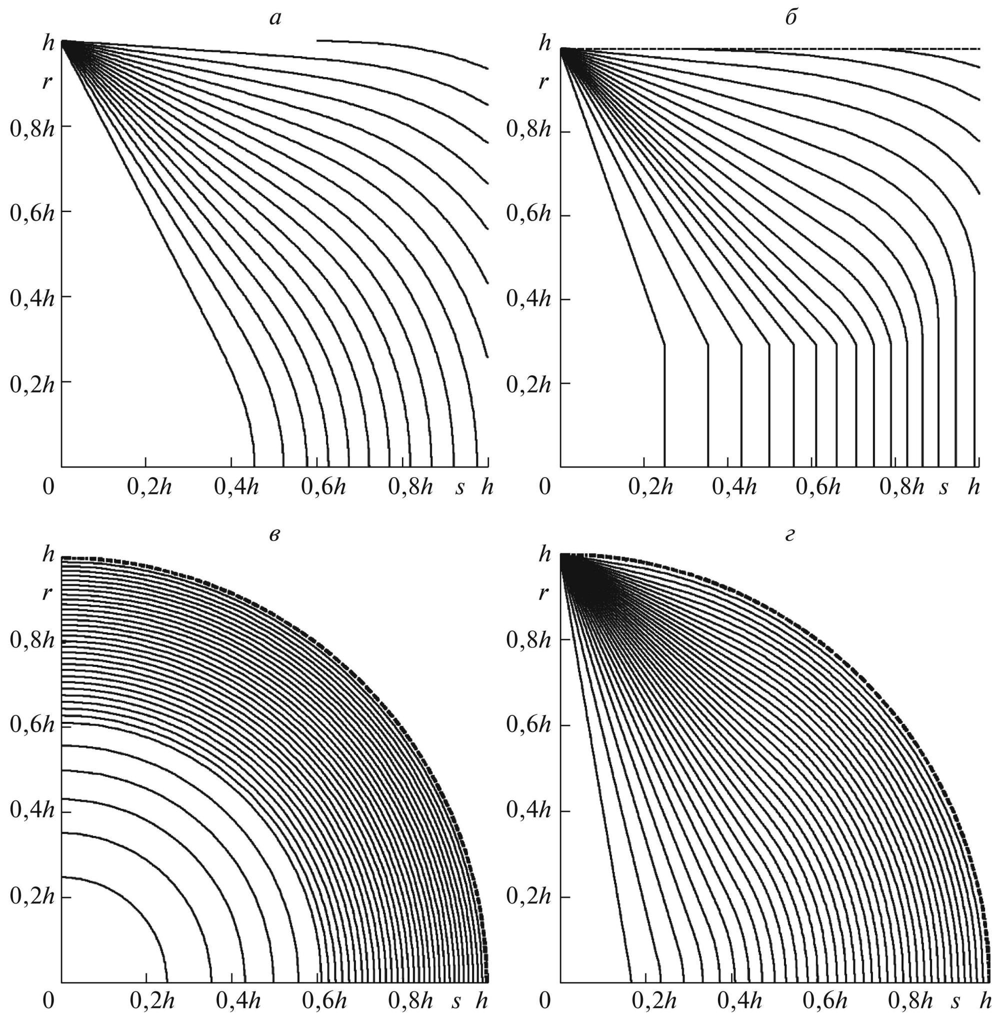

Рис. 1. Линии уровня *а* — вероятности нормальной ошибки $\pi_h^{\mathcal{N}}(s^2, r^2) = \alpha$ и вероятностных границ *б* — $\pi_h^{\mathcal{U}}(s^2, r^2) = \alpha$, *в* — $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}}(s^2, r^2) = \alpha$, *г* — $\pi_h^{\mathcal{P}}(s^2, r^2) =$ $= \alpha$ для $\alpha = k/36$, $k = 1, \ldots, 35$.

Полное выражение для границы $\pi_h^{\mathcal{U}}$ на классе симметричных унимодальных распределений показано в [19]. Первые два случая в (12) соответствуют ситуации, при которой смещение оценки составляет меньше 29 % от порога ошибки h. При этом $\pi_h^{\mathcal{U}}$ совпадает с правой частью неравенства Гаусса, которое описывает неулучшаемую границу в ситуации нулевого смещения [11].

К сожалению, замкнутое выражение для границы $\pi_h^{\mathcal{V}}$ на классе унимодальных распределений не известно. Тем не менее вместо $\pi_h^{\mathcal{V}}$ можно использовать ее оценку сверху $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}}$, известную из неравенства Высочанского–Петунина [20, 21]. Выражение (13) полностью определяется вторым моментом $\mathsf{M}(\varepsilon + r)^2 = d + r^2$, в то время как мода является неопределенной. В первом случае из (13) граница $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}}$ по форме совпадает с тем, что давало бы неравенство Гаусса для величины с нулевой модой.

Наконец, $\pi_h^{\mathcal{P}}$ представляет собой правую часть неравенства Селберга, описывающую вероятностную границу для величины с произвольным распределением, но фиксированными средним и дисперсией [11]. Во втором случае из (14) соответствующая граница определяется неравенством Маркова, в котором используется только второй момент.

В дополнение к указанным выше вероятностным границам приведем выражение для вероятности ошибки $\pi_h^{\mathcal{N}}(d, r^2) = \mathsf{P}\{|\varepsilon + r| \geqslant h\}$ в случае нормальной случайной величины $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, d)$:

$$\pi_h^{\mathcal{N}}(d, r^2) = \Psi\left(\frac{h - r}{\sqrt{d}}\right) + \Psi\left(\frac{h + r}{\sqrt{d}}\right), \quad \text{где} \quad \Psi(x) = \int\limits_x^{\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt. \tag{15}$$

На рис. 1 изображены линии уровня вероятности ошибки в четырех случаях на плоскости переменных (s, r), где s — среднеквадратичное отклонение (с.к.о.), а r — смещение. Случай *а* соответствует нормальному распределению, а случаи *б*, *в* и *г* описывают границы вероятности ошибки на классах распределений $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{P}$ соответственно. Сплошные линии соответствуют уровням $\alpha = 1/36 \approx 0{,}028$, $1/18 \approx 0{,}056$, $1/12 \approx 0{,}083$, $1/9 \approx 0{,}111$ и далее с шагом $1/36$. На графиках они идут слева направо. Штриховая линия определяет границу области, вне которой вероятностная граница равна единице.

Отметим, что граница $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}}$ из неравенства Высочанского–Петунина является перестраховочной. Поэтому, несмотря на включение $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}$, неравенство $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}} \leqslant \pi_h^{\mathcal{P}}$ нарушается при достаточно большом смещении $r < h$.

4. Геометрический метод решения задачи минимаксного оценивания

Теорема 1 позволяет высказать предположение о том, что исходная минимаксная задача (7) может быть сведена к минимизации вероятностной границы

$$\min_{(d,\rho) \in Q} \pi_h^{\mathcal{H}}(d, \rho) \tag{16}$$

по *области возможных значений характеристик ошибки*:

$$Q = \Big\{(d, \rho)\colon \ \exists\,(f, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon \quad d \geqslant \langle Kf, f\rangle,\ \rho \geqslant (c + \langle B^* f - a, \theta\rangle)^2 \ \ \forall \theta \in \Theta\Big\}. \tag{17}$$

Согласно определению область Q образована парами (d, ρ), где d – дисперсия, а $\rho = r^2$ – квадрат смещения произвольной линейной оценки. Свойства области (17) описаны ниже.

Теорема 2. *На плоскости переменных (d, ρ) область Q представляет собой надграфик выпуклой непрерывной функции*

$$\rho(d) = \min_{(f,c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \left\{ \max_{\theta \in \Theta} (c + \langle B^* f - a, \theta\rangle)^2 \colon \langle Kf, f\rangle \leqslant d \right\}, \quad d \geqslant 0. \tag{18}$$

Для $\lambda \geqslant 0$ прямая $\rho + \lambda d = \gamma_\lambda$ будет опорной к Q тогда и только тогда, когда

$$\gamma_\lambda = \min_{(f,c)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \left\{ \lambda\langle Kf, f\rangle + \max_{\theta\in\Theta} (c + \langle B^* f - a, \theta\rangle)^2 \right\}. \tag{19}$$

Если (f_λ, c_λ) — решение задачи (19), *то точка*

$$d_\lambda = \langle K f_\lambda, f_\lambda\rangle, \quad \rho_\lambda = \max_{\theta\in\Theta} (c_\lambda + \langle B^* f_\lambda - a, \theta\rangle)^2 \tag{20}$$

лежит на кривой (18).

Таким образом, построение нижней огибающей множества Q связано с решением семейства минимаксных задач (18), каждая из которых состоит в минимизации максимального смещения при ограниченной дисперсии ошибки. Благодаря выпуклости и замкнутости, множество Q можно описать набором опорных прямых $\rho + \lambda d = \gamma_\lambda$. При этом величина γ_λ равна минимаксному значению среднеквадратичной (с.к.) ошибки в исходной модели (1) при условии, что коэффициент λ задает уровень помех: $\mathsf{cov}\{\eta, \eta\} = \lambda K$.

Отметим, что при $\lambda = 0$ соответствующее γ_0 равно минимально возможному значению максимума квадрата смещения. Но в силу невырожденности информационной матрицы D существуют несмещенные оценки, поэтому указанное значение равно нулю: $\gamma_0 = \rho(d) = 0$ при $d \geqslant d_0$, где $d_0 = \langle D^{-1}a, a\rangle$ — дисперсия наилучшей линейной несмещенной оценки

$$\widetilde{X}_0 = \langle f_0, Y\rangle, \quad f_0 = K^{-1}BD^{-1}a.$$

Если же $\lambda > 0$ достаточно велико, то $\gamma_\lambda = R^2$, где R — радиус интервала возможных значений оцениваемой величины X, т.е.

$$R = \frac{1}{2}\left(\max_{\theta\in\Theta} \langle a, \theta\rangle - \min_{\theta\in\Theta} \langle a, \theta\rangle \right).$$

Для решения минимаксной задачи (19) можно использовать методы двойственной оптимизации (см., например, теорему 3.4.1 из [22]).

Если $\mathcal{H}(K)$ — один из классов $\mathcal{N}(0, K)$, $\mathcal{U}(K)$ или $\mathcal{P}(K)$, то связь между задачей минимаксного оценивания по вероятностному критерию (7) и двумерной оптимизацией вероятностной границы (16) раскрыта в следующей теореме.

Теорема 3. *Если точка $(\hat{d}, \hat{\rho})$ доставляет минимум вероятностной границе в* (16), *а пара $(\hat{f}, \hat{c})$ образует решение минимаксной задачи* (19) *с параметром $\lambda \geqslant 0$, равным коэффициенту опорной прямой к области Q в точке $(\hat{d}, \hat{\rho})$, то оценка $\hat{X} = \langle \hat{f}, Y\rangle + \hat{c}$ является минимаксной по вероятностному критерию, причем*

$$\pi_h^{\mathcal{H}}(\hat{d}, \hat{\rho}) = \sup_{\theta\in\Theta} \sup_{\eta\sim\mathcal{H}(K)} \mathsf{P}\left\{ |\hat{X} - X| \geqslant h \right\}. \tag{21}$$

Замечание 2. Утверждение теоремы 3 для случая $\mathcal{H} = \mathcal{P}$ фактически содержится в теореме 7.13.1 из [4].

Замечание 3. Если вместо $\pi_h^{\mathcal{V}}$ взять границу Высочанского–Петунина $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}}$, то все утверждения теоремы 3 остаются в силе для класса унимодальных распределений $\mathcal{V}(K)$, кроме равенства (21).

Замечание 4. Теоремы 1–3 допускают обобщение на бесконечномерный случай, когда Θ образует ограниченное подмножество некоторого нормированного пространства T, $\langle a, \cdot\rangle$ определяет ограниченный линейный функционал на T, а B является ограниченным линейным оператором из T в $\mathbb{R}^n$. В этом случае в формулировках теорем все максимумы по множеству Θ необходимо заменить на супремумы.

Геометрическая иллюстрация способа решения, представленного в теореме 3, описана в следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда множество неизвестных параметров представляет собой эллипсоид

$$\Theta = \Big\{\theta \in \mathbb{R}^p \colon \langle \Sigma\theta, \theta\rangle \leqslant 1\Big\}, \tag{22}$$

где Σ – положительно определенная матрица размера $p \times p$.

В этом случае минимаксная задача (19) может быть решена непосредственно. Для этого заметим, что имеет место равенство

$$\max_{\theta\in\Theta} \langle u, \theta\rangle^2 = \langle \Sigma^{-1}u, u\rangle. \tag{23}$$

Отсюда следует, что задача (19) принимает вид

$$\gamma_\lambda = \min_{f\in\mathbb{R}^n} \Big\{\lambda\langle Kf, f\rangle + \Big\langle \Sigma^{-1}(B^*f - a), B^*f - a\Big\rangle\Big\}.$$

Тогда ее решением будет

$$f_\lambda = K^{-1}B(D + \lambda\Sigma)^{-1}a, \qquad \gamma_\lambda = \lambda\left\langle (D+\lambda\Sigma)^{-1}a, a\right\rangle, \tag{24}$$

где вектор f_λ известен как оцениватель Кукса–Ольмана.

Укажем выражения для дисперсии и квадрата смещения с помощью (20) и (23):

$$d_\lambda = \left\langle (D+\lambda\Sigma)^{-1}D(D+\lambda\Sigma)^{-1}a, a\right\rangle,$$
$$\rho_\lambda = \lambda^2\left\langle (D+\lambda\Sigma)^{-1}\Sigma(D+\lambda\Sigma)^{-1}a, a\right\rangle.$$

В специальном случае, когда a является собственным вектором матрицы $D\Sigma^{-1}$, данные выражения можно упростить:

$$d_\lambda = d_0\big(1 + \lambda d_0/R^2\big)^{-2}, \quad \rho_\lambda = R^2\big(1 + R^2/(\lambda d_0)\big)^{-2}.$$

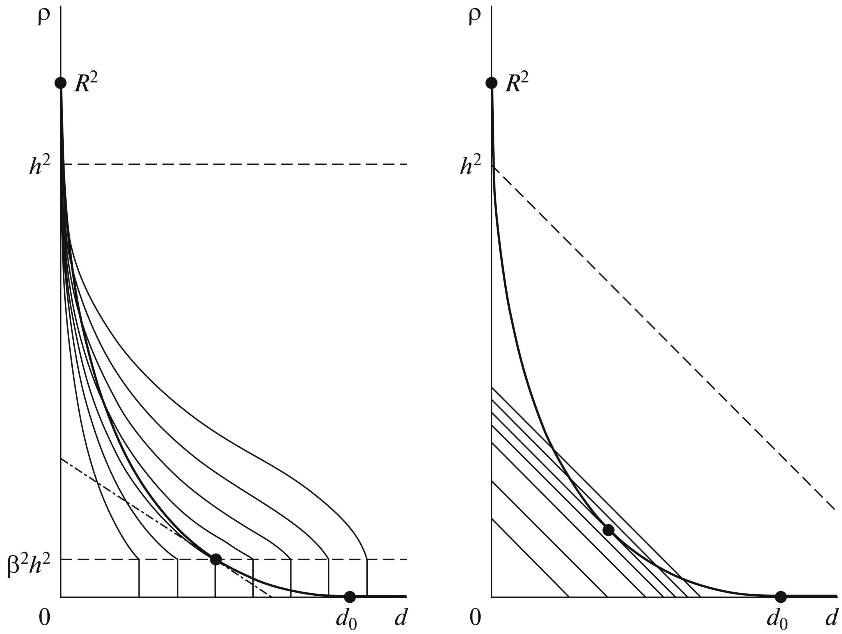

Рис. 2. Граница области Q с линиями уровня двух вероятностных границ: $\pi_h^{\mathcal{U}}(d,\rho)$ (слева) и $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}}(d,\rho)$ (справа).

Отсюда получаем явное уравнение кривой, определяющей левую нижнюю часть границы области Q:

$$\rho = R^2\bigl(1 - \sqrt{d/d_0}\bigr)^2, \quad 0 \leqslant d \leqslant d_0.$$

Данная кривая выходит при $\lambda = 0$ из нижней точки $(d_0, 0)$, соответствующей несмещенной оценке с наименьшей дисперсией $d_0 = \langle D^{-1}a, a\rangle$, и заканчивается при $\lambda \to \infty$ в верхней точке с координатами $(0, R^2)$, где $R = \langle \Sigma^{-1}a, a\rangle^{1/2}$ — радиус интервала возможных значений оцениваемой величины $X = \langle a, \theta\rangle$. При этом касательная к границе в точке $(d_0, 0)$ будет горизонтальна, а в точке $(0, R^2)$ — вертикальна.

Геометрическая иллюстрация этих фактов приведена на рис. 2. На обоих графиках сплошной жирной кривой показана граница области Q в переменных d, ρ, а тонкими сплошными — линии уровня двух вероятностных границ. Кроме того, на каждом графике отмечены три точки, две из которых $(d_0, 0)$ и $(0, R^2)$ лежат на координатных осях, а третья представляет собой точку минимума $(\hat{d}, \hat{\rho})$ соответствующей вероятностной границы $\pi_h^{\mathcal{U}}$ или $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}}$. Касательная к границе области Q в точке минимума $\pi_h^{\mathcal{U}}$ изображена штрихпунктиром, а для вероятностной границы $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}}$ касательная совпадает с линией уровня.

Важно отметить, что для оценки, минимаксной по вероятностному критерию на классе симметричных унимодальных распределений $\mathcal{U}$, максимальное смещение не может быть меньше 29% порога ошибки h. Это следует из того, что ниже прямой $\rho = \beta^2 h^2$, где $\beta = 1 - 1/\sqrt{2} \approx 0{,}29$, линии уровня вероятностной границы $\pi_h^{\mathcal{U}}$ представляют собой вертикальные отрезки (см. левый график рис. 2).

Для оценки, которая определяется из условия минимума границы на классе $\mathcal{V}$, оптимальные значения дисперсии $\hat{d}$ и квадрата смещения $\hat{\rho}$ лежат на прямой $\rho + d = \mathrm{const}$, поэтому касательная в точке $(\hat{d}, \hat{\rho})$ будет иметь коэффициент наклона $\lambda = 1$. В силу теоремы 2 это означает, что искомая оценка будет идентична с.к. минимаксной оценке.

Для визуального сравнения вероятностных границ были взяты несколько уровней вероятности ошибки, составляющих арифметическую прогрессию $\alpha_1 < \ldots < \alpha_7$, где $\pi_h^{\mathcal{U}} = \alpha_3$ и $\overline{\pi}_h^{\mathcal{V}} = \alpha_5$ – оптимальные значения (на рис. 2 этим уровням соответствуют третья и пятая линии, если считать слева направо).

5. Оценивание терминального положения маневрирующей цели

Данный раздел посвящен нахождению характеристик оценок, минимаксных по вероятностному критерию в задаче определения движения маневрирующей цели.

Движение цели описывается дважды непрерывно дифференцируемой функцией $x(t) \in \mathbb{R}$, которая определяет положение цели в момент $t \in [0, T]$. Для начального положения $x(0)$ и начальной скорости $\dot{x}(0)$ известны диапазоны

$$|x(0) - x_0| \leqslant \delta_x, \quad |\dot{x}(0) - v_0| \leqslant \delta_v,$$

а ускорение цели подчинено ограничению

$$|\ddot{x}(t)| \leqslant \delta_w. \tag{25}$$

Предположим, что имеются измерения $Y_1, \ldots, Y_n$, проведенные в заданные моменты времени $0 < t_1 < \ldots < t_n < T$:

$$Y_k = x(t_k) + \eta_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

с центрированными некоррелированными ошибками одинаковой дисперсии σ^2.

Допустим, что оцениванию подлежит терминальное положение цели $X = x(T)$, а критерием качества является минимум вероятности ошибки $\mathsf{P}\{|\widetilde{X} - X| \geqslant h\}$ с учетом того, что помехи имеют неопределенное совместное распределение (здесь h — заданный порог ошибки, а $\widetilde{X}$ — искомая оценка).

Подобная задача со с.к. критерием качества и непрерывным процессом наблюдений рассматривалась в [23].

С учетом замечания 4 описанную модель можно записать в виде (1), если:

— обозначить вектор наблюдения, вектор помех и оцениваемую величину как

$$Y = \mathrm{col}\,[Y_1, \ldots, Y_n], \ \eta = \mathrm{col}\,[\eta_1, \ldots, \eta_n] \in \mathbb{R}^n, \quad X = x(T) \in \mathbb{R};$$

— определить вектор параметров

$$\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2), \quad \theta_0 = x(0), \quad \theta_1 = \dot{x}(0), \quad \theta_2(t) = \ddot{x}(t)$$

как элемент пространства $\mathrm{T} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathrm{C}[0, T]$;

— задать множество неопределенности

$$\Theta = [x_0 - \delta_x, x_0 + \delta_x] \times [v_0 - \delta_v, v_0 + \delta_v] \times \mathrm{B},$$

где B — шар радиуса δ_w в пространстве непрерывных функций $\mathrm{C}[0, T]$;

— ввести оператор $B \colon \mathrm{T} \to \mathbb{R}^n$ и функционал $\langle a, \cdot \rangle$ на T

$$(B\theta)_k = \theta_0 + \theta_1 t_k + \int\limits_0^T (t_k - \tau)_+ \theta_2(\tau)\, d\tau, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\langle a, \theta \rangle = \theta_0 + \theta_1 T + \int\limits_0^T (T - \tau)\theta_2(\tau)\, d\tau,$$

где $(\cdot)_+ = \max\{\cdot, 0\}$.

В силу симметричности множества Θ относительно точки $\theta^o = (x_0, v_0, 0)$ оценку можно искать в виде

$$\widetilde{X} = x_0 + v_0 T + \sum_{k=1}^{n} f_k(Y_k - (x_0 + v_0 t_k)), \quad f = \mathrm{col}\,[f_1, \ldots, f_n]. \tag{26}$$

Запишем выражение для смещения, используя сопряженный оператор B^*:

$$\mathsf{M}\{\widetilde{X} - X\} = \langle B^* f - a, \theta - \theta^o \rangle =$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_k - 1 \right\} (\theta_0 - x_0) + \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_k t_k - T \right\} (\theta_1 - v_0) +$$

$$+ \int\limits_0^T \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_k (t_k - \tau)_+ - (T - \tau) \right\} \theta_2(\tau)\, d\tau.$$

Если к данному выражению применить равенство

$$\sup_{\phi \in \mathrm{B}} \int\limits_0^T \phi(\tau)\psi(\tau)\, d\tau = \delta_w \int\limits_0^T |\psi(\tau)|\, d\tau,$$

то получим точную верхнюю грань смещения

$$\overline{r}(f) = \sup_{\theta \in \Theta} \mathsf{M}\{\widetilde{X} - X\} = \tag{27}$$

$$= \delta_x \left| \sum_{k=1}^{n} f_k - 1 \right| + \delta_v \left| \sum_{k=1}^{n} f_k t_k - T \right| + \delta_w \int\limits_0^T \left| \sum_{k=1}^{n} f_k (t_k - \tau)_+ - (T - \tau) \right| d\tau.$$

Теперь задача минимизации гарантированного значения смещения при ограничении на дисперсию (18) принимает вид

$$\rho(s^2) = \min_{f \in \mathbb{R}^n} \left\{ \overline{r}^2(f) \colon \sigma^2 \langle f, f \rangle \leqslant s^2 \right\}. \tag{28}$$

Если разбить $[0, T]$ на интервалы между наблюдениями, включая точки $t_0 = 0$ и $t_{n+1} = T$, то получится представление

$$\overline{r}(f) = \delta_x |g_1| + \delta_v |u_1| + \delta_w \sum_{l=1}^{n} \int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} |u_l - g_l \tau| \, d\tau + \delta_w \frac{(T - t_n)^2}{2},$$

$$g_l = \sum_{k=l}^{n} f_k - 1, \qquad u_l = \sum_{k=l}^{n} f_k t_k - T.$$

Можно проверить, что имеет место равенство

$$\int\limits_{t_{l-1}}^{t_l} |u_l - g_l \tau| \, d\tau = \frac{t_l - t_{l-1}}{2} \mu(p_l, q_l), \quad p_l = u_l - g_l t_l, \quad q_l = u_l - g_l t_{l-1},$$

$$\mu(p, q) = 2 \int\limits_0^1 |(1 - t)p + tq| \, dt = \begin{cases} |p + q|, & pq \geqslant 0, \\ (p^2 + q^2)/|p - q|, & pq \leqslant 0. \end{cases}$$

Для аппроксимации $r(f)$ кусочно-линейными функциями можно использовать приближение, основанное на формуле трапеций:

$$\overline{r}(f) \approx \delta_x \left| \sum_{k=1}^{n} f_k - 1 \right| + \\ + \left(\delta_v + \frac{\delta_w \Delta}{2} \right) \left| \sum_{k=1}^{n} f_k t_k - T \right| + \delta_w \Delta \sum_{m=1}^{M-1} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k (t_k - \tau_m)_+ - (T - \tau_m) \right|,$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_M = T$ — равномерная сетка на $[0, T]$ с шагом $\Delta < t_1$. После этого преобразования задача (28) приспособлена для решения в пакете `cvx`, реализованном на платформе `MATLAB` [24].

Необходимо отметить, что применение пакета `cvx` было связано с некоторыми ограничениями: при количестве наблюдений $n \geqslant 10$ решатель не мог определить значимого направления минимизации. Частично это объясняется структурой решения задачи гарантирующего оценивания с непрерывным процессом наблюдений и равномерно ограниченными возмущениями. В таких задачах, зачастую, хватает небольшого числа измерений для достаточно точной аппроксимации минимаксной оценки [23]. Кроме того, для решения задачи (28) более приспособлены специальные методы ℓ_1-оптимизации [25].

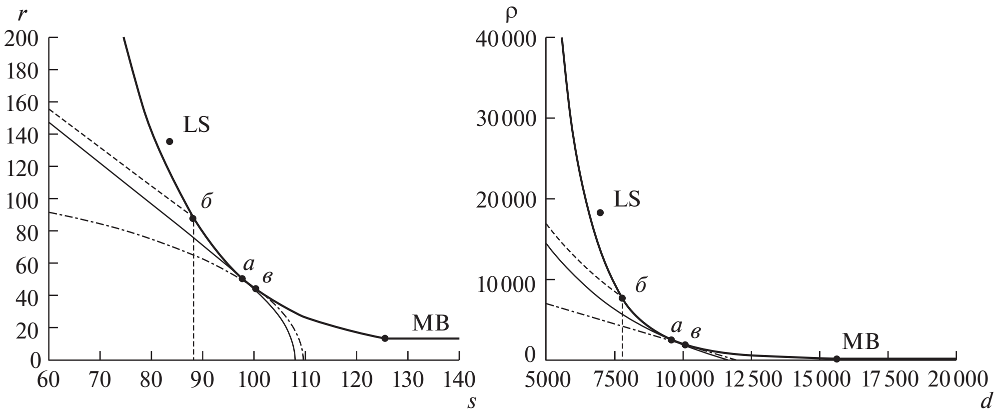

Рис. 3. Граница области Q в переменных (s, r) (слева) и в переменных (d, ρ) (справа), где s – с.к.о., r – смещение (м) и $d = s^2$, $\rho = r^2$ (м^2).

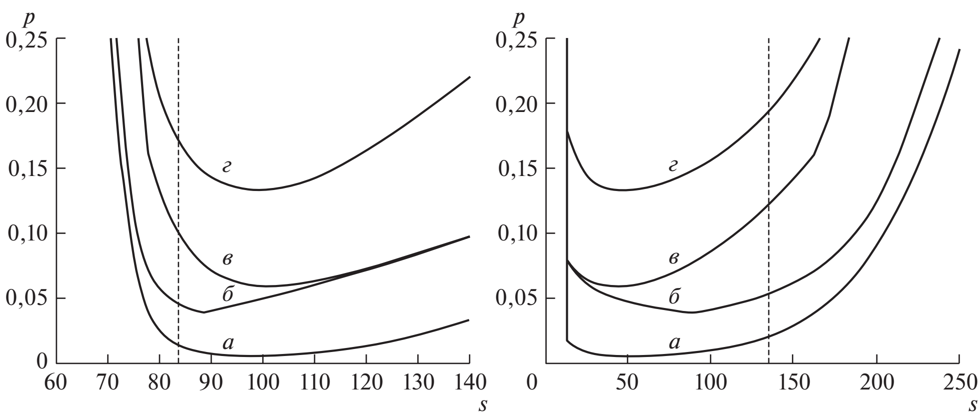

Рис. 4. Зависимость вероятности ошибки p от с.к.о. s (м) (слева) и смещения r (м) (справа) на границе области Q для четырех гипотез *а*–*г*.

Для расчетов были взяты следующие значения параметров:

$$n = 5, \quad \delta_x = 50\,\text{м}, \quad \delta_v = 10\,\text{м/с}, \quad \delta_w = 5\,\text{м/с}^2,$$
$$\sigma = 100\,\text{м}, \quad h = 300\,\text{м}, \quad t_1 = 2\,\text{с}, \quad t_2 = 6{,}25\,\text{с},$$
$$t_3 = 10{,}5\,\text{с}, \quad t_4 = 14{,}75\,\text{с}, \quad t_5 = 19\,\text{с}, \quad T = 20\,\text{с}.$$

Относительно распределения вектора помех $\eta = \operatorname{col}[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ введены четыре гипотезы:

а) $\eta \sim \mathcal{N}(0, K)$, б) $\eta \sim \mathcal{U}(K)$, в) $\eta \sim \mathcal{V}(K)$, г) $\eta \sim \mathcal{P}(K)$, где $K = \sigma^2 I_n$.

На рис. 3 изображена граница области Q, точки которой представляют собой пары (s^2, r^2), где $r = \sqrt{\rho(s^2)}$ — минимум гарантированного значения смещения (28) при ограничении на дисперсию оценок s^2. Точка LS соответствует оценке $\widetilde{X}_{\text{LS}}$, полученной по методу наименьших квадратов (МНК) в упрощенной модели без учета ускорения цели: $x(t) = \theta_0 + \theta_1 t$. Как видно из рисунка, Значения вероятности ошибки на нескольких оценках

Гипотеза $\mathcal{H}$	$\hat{s}$ (м)	$\hat{r}$ (м)	$\pi_h^{\mathcal{H}}(\hat{s}^2, \hat{r}^2)$	$\pi_h^{\mathcal{H}}(s^2_{\text{LS}}, r^2_{\text{LS}})$	$\pi_h^{\mathcal{H}}(s^2_{\text{MB}}, r^2_{\text{MB}})$
а) $\mathcal{N}(0, K)$	97,87	50,20	0,005520	0,013810	0,021324
б) $\mathcal{U}(K)$	88,66	85,63	0,038821	0,045803	0,083008
в) $\mathcal{V}(K)$	100,37	43,95	0,059290	0,100724	0,083859
г) $\mathcal{P}(K)$	98,70	47,99	0,132998	0,170892	0,188684

МНК-оценка является сильно смещенной: ее смещение в наихудшем случае будет $r_{\text{LS}} \approx 135$ м. Это объясняется тем, что в исходной модели оцениваемая траектория $x(t)$ зависит от элемента бесконечномерного пространства $\theta_2 = \ddot{x}(t)$, поэтому несмещенных оценок по конечному числу наблюдений не существует. Тем не менее в силу условия (25) смещения оценок будут ограничены. Можно выбрать оценку $\widetilde{X}_{\text{MB}}$ с минимально возможной верхней гранью смещения $r_{\text{MB}} \approx 13$ м. Это значительно меньше, чем в случае МНК-оценки, хотя с.к.о. оказывается больше: $s_{\text{MB}} \approx 125$ м и $s_{\text{LS}} \approx 84$ м.

На рис. 4 изображены графики гарантированных значений вероятности ошибки $\mathsf{P}\{|\widetilde{X} - X| \geqslant h\}$ на оценках (26), (28) при различном выборе дисперсии s^2. Штриховая линия соответствует характеристикам МНК-оценки.

В таблице приведены значения вероятности ошибки на трех оценках: минимаксной, МНК и оценке с минимальным смещением. Согласно теореме 1 характеристики минимаксной оценки $\hat{s}^2, \hat{r}^2$ образуют точку минимума вероятностной границы $\pi_h^{\mathcal{H}}$ на границе области Q. В зависимости от выбора класса $\mathcal{H}$ эти характеристики будут разными, что видно из рис. 4 и таблицы.

6. Заключение

В работе описан геометрический способ решения задачи минимаксного оценивания по вероятностному критерию в модели линейной регрессии с ограниченными параметрами и симметричными унимодальными помехами. Проведено сравнение минимаксных оценок линейной комбинации неизвестных параметров для нескольких классов совместных распределений помех. Способ описания априорной информации о неопределенном многомерном распределении в виде набора условий на симметричность, унимодальность, математическое ожидание и ковариационную матрицу приводит к робастным статистическим решениям, которые оказываются менее консервативными, чем известные ранее.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим линейную оценку $\widetilde{X}$, определяемую вектором коэффициентов $f \in \mathbb{R}^n$ и сдвигом $c \in \mathbb{R}$ согласно (5).

Если оцениваемая величина X и вектор наблюдений Y удовлетворяют уравнениям модели регрессии (1) с вектором параметров $\theta \in \Theta$ и вектором помех $\eta \sim \mathcal{H}(K)$, то ошибка $\widetilde{X} - X$ допускает представление $\varepsilon + r$, где $\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)$, а d, r удовлетворяют соотношениям (9). Следовательно, в (11) имеет место знак неравенства «$\leqslant$».

Чтобы доказать обратное неравенство, достаточно для заданного вектора параметров $\theta \in \Theta$ и случайной величины $\varepsilon \sim \mathcal{H}(d)$, где d и r имеют вид (9), подобрать случайный вектор $\eta \sim \mathcal{H}(K)$, удовлетворяющий равенству $\varepsilon + r = \widetilde{X} - X$ с вероятностью 1. В силу (1) и (9) требуемое равенство равносильно следующему:

$$\varepsilon = \langle f, \eta \rangle.$$

Действуя так же, как в [26], определим искомый вектор по правилу

$$\eta = K^{1/2}\Big\{\varepsilon |g|^{-2} g + P\zeta\Big\},$$

где $P = I_n - |g|^{-2} g g^*$, $g = K^{1/2} f$, I_n — единичная матрица размера $n \times n$, а ζ — стандартный n-мерный гауссовский вектор, не зависящий от случайной величины ε. Проверка условий $\varepsilon = \langle f, \eta \rangle$, $\mathsf{M}\eta = 0$ и $\mathsf{cov}\{\eta, \eta\} = K$ идентична выкладкам из [26].

В случае $\mathcal{H} = \mathcal{P}$ доказательство заканчивается.

При $\mathcal{H} = \mathcal{U}$ остается проверить, что распределение вектора η симметрично и линейно унимодально. Согласно [12] это условие означает, что при любом выборе вектора коэффициентов $b \in \mathbb{R}^n$ распределение линейной комбинации

$$\langle b, \eta \rangle = \varepsilon |g|^{-2} \langle b, Tg \rangle + \langle b, TP\zeta \rangle$$

является симметричным унимодальным. А этот факт следует из унимодальности свертки двух симметричных унимодальных одномерных распределений, каковыми являются распределения обоих слагаемых в силу $\varepsilon \sim \mathcal{U}(d)$ и $\zeta \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ (см. теорему 1.6 из того же источника).

Доказательство теоремы 2. Выпуклость области Q непосредственно следует из выпуклости по $(f, c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ двух функций

$$\langle Kf, f \rangle \quad \text{и} \qquad \max_{\theta \in \Theta} (c + \langle B^* f - a, \theta \rangle)^2.$$

Поэтому функция $\rho(d)$ как нижняя огибающая выпуклого множества Q тоже будет выпуклой (см. теорему I.5.3 из [27]). А в силу того, что она всюду конечна, она будет непрерывной.

Второе утверждение следует из определения опорной прямой для выпуклого множества. При фиксированном $\lambda \geqslant 0$ прямая $\rho + \lambda d = \gamma_\lambda$ является опорной к области Q в точке $(d_\lambda, \rho_\lambda)$, если линейная форма $\rho + \lambda d$ достигает на Q минимума (или максимума) в указанной точке. Случай максимума можно отбросить, поскольку указанная линейная форма на области Q не ограничена сверху. Таким образом, получаем требуемые факты (19) и (20).

Доказательство теоремы 3. Из теоремы 1 в силу монотонной зависимости $\pi_h^{\mathcal{H}}(d, \rho)$ по ρ следует равенство

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\eta \sim \mathcal{H}(K)} \mathsf{P}\Big\{|\widetilde{X} - X| \geqslant h\Big\} = \pi_h^{\mathcal{H}}(d, \rho), \tag{1}$$

где $d = \langle Kf, f \rangle$ и $\rho = \sup_{\theta \in \Theta}\big(c + \langle B^* f - a, \theta \rangle\big)^2$.

Пусть $(\hat{d},\hat{\rho})$ — точка минимума $\pi_h^{\mathcal{H}}(d,\rho)$ по $(d,\rho)\in Q$, а $(\hat{f},\hat{c})$ — решение минимаксной задачи (19) с параметром λ, равным коэффициенту опорной прямой к области Q в точке $(\hat{d},\hat{\rho})$. Тогда согласно теореме 2 будут иметь место равенства

$$\hat{d}=\langle K\hat{f},\hat{f}\rangle, \qquad \hat{\rho}=\max_{\theta\in\Theta}\Big(\hat{c}+\langle B^*\hat{f}-a,\theta\rangle\Big)^2.$$

Поэтому на оценке $\hat{X}=\langle\hat{f},Y\rangle+\hat{c}$ реализуется равенство

$$\sup_{\theta\in\Theta}\sup_{\eta\sim\mathcal{H}(K)}\mathsf{P}\Big\{|\hat{X}-X|\geqslant h\Big\}=\pi_h^{\mathcal{H}}(\hat{d},\hat{\rho}). \tag{2}$$

Теперь в силу $\pi_h^{\mathcal{H}}(\hat{d},\hat{\rho})\leqslant\pi_h^{\mathcal{H}}(d,\rho)$ получаем, что левая часть (2) не превосходит левую часть (1). Следовательно, $\hat{X}$ — минимаксная оценка по вероятностному критерию на классе $\mathcal{H}(K)$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bahadur R.R.* On the Asymptotic Efficiency of Tests and Estimates // Sankhya: Indian J. Statist. 1960. V. 22. No. 3–4. P. 229–252.
2. *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1977.
3. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения). М.: Наука, 1974.
4. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
5. *Тимофеева Г.А.* Нелинейные доверительные множества для статистически неопределенных систем // АиТ. 2003. № 11. С. 84–95.

   Timofeeva G.A. Nonlinear Confidence Estimates for Statistically Uncertain Systems // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 11. P. 1724–1733.
6. *Медведева Н.В., Тимофеева Г.А.* Сравнение линейных и нелинейных методов доверительного оценивания для статистически неопределенных систем // АиТ. 2007. № 4. С. 51–60.

   Medvedeva N.V., Timofeeva G.A. Comparison of Linear and Nonlinear Methods of Confidence Estimation for Statistically Uncertain Systems // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 4. P. 619–627.
7. *Ананьев Б.И.* Многошаговые стохастические включения специального вида и их мультиоценки // АиТ. 2007. № 11. С. 3–11.

   Anan'ev B.I. Multistep Specific Stochastic Inclusions and Their Multiestimates // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 11. P. 1891–1899.
8. *Панков А.Р., Семенихин К.В.* О минимаксном оценивании по вероятностному критерию // АиТ. 2007. № 3. С. 66–82.

   Pankov A.R., Semenikhin K.V. Minimax Estimation by Probabilistic Criterion // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 430–445.
9. *Delage E., Ye Y.* Distributionally Robust Optimization under Moment Uncertainty with Application to Data-Driven Problems // Oper. Res. 2010. V. 58. P. 595–612.

10. *Коган М.М.* Робастное оценивание и фильтрация в неопределенных линейных системах при неизвестных ковариациях // АиТ. 2015. № 10. С. 50–66.

Kogan M.M. Robust Estimation and Filtering in Uncertain Linear Systems under Unknown Covariations // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 10. P. 1751–1764.

11. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.

12. *Dharmadhikari S., Joag-dev K.* Unimodality, Convexity, and Applications. San Diego: Academic, 1988.

13. *Barmish B.R., Lagoa C.M.* The Uniform Distribution: A Rigorous Justification for Its Use in Robustness Analysis // Math. Control Signal. Syst. 1997. V. 10. P. 203–222.

14. *Кибзун А.И.* О наихудшем распределении в задачах стохастической оптимизации с функцией вероятности // АиТ. 1998. № 11. С. 104–116.

Kibzun A.I. On the Worst-Case Distribution in Stochastic Optimization Problems with Probability Function // Autom. Remote Control. 1998. V. 59. No. 11. P. 1587–1597.

15. *Кан Ю.С.* Об обосновании принципа равномерности в задаче оптимизации вероятностного показателя качества // АиТ. 2000. № 1. С. 54–70.

Kan Yu.S. On the Justification of the Uniformity Principle in the Optimization of a Probability Performance Index // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 1. P. 50–64.

16. *Van Parys B.P.G., Goulart P.J., Kuhn D.* Generalized Gauss Inequalities via Semidefinite Programming // Math. Program. 2016. V. 156. P. 271–302.

17. *Граничин О.Н.* Неасимптотическое доверительное множество для параметров линейного объекта управления при произвольном внешнем возмущении // АиТ. 2012. № 1. С. 24–35.

Granichin O.N. The Nonasymptotic Confidence Set for Parameters of a Linear Control Object under an Arbitrary External Disturbance // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 20–30.

18. *Weyer E., Campi M.C., Csaji B.C.* Asymptotic Properties of SPS Confidence Regions // Automatica. 2017. V. 82. P. 287–294.

19. *Семенихин К.В.* Двусторонняя вероятностная граница для симметричной унимодальной случайной величины // АиТ. 2019. № 3. С. 103–122.

Semenikhin K.V. Two-Sided Probability Bound for a Symmetric Unimodal Random Variable // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 3. P. 474–489.

20. *Высочанский Д.Ф., Петунин Ю.И.* Об одном неравенстве Гаусса для одновершинных распределений // Теория вероятн. и ее примен. 1982. Т. 27. № 2. С. 339–341.

Vysochanskii D.F., Petunin Yu.I. On a Gauss Inequality for Unimodal Distributions // Theory Probab. Appl. 1983. V. 27. No. 2. P. 359–361.

21. *Pukelsheim F.* The Three Sigma Rule // Amer. Statist. 1994. V. 48. P. 88–91.

22. *Соловьёв В.Н.* Двойственные экстремальные задачи и их применение к задачам минимаксного оценивания // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. № 4. С. 49–86.

Solov'ev V.N. Dual Extremal Problems and Their Applications to Minimax Estimation Problems // Russian Math. Surveys. 1997. V. 52. No. 4. P. 685–720.

23. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998.

24. *Grant M.C., Boyd S.P.* The CVX Users' Guide. Release 2.1. CVX Research, Inc. 2018. [Online]. Available: `http://cvxr.com/cvx`.

25. *Акимов П.А., Матасов А.И.* Итерационный алгоритм для ℓ_1-аппроксимации в динамических задачах оценивания // АиТ. 2015. № 5. С. 7–26.

Akimov P.A., Matasov A.I. An Iterative Algorithm for ℓ_1-Norm Approximation in Dynamic Estimation Problems // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 5. P. 733–748.

26. *Архипов А.С., Семенихин К.В.* Анализ надежности линейных несмещенных оценок при наличии помех с неизвестным унимодальным распределением // Изв. РАН. Теория и сист. управления. 2019. № 5. С. 8–17.

Arkhipov A.S., Semenikhin K.V. Confidence Analysis of Linear Unbiased Estimates under Uncertain Unimodal Noise Distributions // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2019. V. 58. No. 5. P. 674–683.

27. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 02.12.2019

После доработки 23.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020