© 2020 г. О.В. ЗВЕРЕВ, канд. наук по прикладной математике НИУ ВШЭ (zv-oleg@yandex.ru)
(Центральный экономико-математический институт РАН, Москва),
В.М. ХАМЕТОВ, д-р физ.-мат. наук (khametovvm@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)),
Е.А. ШЕЛЕМЕХ (letis@mail.ru)
(Центральный экономико-математический институт РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРАВИЛО ОСТАНОВКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ СО СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША[1]

Решены две задачи об оптимальной остановке геометрического случайного блуждания со степенной функцией выигрыша (с конечным и бесконечным горизонтом). Для этих задач установлены явный вид урезанной цены и правила оптимальной остановки; доказано, что оптимальные правила остановки являются пороговыми нерандомизированными и описывают соответствующую свободную границу, явный вид которой представлен.

Ключевые слова: геометрическое случайное блуждание, момент остановки, область остановки, область продолжения наблюдений, производящая функция.

DOI: 10.31857/S000523102007003X

1. Введение

Теория оптимальных правил остановки является одним из разделов теории оптимального стохастического управления и посвящена одноразовому выбору марковского момента, максимизирующего ожидаемое значение выигрыша наблюдателя в некоторый конечный случайный момент времени. Проблема оптимальной остановки случайных последовательностей возникает во многих областях науки и техники. Так, в теории и практике приема с обратной связью дискретной информации часто применяются процедуры последовательного обнаружения, сводящиеся к решению задачи об оптимальной остановке [1]. В системах синхронизации [1], как правило, требуется как можно быстрее обнаружить срыв или сбой в работе; эта проблема с математической точки зрения сводится к задаче о разладке [2]. Решение последней состоит в построении оптимального правила остановки. В экономике проблема оптимальной остановки возникает, например: 1) при решении задач расчета американских опционов, поскольку владелец опциона вправе выбрать

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-010-00666).

момент предъявления контракта к исполнению (обычно выбирается момент, в который доход владельца максимален) [3], 2) в задачах стимулирования инвестиционных проектов [4], 3) в последовательном планировании экспериментов [5].

Известно [2, 3, 6], что задача об оптимальной остановке случайной последовательности относится к числу труднорешаемых. Общей теории оптимальных правил остановки случайных последовательностей посвящено большое количество работ. По-видимому впервые теория оптимальных правил остановки была сформулирована в [7], в ней также обосновано применение этой теории к задачам статистического последовательного анализа. Достаточно полное изложение актуального состояния теории оптимальных правил остановки можно найти в [3, 8, 9], для случая марковских наблюдаемых последовательностей — в [2]. Вместе с тем, на настоящий момент известно очень мало примеров явного аналитического решения задачи оптимальной остановки. Наиболее полный обзор известных примеров можно найти в [8].

В этой статье получены новые примеры точного решения задач об оптимальной остановке, а именно аналитически решены две задачи об оптимальной остановке геометрического случайного блуждания со степенной функцией выигрыша наблюдателя с конечным и с бесконечным горизонтом. Степенная функция выигрыша имеет широкое применение в приложениях: в экономике (стандартная функции полезности с гиперболической абсолютной несклонностью к риску, стандартная функция спроса с постоянной эластичностью), в технике и других областях, где возникает задача о разладке с распределением Парето наблюдаемой последовательности. Таким образом, полученные примеры интересны с точки зрения большого количества прикладных задач.

Не найдено работ, посвященных задачам оптимальной остановки в данной постановке. Вместе с тем к задаче этой статьи с бесконечным горизонтом применимы результаты статей [10–12], в которых для случая, когда наблюдается марковский процесс, функция выигрыша непрерывна и монотонна, доказано, что область продолжения наблюдений отделена от внутренности области остановки единственной точкой (вид которой не предъявляется). В статье этот результат не использовался, но он совпадает с полученным здесь; также приведена формула для этой точки в случае степенной функции выигрыша.

Приведем еще работы, в которых исследовались задачи, наиболее близкие к рассматриваемой в статье. В [13] решена задача об оптимальной остановке случайного одномерного блуждания, когда: 1) независимые одинаково распределенные случайные величины, порождающие это блуждание, имеют отрицательное среднее значение, 2) функция выигрыша представляет собой целую положительную степень стандартного опциона call, 3) горизонт бесконечен, 4) оптимальный момент остановки единственный. Доказано, что в описанной ситуации момент первого пересечения уровня, который совпадает с наибольшим значением полинома Аппеля, является оптимальным моментом остановки. В [3] также рассматривалась задача оптимальной остановки с конечным и бесконечным горизонтом, где наблюдается одномерное случайное блуждание и функция выигрыша, соответствующая стандартному опциону call. В случае конечного горизонта предъявлено рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют урезанные цены задачи; доказано, что для каждого момента времени область остановки отделена от области наблюдения одной точкой, соответствующая последовательность точек монотонно убывает по времени, но вид точек не найден. Для случая бесконечного горизонта установлен вид зависимости цены задачи от начального состояния наблюдаемой последовательности. Таким образом, даже в наиболее близких по постановке задачах на настоящий момент не удалось получить явных формул для решения.

Статья имеет следующую структуру. Каждой из задач посвящен отдельный раздел: для задачи с конечным горизонтом — раздел 2, а с бесконечным — раздел 3. В разделе 2 сначала приведены необходимые сведения из теории оптимальных правил остановки с конечным горизонтом (подраздел 2.1), затем — постановка задачи и известные свойства ее решения (подраздел 2.2) и основные результаты (раздел 2.3) — теоремы 1 и 2, в которых установлены явный вид урезанных цен и областей остановки (продолжения) наблюдения соответственно. Раздел 3 включает постановку задачи и необходимые известные результаты теории оптимальных правил остановки с бесконечным горизонтом (подраздел 3.1) и раздел 3.2, где приведен основной результат — теорема 3, дающая явный вид цены оптимальной остановки и областей остановки (продолжения) наблюдения. Доказательства всех утверждений вынесены в Приложения.

2. Задача с конечным горизонтом

2.1. Необходимые сведения из теории оптимальных правил остановки

Подробное изложение приведенных здесь результатов и их доказательства можно найти в [3].

Пусть на стохастическом базисе $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in N_0}, \mathsf{P}\right)$, где $N_0 \triangleq \{0, \ldots, N\}$, $N < \infty$ — горизонт, задана случайная последовательность $(S_n, \mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{F}_n \triangleq \sigma\{S_0, \ldots, S_n\}$.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathsf{E}\xi$ — математическое ожидание (интеграл Лебега относительно вероятностной меры P) $\mathcal{F}$-измеримой случайной величины ξ, а $\mathsf{E}(\xi|\,\mathcal{F}_n)$ — ее условное математическое ожидание относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n$ и меры P, $n \in N_0$. Для произвольного множества $A \in \mathcal{F}$ определим индикатор

$$1_{\{A\}}(\omega) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{если } \omega \notin A. \end{cases}$$

Положим, что $(f_n, \mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$ — согласованное семейство случайных величин, элементы которого f_n будем интерпретировать как значения функции выигрыша в момент времени $n \in N_0$. Предполагается, что выполнено следующее.

Условие (f): $\mathsf{E}\max\limits_{n\in N_0}|f_n| < \infty$.

Пусть τ — момент остановки относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$.

Тогда

$$f_\tau(\omega) \triangleq \sum_{i=0}^{N} f_i 1_{\{\tau=i\}}(\omega) \quad \left(S_\tau(\omega) \triangleq \sum_{i=0}^{N} S_i 1_{\{\tau=i\}}(\omega)\right).$$

Обозначим через T_n^N, $n \in N_0$, множество моментов остановки τ таких, что $n \leqslant \tau(\omega) \leqslant N$, $\omega \in \Omega$. Условие (f) гарантирует, что для любого $\tau \in T_0^N$ определено $\mathsf{E}\,|f_\tau| < \infty$. Величина $\mathsf{E}f_\tau$ — это ожидаемое значение выигрыша в момент τ.

Задача оптимальной остановки:

$$\mathsf{E}f_\tau \to \sup_{\tau \in T_0^N}. \tag{1}$$

Величина $\sup\limits_{\tau \in T_0^N} \mathsf{E}f_\tau$ есть цена задачи (1). Если существует такой $\tau^0 \in T_0^N$, что $\sup\limits_{\tau \in T_0^N} \mathsf{E}f_\tau = \mathsf{E}f_{\tau^0}$, то его называют оптимальным моментом остановки в задаче (1).

Выполнение условия (f) позволяет ввести последовательность

$$\left\{v_n^N, \mathcal{F}_n\right\}_{n \in N_0} : \begin{cases} v_n^N = \max\left[f_n, \mathsf{E}\left(v_{n+1}^N \middle| \mathcal{F}_n\right)\right], \\ v_n^N|_{n=N} = f_N. \end{cases} \tag{2}$$

По определению случайные величины v_n^N являются $\mathcal{F}_n$-измеримыми. Их называют урезанной ценой оптимальной остановки в момент n или огибающей Снелла. Известно, что $v_0^N = \sup\limits_{\tau \in T_0^N} \mathsf{E}f_\tau = \mathsf{E}f_{\tau^0}$, где

$$\tau^0 = \min\left\{n \in N_0 : v_n^N = f_n\right\}. \tag{3}$$

Таким образом, чтобы решить задачу (1), достаточно найти решение рекуррентного уравнения (2). Известно, что в общем случае она является трудно-решаемой.

Из (2) следует, что

$$v_n^N \geqslant f_n, \quad v_n^N \geqslant \mathsf{E}\Big(v_{n+1}^N \Big| \mathcal{F}_n\Big), \quad n \in N_0,$$

почти наверное относительно меры P (далее по тексту — P-п.н.) Из условия (f) и последнего неравенства следует, что $\left\{v_n^N, \mathcal{F}_n\right\}_{n \in N_0}$ — супермартингал относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in N_0}$ и вероятностной меры P. Отметим также, что из рекуррентного соотношения (2) следует, что для любого $n \in \{0, \dots, N-1\}$:

1) на множестве $\left\{\omega \in \Omega : f_n \geqslant \mathsf{E}(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\right\}$ имеет место равенство $v_n^N = f_n$ P-п.н.;

2) на множестве $\left\{\omega \in \Omega : f_n < \mathsf{E}(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\right\}$ — равенство $v_n^N = \mathsf{E}(v_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)$ P-п.н.

Таким образом, для любого $n \in \{0, \dots, N-1\}$ величина v_n^N допускает представление P-п.н.

$$v_n^N = f_n 1_{\left\{f_n \geqslant \mathsf{E}\left(v_{n+1}^N \middle| \mathcal{F}_n\right)\right\}} + \mathsf{E}\left(v_{n+1}^N \middle| \mathcal{F}_n\right) 1_{\left\{f_n < \mathsf{E}\left(v_{n+1}^N \middle| \mathcal{F}_n\right)\right\}}. \tag{4}$$

2.2. Постановка задачи с конечным горизонтом и некоторые известные свойства ее решения

Пусть $\{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n\in N_0}$ задана рекуррентным соотношением

$$(5) \qquad \begin{cases} S_{n+1} = S_n \lambda^{\rho_{n+1}}, \\ S_n|_{n=0} = S_0 > 0, \end{cases}$$

где $1 < \lambda < \infty$ — параметр, а $\{\rho_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин с заданной функцией распределения $F_\rho(x)$. Известно [6], что последовательность $\{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n\in N_0}$ является однородной марковской и описывает одномерное геометрическое случайное блуждание, причем P-п.н. $S_n > 0$, $n \in N_0$. Описанная последовательность $\{S_n\}_{n\geqslant 0}$ является строго марковской [6].

Замечание 1. Условие $\lambda > 1$ — техническое, оно будет использовано в доказательствах ниже. Вместе с тем это предположение не ограничивает общности рассматриваемой постановки: чтобы получить случай $0 < \lambda < 1$, достаточно вместо (5) рассмотреть последовательность

$$\left\{\tilde{S}_n, \mathcal{F}_n\right\}_{n\in N_0}: \quad \tilde{S}_{n+1} = \tilde{S}_n \lambda^{\theta_{n+1}}, \quad \tilde{S}_0 = S_0,$$

где $\theta_{n+1} = -\rho_{n+1}$, $n \in \{0, \dots, N-1\}$. В прикладных исследованиях интересны оба случая.

Будем решать задачу оптимальной остановки для дисконтированной степенной функции выигрыша:

$$(6) \qquad f_n(x) = \beta^n \left(A x^\sigma + B\right), \quad x > 0$$

с параметрами: $\beta \in (0, 1]$ — коэффициент дисконтирования [3], A, B, σ ($\sigma > 0$).

Замечание 2. Задачи оптимальной остановки с функцией выигрыша вида (6) встречаются в различных прикладных задачах. Так, при $A = \sigma$ функция (6) соответствует стандартной функции полезности с гиперболической абсолютной несклонностью к риску (HARA) [9]. В задачах микроэкономики в случаях, когда эластичность спроса по цене можно считать постоянной, спрос описывается степенной функцией [14]. Задача о разладке для наблюдаемых величин с распределением Парето также имеет степенную функцию выигрыша. Поскольку степенные функции применяются для описания явлений в самых разных областях, имеет смысл рассматривать задачу оптимальной остановки со степенной функцией наиболее общего вида (6).

Таким образом, рассматривается задача:

$$(7) \qquad \mathsf{E}\beta^\tau \left(A \left(S_\tau\right)^\sigma + B\right) \to \sup_{\tau\in T_0^N}.$$

Известно [2], что в случае строго марковской наблюдаемой последовательности $\{S_n, \mathcal{F}_n\}_{n\in N_0}$ и функции выигрыша, зависящей от значения аргумента только в текущий момент времени, урезанные цены v_n^N являются марковскими функциями, т.е. для любого $n \in N_0$ существует борелевская функция, действующая из $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^+$, которую будем обозначать через $v_n^N(x)$, такая что

$$v_n^N = v_n^N(x)\Big|_{x=S_n} = v_n^N(S_n) \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}$$

Кроме того, последовательность $\{v_n^N(x)\}_{n\in N_0}$ однородна по n, т.е. для любых $x \in \mathbb{R}^+$ и $k \in N_0$ существует борелевская функция, обозначаемая $v^k(x)$, такая что

$$v_n^N(x) = v_0^{N-n}(x) = \beta^k v^k(x)\Big|_{k=N-n}. \tag{8}$$

Для задачи (7) из результатов, приведенных в подразделе 2.1, и сделанных замечаний следует, что для любого $x \in \mathbb{R}^+$ существует частичная последовательность борелевских функций $\left\{v^k(x)\right\}_{k\in N_0}$ (где k принимает значения $N, N-1, \ldots, 0$), которая:

1) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} v^k(x) = \max\left[Ax^\sigma + B, \beta\mathsf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1})\right], \\ v^k(x)\,|_{k=N} = Ax^\sigma + B; \end{cases} \tag{9}$$

2) $v^0(x)\,|_{x=S_0} = v_0^N = \sup\limits_{\tau\in T_0^N} \mathsf{E}\beta^\tau\left(AS_\tau^\sigma + B\right) = \mathsf{E}\beta^{\tau^0}\left(AS_{\tau^0}^\sigma + B\right)$, где

$$\tau^0 = \min\left[k \in N_0 : v^k(S_k) = AS_k^\sigma + B\right] \tag{10}$$

есть оптимальный момент остановки в задаче (7);

3) монотонно не возрастает, т.е. для любого $x \in \mathbb{R}^+$ имеет место неравенство

$$v^k(x) \geqslant v^{k+1}(x), \quad k \in \{0, \ldots, N-1\}. \tag{11}$$

Из (9), в свою очередь, для любых $x \in \mathbb{R}^+$, $k \in N_0$ и $\beta \in (0, 1]$ следуют неравенства

$$v^k(x) \geqslant Ax^\sigma + B, \quad v^k(x) \geqslant \beta\mathsf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}). \tag{12}$$

Аналогично [2], введем области остановки и продолжения наблюдений. Для любого $k \in N_0$ множество $\Gamma_k \subseteq \mathbb{R}^+$ назовем множеством (областью) остановки, если

$$\Gamma_k \triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^+ : v^k(x) = Ax^\sigma + B\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : Ax^\sigma + B \geqslant \beta\mathsf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1})\right\}. \tag{13}$$

Множество $C_k \triangleq \mathbb{R}^+ \backslash \Gamma_k$ назовем множеством продолжения наблюдений:

$$C_k = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : v^k(x) > Ax^\sigma + B\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : Ax^\sigma + B < \beta\mathsf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1})\right\}. \tag{14}$$

Из определения семейств областей $\{C_k\}_{k\in N_0}$ и $\{\Gamma_k\}_{k\in N_0}$, а также свойства монотонности (для любых $x\in\mathbb{R}^+$) частичной последовательности $\left\{v^k(x)\right\}_{k\in N_0}$ следуют включения

$$\mathbb{R}^+ = \Gamma_N \supseteq \Gamma_{N-1} \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_k \supseteq \ldots \supseteq \Gamma_0, \tag{15}$$

$$\varnothing = C_N \subseteq C_{N-1} \subseteq \ldots \subseteq C_k \subseteq \ldots \subseteq C_0. \tag{16}$$

В совокупности (9), (13)–(16) дают представление для $v^k(x)$, где $k\in N_0$, $x\in\mathbb{R}^+$:

$$v^k(x) = \begin{cases} \beta\mathsf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}), \text{ если } x\in C_k, \\ Ax^\sigma + B, \text{ если } x\in\Gamma_k. \end{cases} \tag{17}$$

С учетом (17) имеем при любых $k\in N_0$ и $x\in\mathbb{R}^+$ представление для $v^k(x)$:

$$v^k(x) = (Ax^\sigma + B)\,1_{\{x\in\Gamma_k\}} + \beta\mathsf{E}v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1})\,1_{\{x\in C_k\}}. \tag{18}$$

Итак, чтобы найти решение задачи (7), необходимо решить рекуррентное уравнение (9) и для любого $k\in N_0$ построить области Γ_k и C_k. Это будет сделано в следующем разделе.

2.3. Решение задачи с конечным горизонтом

Следующие два утверждения — основные для этого раздела, они дают решение задачи (7). В них будут использованы обозначения

$$A_k \triangleq A\left(\beta\mathsf{E}\lambda^{\sigma\rho_1}\right)^{N-k}, \quad B_k \triangleq \beta^{N-k}B, \tag{19}$$

где $k\in N_0$ — любое, $A>0$, $B\in\mathbb{R}^1$, а $\sigma\geqslant 0$. Непосредственно проверяется, что A_k и B_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$A_k = A_{k+1}\beta\mathsf{E}\lambda^{\sigma\rho_1}, \quad A_k|_{k=N} = A; \quad B_k = \beta B_{k+1}, \quad B_k|_{k=N} = B. \tag{20}$$

У с л о в и е (φ):

$$0 < \mathsf{E}\lambda^{\sigma\rho_1} < \infty, \quad \sigma\geqslant 0. \tag{21}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия:*

1) *последовательность* $\{S_k,\mathcal{F}_k\}_{k\in N_0}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (5);

2) *условие* (φ);

3) *дисконтированная функция выигрыша имеет вид* (6);

4) *для любых* $(k,x)\in N_0\times\mathbb{R}^+$ *урезанная цена* $v^k(x)$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (9).

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *для любых* $k\in N_0$ *и* $\sigma>0$ *множества* C_k *и* Γ_k *допускают представления соответственно*

$$C_k = \left\{x\in\mathbb{R}^+ : A_kx^\sigma + B_k > Ax^\sigma + B\right\}, \tag{22}$$

$$\Gamma_k = \left\{x\in\mathbb{R}^+ : A_kx^\sigma + B_k \leqslant Ax^\sigma + B\right\}. \tag{23}$$

б) *для любых* $k \in N_0$, $x \in \mathbb{R}^+$ *и* $\sigma > 0$ *решение рекуррентного соотношения* (9) *допускает представление*

$$v^k(x) = Ax^\sigma + B + \max\left[A_k x^\sigma + B_k - Ax^\sigma - B, 0\right]. \tag{24}$$

Установим теперь вид оптимального момента остановки в задаче (7). Предварительно заметим, что из (13), (22) следует, что для любого $k \in N_0$ внутренность Γ_k, обозначаемая как $\operatorname{int}\Gamma_k$, допускает представление

$$\operatorname{int}\Gamma_k \triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^+ : A_k x^\sigma + B_k < Ax^\sigma + B\right\}. \tag{25}$$

Значит, для любого $k \in N_0$ определено множество

$$\partial\Gamma_k \triangleq \Gamma_k \backslash \operatorname{int}\Gamma_k = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : A_k x^\sigma + B_k = Ax^\sigma + B\right\}. \tag{26}$$

Если $\partial\Gamma_k \neq \varnothing$, то (26) определяет границу, которая для каждого k делит $\mathbb{R}^+$ на область остановки Γ_k и область продолжения наблюдений C_k. Из (26) также следует, что из разрешимости для любого $k \in N_0$ уравнения

$$A_k x^\sigma + B_k = Ax^\sigma + B$$

относительно x (т.е. существование элемента $x(k) \in \mathbb{R}^+$, обращающего (26) в тождество) следует $\partial\Gamma_k \neq \varnothing$. Частичную последовательность $\{x(k)\}_{k\in N_0}$ в задаче об оптимальной остановке называют свободной границей [3].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого* $k \in N_0$ *справедливы следующие утверждения*:

I. *если* $\beta = 1$,

1) *а* $\sigma > 0$, $\varphi(\sigma) \leqslant 1$, *то* $\Gamma_k = [0, \infty)$;

2) *а* $\sigma > 0$, $\varphi(\sigma) > 1$, *то* $\Gamma_k = \{0\}$;

II. *если* $\beta \in (0, 1)$ *и* $B = 0$,

1) *а* $\sigma > 0$, $\beta\varphi(\sigma) \leqslant 1$, *то* $\Gamma_k = [0, \infty)$;

2) *а* $\sigma > 0$, $\beta\varphi(\sigma) > 1$, *то* $\Gamma_k = \{0\}$;

III. *если* $\beta \in (0, 1)$ *и* $B < 0$,

1) *а* $\sigma_1 > 0$ — *единственный нетривиальный корень уравнения* $\varphi(\sigma) = 1$ *и* $\beta\varphi(\sigma) < 1$, *то* $\Gamma_k = [x(k), \infty)$;

2) *а* $\sigma > 0$, $\beta\varphi(\sigma) < 1$ *и* $\varphi(\sigma) \neq 1$, *то* $\Gamma_k = [x(k), \infty)$, *где частичная последовательность* $\{x(k)\}_{k\in N_0}$ *описывает свободную границу, а ее элементы для любого* $k \in N_0$ *определяются формулой*

$$x(k) \equiv \max\left[\left(\frac{B}{A}\frac{1-\beta^k}{(\beta\varphi(\sigma))^k - 1}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, 0\right]; \tag{27}$$

3) *а* $\sigma > 0$, $\beta\varphi(\sigma) \geqslant 1$, *то* $\Gamma_k = \{0\}$;

IV. *если* $\beta \in (0, 1)$ *и* $B > 0$,

1) *а* $\sigma > 0$, $\beta\varphi(\sigma) \leqslant 1$, *то* $\Gamma_k = [0, \infty)$;

2) *а* $\sigma > 0$, $\beta\varphi(\sigma) > 1$, *то* $\Gamma_k = [x(k), \infty)$, *где частичная последовательность* $\{x(k)\}_{k\in N_0}$ *описывает свободную границу, а ее элементы для любого* $k \in N_0$ *определяются формулой* (27);

V. *пусть* $\{\Gamma_k\}_{k\in N_0}$ — *набор множеств, определенный в пунктах* I–IV. *Тогда оптимальный момент остановки* τ^0 *допускает представление* $\tau^0 = \min\{k \in N_0 : S_k \in \Gamma_k\}$ P-*п.н.*

Замечание 3. 1. Из доказательства теоремы 2 следует, что в утверждениях I–IV теоремы 2 элементы частичной последовательности $\{x(k)\}_{k\in N_0}$ определяются единственным образом.

2. Из утверждения теоремы 2 следует, что значения параметров A и B функции выигрыша существенно влияют на вид решения задачи (7). Так, при $B = 0$ получаются лишь тривиальные решения. Такой результат связан с тем, что слагаемое B в каждый момент умножается на дисконтирующий множитель. Этот факт следует учитывать при выборе конкретного вида функции выигрыша в прикладных задачах, например в задачах максимизации ожидаемого значения функции полезности, которая, как известно, определяется с точностью до константы.

Итак, теоремы 1, 2 дают явный вид решения задачи (7): цена задачи допускает представление $v^N(x) = Ax^\sigma + B + \max[A_N x^\sigma + B_N - Ax^\sigma - B, 0]$, а оптимальный момент остановки имеет вид, указанный в п. V теоремы 2.

3. Задача с бесконечным горизонтом

3.1. Постановка задачи с бесконечным горизонтом и некоторые известные свойства ее решения

Пусть теперь T_0^∞ — множество всех конечных марковских моментов τ. Предположим, что выполнено условие (φ). Тогда задача об оптимальной остановке геометрического случайного блуждания с дисконтированной степенной функцией выигрыша и бесконечным горизонтом состоит в следующем:

$$\mathsf{E}\beta^\tau (AS_\tau^\sigma + B) \to \sup_{\tau\in T_0^\infty}, \tag{28}$$

где параметрами задачи являются коэффициент дисконтирования $\beta \in (0, 1]$ и A, B, σ $(\sigma > 0)$.

Момент остановки $\tau^0 \in T_0^\infty$ называют оптимальным, если

$$\sup_{\tau\in T_0^\infty} \mathsf{E}\beta^\tau (AS_\tau^\sigma + B) = \mathsf{E}\beta^{\tau^0} \left(AS_{\tau^0}^\sigma + B\right).$$

Пусть борелевская функция $\widehat{v} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^1$, обозначаемая как $\widehat{v}(x)$, определена равенством

$$\widehat{v}(x) = \sup_{\tau\in T_0^\infty} \mathsf{E}\beta^\tau (AS_\tau^\sigma + B).$$

Эту функцию называют ценой оптимальной остановки.

Как было указано в разделе 2, последовательность урезанных цен $\left\{v^k(x)\right\}_{k\geqslant 1}$ является монотонной (см. неравенство (11)). Поэтому для любого $x\in\mathbb{R}^+$ у последовательности $\left\{v^k(x)\right\}_{k\geqslant 1}$ существует поточечный предел

$$\widehat{v}(x) \triangleq \lim_{k\to\infty} v^k(x).$$

Известно также [2], что в рекуррентном соотношении (9) в силу теоремы о монотонной сходимости можно осуществить предельный переход при $k\to\infty$. Следовательно, для любого $x\in\mathbb{R}^+$ цена $\widehat{v}(x)$ удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\widehat{v}(x) = \max\Big[Ax^\sigma + B, \quad \beta \mathsf{E}\widehat{v}\left(x\lambda^{\rho_1}\right)\Big]. \tag{29}$$

Из (29) следует, что для любого $x\in\mathbb{R}^+$ имеют место неравенства

$$\widehat{v}(x) \geqslant Ax^\sigma + B, \quad \widehat{v}(x) \geqslant \beta\mathsf{E}\widehat{v}\left(x\lambda^{\rho_1}\right). \tag{30}$$

Кроме того, из (29) следует, что приводимые ниже соотношения определяют области в $\mathbb{R}^+$:

а)

$$\Gamma \triangleq \left\{x\in\mathbb{R}^+ : \widehat{v}(x) = Ax^\sigma + B\right\} = \left\{x\in\mathbb{R}^+ : Ax^\sigma + B \geqslant \beta\mathsf{E}\widehat{v}\left(x\lambda^{\rho_1}\right)\right\}, \tag{31}$$

б)

$$C \triangleq \left\{x\in\mathbb{R}^+ : \widehat{v}(x) = \beta\mathsf{E}\widehat{v}\left(x\lambda^{\rho_1}\right)\right\} = \left\{x\in\mathbb{R}^+ : Ax^\sigma + B < \beta\mathsf{E}\widehat{v}\left(x\lambda^{\rho_1}\right)\right\}, \tag{32}$$

которые также называют [2] соответственно областью остановки и областью продолжения наблюдений. Из (31), (32) следуют равенства

$$\Gamma\cup C = \mathbb{R}^+, \quad \Gamma\cap C = \varnothing. \tag{33}$$

Формулы (29), (31)–(33) дают также представление

$$\widehat{v}(x) = \begin{cases} Ax^\sigma + B \text{ при } x\in\Gamma, \\ \beta\mathsf{E}\widehat{v}\left(x\lambda^{\rho_1}\right) \text{ при } x\in C. \end{cases} \tag{34}$$

В свою очередь, из (33) и (34) следуют равенства для любых $x\in\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \widehat{v}(x) &= \left(Ax^\sigma + B\right) 1_{\{x\in\Gamma\}} + \beta\mathsf{E}\widehat{v}\left(x\lambda^{\rho_1}\right) 1_{\{x\in C\}} = \\ &= Ax^\sigma + B + \left[\beta\mathsf{E}\widehat{v}\left(x\lambda^{\rho_1}\right) - Ax^\sigma - B\right] 1_{\{x\in C\}}. \end{aligned} \tag{35}$$

3.2. Решение задачи с бесконечным горизонтом

Из приведенных выше рассуждений следует, что решение задачи (28) будет найдено, если установить условия, при которых рекуррентное соотношение (29) имеет решение. Вид этого решения, а также областей остановки и продолжения наблюдений для задачи (28) получены в следующем утверждении.

Теорема 3. Предположим, что выполнено условие (φ). *Пусть* $\sigma_{\frac{1}{\beta}} > 0$ *удовлетворяет равенству*

$$\beta \mathsf{E} \lambda^{\sigma_{\frac{1}{\beta}} \rho_1} = 1, \tag{36}$$

причем

$$\sigma \neq \sigma_{\frac{1}{\beta}}. \tag{37}$$

Если выполнено одно из условий:

а)

$$\sigma > \sigma_{\frac{1}{\beta}} \quad \text{и} \quad B > 0, \tag{38}$$

б)

$$\sigma < \sigma_{\frac{1}{\beta}} \quad \text{и} \quad B < 0, \tag{39}$$

то справедливы следующие утверждения.

1. *Для любых* $x \in \mathbb{R}^+$ *и* $\beta \in (0,1]$ *существует решение уравнения* (29), *которое имеет вид*

$$v(x) = Ax^\sigma + B + \max\left[A^* x^\sigma - Ax^\sigma - B, 0\right], \tag{40}$$

где константа $A^* > 0$ *допускает представление*

$$A^* \triangleq B \frac{\sigma}{\sigma - \sigma_{\frac{1}{\beta}}} \quad \left(\frac{A}{B} \frac{\sigma - \sigma_{\frac{1}{\beta}}}{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} \right)^{\frac{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}{\sigma}}. \tag{41}$$

2. *Существует число*

$$x_\Gamma = \left(\frac{B}{A} \frac{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}{\sigma - \sigma_{\frac{1}{\beta}}} \right)^{\frac{1}{\sigma}} > 0, \tag{42}$$

отделяющее область остановки от внутренности области продолжения наблюдения:

а) *если выполнено условие* (38), *то*

$$\Gamma = [0, x_\Gamma], \quad C = (x_\Gamma, \infty). \tag{43}$$

б) *если выполнено условие* (39), *то*

$$\Gamma = [x_\Gamma, \infty), \quad C = [0, x_\Gamma). \tag{44}$$

3. *Момент остановки*

$$\tau^0 = \begin{cases} \inf\{n \geqslant 0 : S_n \in \Gamma\} \\ \infty, \text{ если } S_n \notin \Gamma \text{ для любого } n \end{cases} \tag{45}$$

является оптимальным в задаче (28).

Замечание 4. Выше было отмечено, что значения параметров модели A и B существенно влияют на вид решения в случае конечного горизонта. Как следует из утверждения и доказательства теоремы 3, решение задачи в случае бесконечного горизонта при $B = 0$ не существует.

4. Заключение

Из утверждений теорем 1–3 следует, что в случае одномерного однородного геометрического случайного блуждания с дисконтированной степенной функцией выигрыша в задаче об оптимальной остановке:

1) не всегда существуют нетривиальные области остановки и продолжения наблюдений;

2) соответствующее рекуррентное соотношение (когда горизонт конечен) или уравнение (когда горизонт бесконечен) допускают явное решение;

3) установлены условия существования и вид решений.

Таким образом, в статье построены новые точно решаемые примеры задачи об оптимальной остановке.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Далее в доказательствах основных утверждений потребуются условия существования и свойства производящей функции, соответствующей функции распределения $F_{\rho_1}(x)$ случайной величины ρ_1. Приведем необходимые определения и утверждения.

Пусть борелевская функция $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ (обозначаемая как $\varphi(\sigma)$) определена равенством

$$\varphi(\sigma) = \mathsf{E}\lambda^{\sigma\rho_1}, \tag{П.1.1}$$

где $1 < \lambda < \infty$ — параметр, $\sigma \in \mathbb{R}^1$ — переменная величина. Функцию $\varphi(\sigma)$ называют производящей функцией моментов случайной величины ρ_1 [6]. Обозначим:

$$M^+ \triangleq \sup_{x\in\mathbb{R}^1} \left\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{\rho_1}(x) < 1\right\} \quad \left(M^- \triangleq \inf_{x\in\mathbb{R}^1} \left\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{\rho_1}(x) > 0\right\}\right).$$

Величина M^+ (M^-) — это существенная верхняя (нижняя) грань случайной величины ρ_1 [6], а множество вида $[M^-, M^+]$ — ее носитель [6].

Следующее простое утверждение, по-видимому, известно, но, к сожалению, в доступных источниках не было сформулировано и доказано.

Предложение 1. Пусть $M^- > -\infty$ и $M^+ < \infty$. Тогда справедливы утверждения:

1) *для любого $\sigma \in \mathbb{R}^1$ выполнено* (21);

2) *для любого $\sigma \in \mathbb{R}^1$ существуют и конечны производные $\frac{d^l}{d\sigma^l}\varphi(\sigma)$, где $l \in \mathbb{N}$ — любое, причем $\frac{d^2}{d\sigma^2}\varphi(\sigma) > 0$, т.е. $\varphi(\sigma)$ — строго выпуклая функция;*

3) *если* $m(\sigma) \triangleq \frac{d}{d\sigma} \ln \varphi(\sigma)$, *то*

$$M^{+} = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{m(\sigma)}{\ln\lambda}, \tag{П.1.2}$$

$$M^{-} = \lim_{\sigma\to-\infty} \frac{m(\sigma)}{\ln\lambda}. \tag{П.1.3}$$

Доказательство предложения 1. По условию предложения 1 M^{-} и M^{+} конечны, поэтому в доказательстве без ограничения общности можно полагать $\rho_1 \geqslant c$ P-п.н., где $c > 0$ — константа.

1. В силу сделанного предположения и определения величины M^{+} справедливы неравенства $c \leqslant \rho_1 \leqslant M^{+} < \infty$ P-п.н. Отсюда для любого $\sigma \geqslant 0$ имеем P-п.н.

$$0 < \lambda^{-|\sigma|c} \leqslant \lambda^{-|\sigma|\rho_1} \leqslant \lambda^{\sigma\rho_1} \leqslant \lambda^{|\sigma|\rho_1} \leqslant \lambda^{|\sigma|M^{+}} < \infty. \tag{П.1.4}$$

Соотношения (П.1.4) дают искомые неравенства $0 < \varphi(\sigma) < \infty$.

2. Пусть $l \in \mathbb{N}$. Тогда из (П.1.4) для любого $\sigma \geqslant 0$ следуют неравенства P-п.н.

$$0 < c^{l} \lambda^{\sigma c} \leqslant |\rho_1|^{l} \lambda^{\sigma\rho_1} \leqslant \left(M^{+}\right)^{l} \lambda^{|\sigma|M^{+}} < \infty. \tag{П.1.5}$$

Отсюда

$$0 < \mathsf{E}\,|\rho_1|^{l} \lambda^{\sigma\rho_1} < \infty.$$

Значит, для любого $l \in \mathbb{N}$ существует l-я производная производящей функции моментов

$$\frac{d^{l}\varphi}{d\sigma^{l}}(\sigma) = (\ln\lambda)^{l}\, \mathsf{E}\rho_1^{l} \lambda^{\sigma\rho_1},$$

причем

$$\left|\frac{d^{l}\varphi}{d\sigma^{l}}(\sigma)\right| < \infty. \tag{П.1.6}$$

В частности, для любого $\sigma \geqslant 0$ имеем

$$\frac{d}{d\sigma}\varphi(\sigma) = (\ln\lambda)\, \mathsf{E}\rho_1 \lambda^{\sigma\rho_1}, \tag{П.1.7}$$

$$\frac{d^{2}\varphi}{d\sigma^{2}}(\sigma) = (\ln\lambda)^{2}\, \mathsf{E}\rho_1^{2} \lambda^{\sigma\rho_1} > 0, \tag{П.1.8}$$

$$m(\sigma) = (\ln\lambda)\, \frac{\mathsf{E}\rho_1 \lambda^{\sigma\rho_1}}{\mathsf{E}\lambda^{\sigma\rho_1}}. \tag{П.1.9}$$

Из (П.1.6)–(П.1.8) следует, что $\varphi(\sigma)$ — строго выпуклая функция.

3. Установим равенства (П.1.2)–(П.1.3). Пусть $\mathsf{P}^{\sigma'}(A)$ — вероятностная мера, определенная с помощью преобразования Эшера (см., например, [3]) распределения вероятностей случайной величины ρ_1:

$$\mathsf{P}^{\sigma'}(A) \triangleq \mathsf{E}\frac{\lambda^{\sigma'\rho_1}}{\mathsf{E}\lambda^{\sigma'\rho_1}} 1_A(\omega), \tag{П.1.10}$$

где $A \in \mathcal{F}$ — любое, а $\sigma' \geqslant 0$. Известно, что $\mathsf{P}^{\sigma'}$ эквивалентна P [3]. Тогда из (П.1.9)–(П.1.10) следует представление

$$\frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = \mathsf{E}^{\mathsf{P}^{\sigma'}} \rho_1, \tag{П.1.11}$$

где $\mathsf{E}^{\mathsf{P}^{\sigma'}} \rho_1$ — математическое ожидание случайной величины ρ_1 относительно меры $\mathsf{P}^{\sigma'}$. Из (П.1.11) с учетом $\rho_1 \leqslant M^+ < \infty$ P-п.н. следует, что для $\sigma \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = \mathsf{E}^{\mathsf{P}^{\sigma'}} \rho_1 \leqslant M^+. \tag{П.1.12}$$

Пусть $\{M_n\}_{n \geqslant 1}$ — числовая последовательность такая, что $0 < M_n < M^+$ и $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = M^+$. Тогда $\frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = \mathsf{E}^{\mathsf{P}^{\sigma'}} \rho_1 \geqslant \mathsf{E}^{\mathsf{P}^{\sigma'}} \rho_1 1_{[M_n, \infty)}(\rho_1) \geqslant M_n$, где

$$1_{[M_n,\infty)}(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x \in [M_n, \infty), \\ 0, & x \notin [M_n, \infty). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{\sigma' \to \infty} \frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} \geqslant M_n \underset{n \to \infty}{\to} M^+.$$

Последняя формула в совокупности с (П.1.12) дает требуемое равенство $\lim\limits_{\sigma' \to \infty} \frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = M^+$.

Аналогичным образом устанавливается равенство $\lim\limits_{\sigma' \to -\infty} \frac{m(\sigma')}{\ln \lambda} = M^-$. Доказательство закончено.

Следствие 1. Пусть выполнены условия предложения 1. Тогда производящая функция моментов $\varphi(\sigma)$ при $\sigma \geqslant 0$ обладает следующими свойствами.

1. *Если $M^+ < 0$, то функция $\varphi(\sigma)$ монотонно убывает от значения 1 к нулю.*

2. *Если $M^+ > 0$ и $\mathsf{E}\rho_1 < 0$, то существуют $0 < \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_{\frac{1}{\beta}} < \infty$ такие, что:*

а) $0 < \varphi(\sigma_0) = \min\limits_{\sigma \in \mathbb{R}^+} \varphi(\sigma) < 1$, *т.е. σ_0 — единственный неотрицательный корень уравнения*

$$\frac{d}{d\sigma}\varphi(\sigma_0) = 0;$$

б) $\varphi(0) = \varphi(\sigma_1) = 1$, *где* $\sigma_1 \neq 0$ — *единственный нетривиальный корень уравнения* $\varphi(\sigma) = 1$, *причем*

— *для любого* $\sigma \in (0, \sigma_1)$ *имеют место неравенства* $0 < \varphi(\sigma) < 1$,

— *для любого* $\sigma \geqslant \sigma_1$ *функция* $\varphi(\sigma) \geqslant 1$;

в) *для любого* $\beta \in (0,1)$ *существует единственный корень* $\sigma_{\frac{1}{\beta}}$ *уравнения* $\varphi(\sigma) = \frac{1}{\beta}$, *причем*

— *если* $\sigma < \sigma_{\frac{1}{\beta}}$, *то* $\varphi(\sigma) < \frac{1}{\beta}$,

— *если* $\sigma \geqslant \sigma_{\frac{1}{\beta}}$, *то* $\varphi(\sigma) \geqslant \frac{1}{\beta}$.

3. *Если* $\mathsf{E}\rho_1 \geqslant 0$, *то для любого* $\beta \in (0,1]$ *существует единственный нетривиальный корень* $\sigma_{\frac{1}{\beta}}$ *уравнения* $\varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\beta}}\right) = \frac{1}{\beta}$, *причем при* $\sigma \geqslant \sigma_{\frac{1}{\beta}}$ *функция* $\varphi(\sigma) \geqslant \frac{1}{\beta}$.

Доказательство следствия 1. Согласно п. 2 предложения 1 (см. также (П.1.8)) $\varphi(\sigma)$ — строго выпуклая функция. Известно [15], что производная строго выпуклой функции, в частности $\frac{d}{d\sigma}\varphi(\sigma)$, является непрерывной и монотонно возрастающей. Очевидно также, что производные $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0)$ и $\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}(0)$ определены как правые производные в точке нуль и имеют вид

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) = \ln\lambda \mathsf{E}\rho_1, \quad \frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}(0) = (\ln\lambda)^2 \mathsf{E}\rho_1^2.$$

По определению производящей функции моментов (формула (П.1.1)) параметр $\ln\lambda > 1$, поэтому знак $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0)$ совпадает со знаком $\mathsf{E}\rho_1$. Следовательно, возможны следующие варианты зависимости $\varphi(\sigma)$ от σ.

Вариант 1: $M^+ < 0$. Тогда $\mathsf{E}\rho_1 < 0$, $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) < 0$ и $\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma) \uparrow 0$ при $\sigma \to \infty$. Иными словами, при $\sigma \geqslant 0$ функция $\varphi(\sigma)$ монотонно убывает от значения 1 (поскольку $\varphi(0) = 1$) к нулю.

Вариант 2. Пусть $M^+ > 0$, но $\mathsf{E}\rho_1 < 0$ (т.е. $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) < 0$). Кроме того, в этом случае $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma) \geqslant \ln\lambda \lim\limits_{\sigma\to\infty} \left\{\mathsf{E}\rho_1 \lambda^{\sigma\rho_1} 1_{\left\{O_{M^+}(\varepsilon)\cap(0,\infty)\right\}}\right\} = \infty$, где $O_{M^+}(\varepsilon)$ — ε-окрестность точки M^+, $\varepsilon > 0$ — любое. Отсюда следует существование чисел σ_0, σ_1, $\sigma_{\frac{1}{\beta}} \in \mathbb{R}^+$ таких, что:

2.1) σ_0 — это (в силу теоремы Коши) единственный корень уравнения $\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma) = 0$ (действительно, $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) < 0$, $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma) = +\infty$ и $\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma)$ монотонно возрастает по σ), причем на основании теоремы Ферма $0 < \varphi(\sigma_0) = \min\limits_{\sigma\in\mathbb{R}^1} \varphi(\sigma) < \varphi(0) = 1$;

2.2) $\sigma_1 > 0$ — это единственное нетривиальное решение уравнения $\varphi(\sigma) = 1$ $(= \varphi(0))$, причем если: а) $\sigma \in (0, \sigma_1]$, то $\varphi(\sigma) \leqslant 1$, б) $\sigma > \sigma_1$, то $\varphi(\sigma) > 1$;

2.3) $\sigma_{\frac{1}{\beta}} > 0$ — это корень уравнения $\varphi(\sigma) = \frac{1}{\beta}$, где $\beta \in (0,1)$, причем $\sigma_1 < \sigma_{\frac{1}{\beta}}$ и если $\sigma > \sigma_{\frac{1}{\beta}}$, то $\varphi(\sigma) > \varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\beta}}\right)$.

Вариант 3. Пусть $\mathsf{E}\rho_1 \geqslant 0$. Тогда $\frac{d\varphi}{d\sigma}(0) \geqslant 0$ и, поскольку $\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma)$ монотонно возрастает по σ, очевидно, что и $\varphi(\sigma) \geqslant 1$ монотонна и возрастает по σ, $\sigma \geqslant 0$. Поэтому для любого $\beta \in (0, 1]$ существует единственный корень $\sigma_{\frac{1}{\beta}}$ уравнения $\varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\beta}}\right) = \frac{1}{\beta}$, причем при $\sigma \geqslant \sigma_{\frac{1}{\beta}}$ функция $\varphi(\sigma) \geqslant \frac{1}{\beta}$.

Доказательство закончено.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В этом приложении доказаны теоремы 1 и 2.

При доказательстве теоремы 1 воспользуемся следующим вспомогательным утверждением о виде решения рекуррентного соотношения (относительно $w^k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$):

$$\left\{ \begin{array}{l} w^k(x) = \beta \mathsf{E} w^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}), \\ w^k(x)|_{k=N} = Ax^\sigma + B. \end{array} \right. \tag{П.2.1}$$

Л е м м а 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Семейство $\{w^k(x)\}_{k\in N_0}$ является единственным решением* (П.2.1) *тогда и только тогда, когда*

$$w^k(x) = A_k x^\sigma + B_k, \quad k \in N_0, \tag{П.2.2}$$

где $\{A_k\}_{k\in N_0}$ и $\{B_k\}_{k\in N_0}$ определены равенствами (19).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. 1. Необходимость. Докажем, что семейство функций (П.2.2) является решением системы (П.2.1). Доказательство проведем методом индукции. При $k = N$ из (П.2.1) следует, что $w^k(x)|_{k=N} = Ax^\sigma + B$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Пусть

$$w^{k+1}(x) = A_{k+1}x^\sigma + B_{k+1},$$

где

$$A_{k+1} = A(\beta \mathsf{E}\lambda^{\sigma\rho_1})^{N-k-1}, \quad B_{k+1} = \beta^{N-k-1}B.$$

Установим, что $w^k(x) = A_k x^\sigma + B_k$. Действительно, из (П.2.1) и предположения индукции для любых $x \in \mathbb{R}^+$ следуют равенства

$$w^k(x) = \beta \mathsf{E} w^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}) = \beta \mathsf{E}(A_{k+1}x^\sigma \lambda^{\sigma\rho_1} + B_{k+1}) =$$
$$= \beta A_{k+1} x^\sigma \mathsf{E}\lambda^{\sigma\rho_1} + \beta B_{k+1} = A(\beta \mathsf{E}\lambda^{\sigma\rho_1})^{N-k} x^\sigma + \beta^{N-k}B = A_k x^\sigma + B_k.$$

Таким образом, основной шаг индукции обоснован, а вместе с ним установлена необходимость.

2. Достаточность. Установим, что семейство функций (П.2.2) удовлетворяет (П.2.1). Из (П.2.2) имеем $w^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}) \triangleq A_{k+1}x^\sigma\lambda^{\sigma\rho_1} + B_{k+1}$. От левой и правой частей последнего равенства возьмем математическое ожидание, умноженное на β. Учитывая (20), получим

$$\beta \mathsf{E} w^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}) = \beta \mathsf{E}(A_{k+1}x^\sigma\lambda^{\sigma\rho_1} + B_{k+1}) =$$
$$= (\beta A_{k+1}\mathsf{E}\lambda^{\sigma\rho_1})x^\sigma + \beta B_{k+1} = A_k x^\sigma + B_k = w^k(x).$$

Установили достаточность.

Единственность очевидна. Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 1. Известно [3], что решение рекуррентного соотношения (9) допускает представление (18). Из (18), в свою очередь, следует, что для любых $k \in N_0$ имеются три взаимоисключающие возможности: 1) $\Gamma_k = \varnothing$ $(C_k = \mathbb{R}^+)$, 2) $C_k = \varnothing$ $(\Gamma_k = \mathbb{R}^+)$, 3) $C_k \neq \varnothing$, $\Gamma_k \neq \varnothing$, причем $C_k \cup \Gamma_k = \mathbb{R}^+$. Рассмотрим каждую из них.

Возможность 1. Из (9) следует, что в этом случае урезанная цена $v^k(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\left\{ \begin{array}{l} v^k(x) = \beta \mathsf{E} v^{k+1}(x\lambda^{\rho_1}), \\ v^k(x)|_{k=N} = Ax^\sigma + B. \end{array} \right. \tag{П.2.3}$$

Тогда из утверждения леммы 1 следует, что решение (П.2.3), в силу его единственности, имеет вид

$$v^k(x) = A_k x^\sigma + B_k, \tag{П.2.4}$$

причем A_k и B_k удовлетворяют рекуррентным соотношениям (20).

Возможность 2. В этом случае из (18) следует, что для любого $x \in \mathbb{R}^+$ решение (9) имеет вид

$$v^k(x) = Ax^\sigma + B. \tag{П.2.5}$$

Возможность 3. Поскольку по условию $C_k \neq \varnothing$, то из (15) следует, что для любого $0 \leqslant n \leqslant k$ множество $C_n \neq \varnothing$. Поэтому для любого $x \in C_n$ урезанная цена $v^n(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (П.2.3), решение которого имеет вид (П.2.4). Следовательно, (18) с учетом (15) для любых $n \leqslant k$ и $x \in \mathbb{R}^+$ можно переписать в виде

$$\begin{gathered} v^n(x) = (Ax^\sigma + B)\,1_{\{x \in \Gamma_n\}} + (A_n x^\sigma + B_n)\,1_{\{x \in C_n\}} = \\ = (Ax^\sigma + B) + [A_n x^\sigma + B_n - Ax^\sigma - B]\,1_{\{x \in C_n\}}. \end{gathered} \tag{П.2.6}$$

Последнее равенство следует из определения множеств C_n и Γ_n.

Из (П.2.6) и (12) очевидным образом следует, что для любых $x \in \mathbb{R}^+$ выполняются соотношения

$$v^n(x) - Ax^\sigma - B = [A_n x^\sigma + B_n - Ax^\sigma - B]\,1_{\{x \in C_n\}} \geqslant 0. \tag{П.2.7}$$

По условию имеем $C_n \neq \varnothing$. Тогда из (П.2.7) следует, что множество C_n $(n \leqslant k)$ допускает представление

$$\begin{gathered} C_n = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : v^n(x) - Ax^\sigma - B\right\} = \\ = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : [A_n x^\sigma + B_n - Ax^\sigma - B]\,1_{\{x \in C_n\}} > 0\right\} = \\ = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : A_n x^\sigma + B_n > Ax^\sigma + B\right\}, \end{gathered} \tag{П.2.8}$$

что и доказывает (22). Поэтому в силу (П.2.8) множество $\Gamma_n = \mathbb{R}^+ \backslash C_n$ допускает представление (23).

Рассмотрим правую часть равенства (П.2.7). В силу (П.2.8) для любого $x \in \mathbb{R}^+$ имеем

$$[A_n x^\sigma + B_n - Ax^\sigma - B]\, 1_{\{x \in \mathbb{R}^+ : A_n x^\sigma + B_n > Ax^\sigma + B\}} = \\ = \max\{A_n x^\sigma + B_n - Ax^\sigma - B, 0\}.$$

Поэтому из (П.2.5) с учетом (23) и последнего равенства устанавливается равенство (24). Этим завершается доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме 1 для любого $k \in N_0$ множество остановки Γ_k имеет вид (23), из которого следует замкнутость этого множества. Поэтому его внутренность ($\operatorname{int} \Gamma_k$) допускает представление (25). Ясно, что $\partial \Gamma_k$, определяемое (26), — это множество граничных точек множества Γ_k и при любых $k \in N_0$ граница $\partial \Gamma_k \neq \varnothing$. Поэтому элементы $x(k) \in \partial \Gamma_k$ должны удовлетворять уравнению

$$A_k x^\sigma + B_k = Ax^\sigma + B. \tag{П.2.9}$$

Если выполнены условия теоремы 1 и хотя бы одно из условий I–IV теоремы 2, то для каждого из этих случаев очевидно существование единственного неотрицательного решения $x(k)$ уравнения (П.2.9). Стало быть, $\partial \Gamma_k$ — одноточечное множество (т.е. $\partial \Gamma_k = \{x(k)\}$). Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости утверждений I–IV теоремы 2.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Доказательство утверждений теоремы 3 опирается на следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 3, где $x \in \mathbb{R}^+$, а борелевская функция $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет уравнению (относительно $w(x)$):

$$w(x) = \beta \mathsf{E} w(x \lambda^{\rho_1}). \tag{П.3.1}$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^+$ уравнение (П.3.1) имеет единственное нетривиальное решение

$$w(x) = A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}, \tag{П.3.2}$$

где $A^* > 0$ — некоторая константа, а $\sigma_{\frac{1}{\beta}}$ — единственный корень уравнения $\beta \varphi(\sigma) = 1$.

Замечание 5. Лемма 2 устанавливает структуру решения уравнения (П.3.1). Однако, из него не следует, какое значение принимает константа A^*.

Доказательство леммы 2. Доказательство проведем по индукции. Рассмотрим рекуррентное соотношение, $k \geqslant 1$

$$\begin{cases} w^k(x) = \beta \mathsf{E} w^{k-1}(x \lambda^{\rho_1}), \\ w^k(x)\,|_{k=0} = A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}, \end{cases} \tag{П.3.3}$$

где $x \in \mathbb{R}^+$, а A^* — некоторая положительная константа.

Из (П.3.3) следует, что

$$w^1(x) = \beta \mathsf{E} w^0(x\lambda^{\rho_1}) = \beta \mathsf{E} A^*(x\lambda^{\rho_1})^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} = \beta A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\sigma}}} \varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\sigma}}\right).$$

Из условия $\beta\varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\beta}}\right) = 1$ следует, что $w^1(x) = A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}$. Пусть теперь $w^{k-1}(x) = A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}$. Установим, что из (П.3.3) следует равенство $w^k(x) = A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}$. Действительно, из (П.3.3) имеем

$$w^k(x) = \beta \mathsf{E} A^*(x\lambda^{\rho_1})^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} = \beta A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} \varphi\left(\sigma_{\frac{1}{\sigma}}\right) = A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}.$$

Основной шаг индукции обоснован. Следовательно, для любых $k \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}^+$ и $\beta \in (0,1]$ имеем равенство $w^k(x) = A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}$. Поэтому

$$w(x) \triangleq \lim_{k\to\infty} w^k(x) = A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}.$$

Единственность решения уравнения (П.3.1) следует из единственности предела. Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 3. Поскольку уравнение (П.3.1) имеет единственное решение (П.3.2) для любого $x \in \mathbb{R}^+$, то оно имеет такое же решение и для любого $x \in C \subseteq \mathbb{R}^+$. Стало быть, в силу (35) и утверждения леммы 2 имеем для любого $x \in C$ равенства

$$v(x) = w(x) = A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}}. \tag{П.3.4}$$

Поэтому из равенств (34) и (35) в силу (П.3.4) для любого $x \in \mathbb{R}^+$ следуют равенства

$$\begin{aligned} v(x) &= (Ax^\sigma + B)\,1_{\{x\in\Gamma\}} + \beta \mathsf{E} v(x\lambda^{\rho_1})\,1_{\{x\in C\}} = \\ &= (Ax^\sigma + B)1_{\{x\in\Gamma\}} + v(x)1_{\{x\in C\}} = \\ &= (Ax^\sigma + B)1_{\{x\in\Gamma\}} + A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} 1_{\{x\in C\}}. \end{aligned} \tag{П.3.5}$$

Так как $1_{\{x\in\Gamma\}} = 1 - 1_{\{x\in C\}}$, то из (П.3.5) следует, что для любых $x \in \mathbb{R}^+$

$$v(x) - Ax^\sigma - B = \left(A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} - Ax^\sigma - B\right) 1_{\{x\in C\}} \geqslant 0. \tag{П.3.6}$$

Последнее неравенство в (П.3.6) следует из неравенств (30). Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что для любого $x \in \mathbb{R}^+$ в силу (П.3.6) имеет место равенство

$$\left(A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} - Ax^\sigma - B\right) 1_{\{x\in C\}} = \max\left[A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} - Ax^\sigma - B, 0\right]. \tag{П.3.7}$$

Из (П.3.6) и (П.3.7) следует (40).

Теперь установим представление множеств C и Г. Действительно, из (40) и определения множества C имеем

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : v(x) - Ax^\sigma + B > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} > Ax^\sigma + B\right\}.$$

Отсюда с учетом определения множества $\Gamma = \mathbb{R}^+ \backslash C$ получаем

$$\Gamma = \left\{x \in \mathbb{R}^+ : A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} \leqslant Ax^\sigma + B\right\}. \tag{П.3.8}$$

Теперь найдем значение константы A^*. Для этого сначала заметим, что из неравенства (30) и (П.3.7) следует, что имеет место экстремальная задача

$$(v(x) - Ax^\sigma - B) \to \inf_{x \in \mathbb{R}^+}. \tag{П.3.9}$$

Из равенства (П.3.6) вытекает, что задача (П.3.9) эквивалентна следующей задаче:

$$\max\left[A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} - Ax^\sigma - B, 0\right] \to \inf_{x \in \mathbb{R}^+}. \tag{П.3.10}$$

Из (П.3.6) и (П.3.7) следует, что

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^+} \max\left[A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} - Ax^\sigma - B, 0\right] = 0. \tag{П.3.11}$$

Возникает вопрос о том, достигается ли нижняя грань в (П.3.11), т.е. существует ли такое $x_\Gamma > 0$, что выполнено равенство

$$A^* x_\Gamma^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} = Ax_\Gamma^\sigma + B. \tag{П.3.12}$$

Из теоремы Ферма следует, что для существования такого $x_\Gamma > 0$ необходимо, чтобы существовало решение уравнения

$$d\left(A^* x^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} - Ax^\sigma - B\right)/dx = 0.$$

Следовательно,

$$\sigma_{\frac{1}{\beta}} A^* x_\Gamma^{\sigma_{\frac{1}{\beta}} - 1} = \sigma A x_\Gamma^{\sigma - 1}. \tag{П.3.13}$$

Таким образом, (П.3.12) и (П.3.13) дают систему нелинейных алгебраических уравнений относительно A^* и x_Γ

$$\begin{cases} A^* x_\Gamma^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} = Ax_\Gamma^\sigma + B, \\ \sigma_{\frac{1}{\beta}} A^* x_\Gamma^{\sigma_{\frac{1}{\beta}}} = \sigma A x_\Gamma^\sigma. \end{cases} \tag{П.3.14}$$

Тогда в условиях теоремы 3 (т.е. при выполнении (37) и (38) или (39)), как легко установить, система (П.3.14) имеет единственное решение вида (41), (42).

Покажем теперь, что $x_\Gamma > 0$, определяемое (42), является искомой свободной границей. Сначала заметим, что множество Γ в силу (П.3.8) можно представить в виде $\Gamma = \partial\Gamma \cup \operatorname{int}\Gamma$, где

$$\operatorname{int}\Gamma \triangleq \left\{ x > 0 : A^* x^{\sigma \frac{1}{\beta}} < Ax^\sigma + B \right\}$$

— внутренность множества Γ, а

$$\partial\Gamma = \left\{ x > 0 : A^* x^{\sigma \frac{1}{\beta}} = Ax^\sigma + B \right\}$$

— свободная граница, отделяющая множество C от $\operatorname{int}\Gamma$.

Очевидно, что $\Gamma \neq \varnothing$, если $\operatorname{int}\Gamma \neq \varnothing$, т.е. если существует хотя бы один $x > 0$ такой, что выполняется неравенство

$$A^* x^{\sigma \frac{1}{\beta}} < Ax^\sigma + B,$$

либо если $\partial\Gamma \neq \varnothing$, то существует хотя бы одно решение уравнения (относительно $x \in \mathbb{R}^+$) (П.3.12). Следовательно, в силу (П.3.9), существует $x_\Gamma > 0$ такая, что

$$x_\Gamma = \arg \left\{ x > 0 : A^* x^{\sigma \frac{1}{\beta}} = Ax^\sigma + B \right\},$$

т.е. x_Γ является единственной крайней точкой множества Γ. Поэтому Γ допускает представление (44).

Для завершения доказательства осталось заметить, что (45) следует из определения оптимального момента остановки τ^0 и равенства

$$\tau^0 = \inf\{n \geqslant 0 : S_n \in \Gamma\} = \begin{cases} \inf\limits_n \{n \geqslant 0,\, S_n \in \Gamma\}, \\ \infty, \text{ если } S_n \notin \Gamma \text{ для любого } n. \end{cases}$$

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розов А.К.* Оптимальные правила остановки и их применения. СПб.: Политехника, 2009.
2. *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
3. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998.
4. *Аркин В.И., Сластников А.Д. Аркина С.В.* Стимулирование инвестиционных проектов с помощью механизма амортизации / Научный доклад № 02/05. Консорциум экономических исследований и образования. Серия «Научные доклады». М.: EERC, 2002.
5. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987.
6. *Ширяев А.Н.* Вероятность — 1. М.: МЦНМО, 2004.
7. *Wald A.* Sequential analysis. N.Y.: John Wiley and Sons, 1947.

8. *Ferguson T. S.* Optimal Stopping and Applications. – unpublished manuscript, 2000, URL: http://www.math.ucla.edu/ tom/Stopping/Contents.html (дата обращения: 10.07.2014).
9. *Фёльмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008.
10. *Jönsson H., Kukush A.G., Silvestrov D.S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for american type option. I // Theory Probab. Math. Statist. 2005. No. 71. P. 93–103.
11. *Jönsson H., Kukush A.G., Silvestrov D.S.* Threshold structure of optimal stopping strategies for american type option. II // Theory Probab. Math. Statist. 2006. No. 72. P. 47–58.
12. *Kukush A.G., Silvestrov D.S.* Optimal pricing of American type options with discrete time // Theory Stoch. Proces. 2004. V. 10(26). No. 1–2. P. 72–96.
13. *Новиков А.А., Ширяев А.Н.* Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий // Теория вероятн. и ее примен. 2004. Т. 49. Вып. 2. С. 373–382.
14. *Силаева М.В., Силаев А.М.* Спрос и предложение. Н. Новгород: Нижегород. филиал ГУ-ВШЭ, 2006.
15. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 11.12.2019

После доработки 16.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020