

© 2020 г. Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com)
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева)

УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМОЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ НА ОСНОВЕ НАБЛЮДАТЕЛЯ СОСТОЯНИЯ¹

Рассматриваются линейные системы с аффинной моделью параметрической неопределенности, функционирующие в повторяющемся режиме. Для таких систем предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением. Этот метод основан на использовании наблюдателя состояния полного порядка и вспомогательной 2D-модели в форме дифференциального повторяющегося процесса, устойчивость которой гарантирует сходимость процесса обучения. Для получения условий устойчивости используется дивергентный метод векторных функций Ляпунова. Приведен пример, демонстрирующий особенности и преимущества нового метода.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, наблюдатель, 2D-системы, устойчивость, векторная функция Ляпунова, дифференциальные повторяющиеся процессы.

DOI: 10.31857/S0005231020070053

1. Введение

Управление с обратной связью является наиболее эффективным способом достижения таких свойств системы, как устойчивость, робастность, оптимальность в смысле заданного критерия и т.п. На практике существует много систем, которые функционируют в повторяющемся режиме с одной и той же продолжительностью каждого повторения, в течение которого системы должны отслеживать заданный сигнал с требуемой точностью. При использовании обратной связи ошибка слежения будет одинаковой независимо от количества повторений (итераций). Это обстоятельство заставило искать новые решения, которые обеспечили бы уменьшение ошибки слежения с увеличением числа повторений.

Таким решением является управление с итеративным обучением, которое организовано таким образом, чтобы последовательно уменьшать ошибку слежения (обучения) в повторяющихся операциях. Задача управления с итеративным обучением состоит в том, чтобы найти соответствующий управляющий сигнал, который заставляет выходную переменную следовать за желаемой

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 18-79-00088).

траекторией, определенной на конечном интервале времени, за счет итеративного уточнения этого сигнала. Такой тип управления использует информацию об ошибке, информацию с предыдущих повторений, а также некоторую предварительную информацию о системе, чтобы получить такой входной сигнал, который обеспечит сходимость ошибки обучения к нулю по мере увеличения числа повторений. В отличие от адаптивного управления параметры системы здесь остаются неизменными.

Обзорные публикации [1, 2] могут служить отправной точкой. Управление с итеративным обучением успешно используется в огромном числе приложений от медицинских роботов для реабилитации после инсульта [3, 4] и для поддержки желудочка сердца [5] до лазерного напыления металла [6], морских систем [7] и производственных систем [8].

Начиная с пионерской публикации [9] отмечено, что управление с итеративным обучением адекватно моделируется двумерной (2D) системой. Действительно, с одной стороны, управление с итеративным обучением заставляет систему многократно выполнять одну и ту же команду на конечном интервале времени. С другой стороны, управление с итеративным обучением исправляет команду от повторения к повторению, чтобы уменьшить ошибку обучения. Таким образом, в качестве двух независимых переменных выступают шаг по оси времени и номер повторения по оси итераций.

Наиболее распространенными двумерными (2D) моделями управления с итеративным обучением являются повторяющиеся процессы. Сведения об этих процессах, включая теорию устойчивости в рамках линейной динамики с использованием моделей в банаховом пространстве, можно найти в [10] и в источниках из приведенной там библиографии. Теории устойчивости и диссипативности повторяющихся процессов, основанные на векторных функциях Ляпунова и векторных функциях накопления, были разработаны в [11] и в предшествующих публикациях тех же авторов, приведенных в списке литературы. Основная особенность этих результатов заключается в том, что для получения условий устойчивости вместо полной производной или полного приращения скалярной функции Ляпунова используется дивергенция векторной функции или ее дискретный аналог.

Как правило, в алгоритмах управления с итеративным обучением не используются ни переменные состояния системы, ни их оценки. В то же время ясно, что использование этих переменных может гарантировать более высокое качество управления в смысле увеличения скорости сходимости процесса обучения и в смысле достижения более высокой точности. В частности, это демонстрирует публикация [12], в которой результаты были подтверждены экспериментом. Алгоритмы управления с итеративным обучением с оценками состояния, полученными наблюдателем полного порядка, были предложены в [13–15], где рассматривались детерминированные системы с измеряемым выходом.

В недавней работе автора [14] получен алгоритм управления с итеративным обучением, использующий информацию о выходной переменной и оценках состояния на текущем и предыдущем повторениях для случая, когда па-

параметры системы точно известны. Данная статья развивает эти результаты на случай систем с неопределенными параметрами.

В [14] были отмечены трудности подхода в рамках дифференциальных моделей – конечные результаты выражаются через решение модифицированного неравенства Риккати, которое в известных публикациях не изучалось, и для нахождения его решения пока можно предложить лишь эвристические итерационные методы. В то же время для систем с неопределенными параметрами использование дифференциальных моделей предпочтительно, поскольку в этом случае неопределенности учитываются проще и нагляднее.

Попытки преодолеть эти трудности привели к разработке нового подхода, позволяющего в случае систем с постоянными параметрами свести задачу к решению линейного матричного неравенства вместо упомянутого сложного неравенства типа Риккати. В случае систем с неопределенными параметрами задача сводится к решению системы линейных матричных неравенств. Таким образом, указанное затруднение удастся обойти не только для случая, изучаемого в [14], но и для более общего случая.

В данной статье рассматриваются линейные системы с непрерывным временем с аффинной моделью параметрической неопределенности. На основе предложенного нового подхода решается задача синтеза управления с итеративным обучением в предположении, что непосредственному измерению доступен только вектор выхода. Закон управления формируется на основе этого вектора и оценок вектора состояния номинальной модели. Выбор параметров закона управления, обеспечивающих сходимость процесса обучения, осуществляется на основе условий устойчивости вспомогательной 2D-модели в форме дифференциального повторяющегося процесса, которые выводятся на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова [11] и выражаются в виде системы линейных матричных неравенств. Приведен пример, демонстрирующий эффективность и преимущества нового метода.

2. Синтез управления с итеративным обучением дифференциальными повторяющимися процессами

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему с неопределенными параметрами, которая функционирует в повторяющемся режиме и описывается на k -м повторении моделью в пространстве состояний

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A(\delta(t))x_k(t) + B(\delta(t))u_k(t), \\ y_k(t) &= Cx_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где $x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния, $u_k(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — вектор управления и $y_k(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ — вектор выходных переменных, называемый профилем повторения, k — номер повторения, T — продолжительность повторения. Модель неопределенности задается в форме

$$(2) \quad A(\delta(t)) = A + \sum_{j=1}^l \delta_j(t)A_j, \quad B(\delta(t)) = B + \sum_{j=1}^l \delta_j(t)B_j,$$

где A и B – матрицы номинальной модели, A_j и B_j ($j = 1, 2, \dots, l$) – постоянные матрицы соответствующих размеров и $\delta_j(t) \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j]$. Далее повсюду для компактности записи зависимость δ от t не указывается.

Обозначим

$$\mathbf{D} = \left\{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j] \right\},$$

$$\mathbf{D}_v = \left\{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in \{\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j\} \right\},$$

где \mathbf{D}_v – конечное множество из 2^l элементов.

Пусть $y_{ref}(t)$, $0 \leq t \leq T$, – заданная желаемая траектория. Тогда

$$(3) \quad e_k(t) = y_{ref}(t) - y_k(t)$$

является ошибкой обучения на повторении k . Задача состоит в нахождении такой последовательности управлений $u_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, которая обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения профиля за конечное число повторений k_{fin} и сохранение этой точности при дальнейших повторениях, т.е.

$$(4) \quad \|e_k(t)\| \leq e^*, \quad k \geq k_{fin}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Величина k_{fin} определяется требуемой точностью, и всегда желательно, чтобы эта величина была как можно меньше. Прямой метод выбора этой величины неизвестен, и здесь прослеживается полная аналогия с достижением требуемого времени переходного процесса в классических задачах управления.

Поставленная задача будет решена, если указанная последовательность $u_k(t)$ удовлетворяет условиям

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k(t) - u_\infty(t)\| = 0,$$

где $u_\infty(p)$ – ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением.

Закон управления с итеративным обучением на текущем повторении формируется в виде

$$(6) \quad u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Delta u_{k+1}(t),$$

где $\Delta u_{k+1}(t)$ – корректирующая поправка, которая должна быть синтезирована так, чтобы обеспечить условия сходимости (5).

Выбор закона управления с обратной связью по текущему повторению дает одинаковую ошибку на каждом повторении. Закон управления с итеративным обучением должен изменять входной сигнал на основе состояния на текущем повторении ($x_{k+1}(t)$) и упреждающих значений выходной переменной на предыдущем повторении ($y_k(t)$). В данной статье предполагается, что вектор состояния недоступен для измерения и вместо него используется оценка.

Для построения оценки вектора состояния очевидным подходом является использование наблюдателя полного порядка; некоторые результаты по оценке вектора состояния при управлении с итеративным обучением для систем с известными параметрами были опубликованы в [13–15] для систем с известными параметрами. В [14] наблюдатель состояния используется в сочетании с подходом на основе диссипативности 2D-моделей и дивергентного метода векторных функций Ляпунова. Конечные результаты представлены в виде линейных матричных неравенств. В [13], наблюдатель состояния использовался в сочетании с синтезом управления с итеративным обучением на основе линейных матричных неравенств в конечных частотных областях. В [15] коэффициент усиления хорошо известного закона управления с итеративным обучением P -типа обновлялся на каждом повторении путем решения соответствующего дискретного уравнения Риккати. Данная статья развивает результаты [14] на случай систем с неопределенными параметрами.

Зададим наблюдатель состояния для системы (1) в виде модели в пространстве состояний с *номинальными* параметрами

$$(7) \quad \frac{d\hat{x}_k(t)}{dt} = A\hat{x}_k(t) + Bu_k(t) + F[y_k(t) - C\hat{x}_k(t)],$$

где $\hat{x}_k(t)$ — оценка вектора состояния на повторении k ; F — матрица усиления наблюдателя; и, как обычно, $\tilde{x}_k(t) = x_k(t) - \hat{x}_k(t)$ обозначает ошибку оценивания.

Потребуем, чтобы для начального состояния наблюдателя выполнялось соотношение

$$(8) \quad \hat{y}_k(0) = C\hat{x}_k(0) = y_{ref}(0).$$

2.2. Дифференциальная 2D-модель

Для управления с итеративным обучением синтезу подлежит корректирующая поправка $\Delta u_{k+1}(p)$, которая синтезируется как обычное управление с обратной связью для вводимой далее в рассмотрение вспомогательной системы относительно приращений переменных — приращения оценки и ошибки оценивания:

$$\hat{\xi}_{k+1}(t) = \hat{x}_{k+1}(t) - \hat{x}_k(t), \quad \tilde{\xi}_{k+1}(t) = \tilde{x}_{k+1}(t) - \tilde{x}_k(t).$$

В терминах этих переменных динамика системы (1) с наблюдателем (7) может быть описана уравнениями

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{\xi}_{k+1}(t)}{dt} &= A\hat{\xi}_{k+1}(t) + FC\tilde{\xi}_{k+1}(t) + Bv_{k+1}(t), \\ \frac{d\tilde{\xi}_{k+1}(t)}{dt} &= A_a(\delta)\hat{\xi}_{k+1}(t) + (A(\delta) - FC)\tilde{\xi}_{k+1}(t) + B_a(\delta)v_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где

$$A_a(\delta) = \sum_{j=1}^l \delta_j A_j, \quad B_a(\delta) = \sum_{j=1}^l \delta_j B_j, \quad v_{k+1}(t) = \Delta u_{k+1}(t).$$

Динамику процесса изменения ошибки относительно переменной k можно описать только с использованием производной от ошибки, которая в рассматриваемом случае недоступна измерению. В связи с этим будем использовать оценку производной ошибки

$$\hat{e}_k(t) = \dot{y}_{ref}(t) - C\hat{x}_k(t).$$

Обозначим $\varepsilon_k(t) = \hat{e}(t)$. С учетом (9) изменение оценки ошибки обучения (3) в зависимости от числа повторений k опишется уравнением

$$(10) \quad \varepsilon_{k+1}(t) = \varepsilon_k(t) - CA(\delta)\hat{\xi}_{k+1}(t) - CFC(\delta)\tilde{\xi}_{k+1}(t) - CB(\delta)v_{k+1}(t).$$

Обозначим $\eta_{k+1}(t) = \left[\hat{\xi}_{k+1}(t)^T \quad \tilde{\xi}_{k+1}(t)^T \right]^T$ и запишем (9), (10) в стандартной форме дифференциального повторяющегося процесса

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_{k+1}(t) &= A_{11}(\delta)\eta_{k+1}(t) + A_{12}\varepsilon_k(t) + B_1(\delta)v_{k+1}(t), \\ \varepsilon_{k+1}(t) &= A_{21}\eta_{k+1}(t) + A_{22}\varepsilon_k(t) + B_2v_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}(\delta) &= \begin{bmatrix} A & FC \\ A_a(\delta) & A(\delta) - FC \end{bmatrix}, \quad A_{12} = 0, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} -CA & -CFC \end{bmatrix}, \quad A_{22} = I, \\ B_1(\delta) &= \begin{bmatrix} B \\ B_a(\delta) \end{bmatrix}, \quad B_2 = -CB. \end{aligned}$$

Выберем корректирующую поправку в виде

$$(12) \quad \Delta u_{k+1}(t) = K_1\hat{\xi}_{k+1}(t) + K_2\varepsilon_k(t),$$

и тогда (9), (10) с учетом (12) запишется уравнениями

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{d\hat{\xi}_{k+1}(t)}{dt} &= (A + BK_1)\hat{\xi}_{k+1}(t) + FC\tilde{\xi}_{k+1}(t) + BK_2\varepsilon_k(t), \\ \frac{d\tilde{\xi}_{k+1}(t)}{dt} &= (A_a(\delta) + B_a(\delta)K_1)\hat{\xi}_{k+1}(t) + (A(\delta) - FC)\tilde{\xi}_{k+1}(t) + \\ &\quad + B_a(\delta)K_2\varepsilon_k(t), \\ \varepsilon_{k+1}(t) &= -C(A + BK_1)\hat{\xi}_{k+1}(t) - CFC\tilde{\xi}_{k+1}(t) + (I - CBK_2)\varepsilon_k(t), \end{aligned}$$

которые в более компактной форме имеют вид

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_{k+1}(t) &= A_{c11}(\delta)\eta_{k+1}(t) + A_{c12}\varepsilon_k(t), \\ \varepsilon_{k+1}(t) &= A_{c21}\eta_{k+1}(t) + A_{c22}\varepsilon_k(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{c11}(\delta) &= \begin{bmatrix} A + BK_1 & FC \\ (A_a(\delta) + B_a(\delta)K_1) & A(\delta) - FC \end{bmatrix}, & A_{c12} &= \begin{bmatrix} BK_2 \\ B_a(\delta)K_2 \end{bmatrix}, \\ A_{c21} &= \begin{bmatrix} -C(A + BK_1) & -CFC \end{bmatrix}, & A_{c22} &= I - CBK_2. \end{aligned}$$

2.3. Решение на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова

Закон управления с итеративным обучением (12) должен обеспечивать условия сходимости (5). Чтобы найти матрицы K_1 и K_2 , гарантирующие это свойство, воспользуемся методом векторных функций Ляпунова для дифференциальных повторяющихся процессов [11].

Определение. Дифференциальный повторяющийся процесс (14) называется экспоненциально устойчивым, если существуют действительные числа $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ и $0 < \zeta < 1$ такие, что

$$(15) \quad \|\eta_k(t)\|^2 + \|\varepsilon_k(t)\|^2 \leq \kappa e^{-\lambda t} \zeta^k,$$

где κ , ζ и λ не зависят от продолжительности повторения T .

Рассмотрим векторную функцию Ляпунова вида

$$(16) \quad V(\eta_k(t), \varepsilon_k(t)) = \begin{bmatrix} V_1(\eta_k(t)) \\ V_2(\varepsilon_k(t)) \end{bmatrix},$$

где

$$V_1(\eta) > 0, \quad \eta \neq 0, \quad V_2(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon \neq 0, \quad V_1(0) = 0, \quad V_2(0) = 0.$$

Аналог оператора дивергенции, который будем называть далее дивергенцией, для этой функции вдоль траекторий системы (13) задается в виде

$$(17) \quad \mathcal{D}_c V(\eta_k(t), \varepsilon_k(t)) = \frac{dV_1(\eta_k(t))}{dt} + \Delta_k V_2(\varepsilon_k(t)),$$

где

$$\Delta_k V_2(\varepsilon_k(t)) = V_2(\varepsilon_{k+1}(t)) - V_2(\varepsilon_k(t)).$$

Следующая теорема дает достаточные условия экспоненциальной устойчивости.

Теорема [11]. Дифференциальный повторяющийся процесс (14) экспоненциально устойчив, если существуют векторная функция Ляпунова (16) и положительные скаляры c_1, c_2 и c_3 , такие что

$$\begin{aligned} c_1 \|\eta_k(t)\|^2 &\leq V_1(\eta_k(t)) \leq c_2 \|\eta_k(t)\|^2, \\ c_1 \|\varepsilon_k(t)\|^2 &\leq V_2(\varepsilon_k(t)) \leq c_2 \|\varepsilon_k(t)\|^2, \\ \mathcal{D}_c V(\eta_k(t), \varepsilon_k(t)) &\leq -c_3 (\|\eta_k(t)\|^2 + \|\varepsilon_k(t)\|^2), \\ \left\| \frac{\partial V_1(\eta_k(t))}{\partial \eta} \right\| &\leq -c_4 \|\eta_k(t)\|. \end{aligned}$$

Если система (14) экспоненциально устойчива, то $\varepsilon_k(t) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда поскольку выполняется (8), то $\hat{e}_k(t) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и если при этом $e_k = \hat{e}_k + \tilde{e}_k$ будет удовлетворять заданным требованиям точности, то поставленная задача будет решена.

Для дальнейшего анализа введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{A}(\delta) &= \begin{bmatrix} A_{11}(\delta) & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_c(\delta) = \begin{bmatrix} A_{c11}(\delta) & A_{c12} \\ A_{c21} & A_{c22} \end{bmatrix}, \\ A_{cij}(\delta) &= A_{ij}(\delta) + B_i(\delta)K_j, \quad i, j = 1, 2, \\ I^{(1,0)} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I^{(0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\delta) = \begin{bmatrix} B_1(\delta) \\ B_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть матрицы $P = \text{diag}[P_1 \ P_2]$ и $K = [K_1 \ K_2]$ удовлетворяют билинейному матричному неравенству

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{A}_c^T(\delta)I^{(1,0)}P + PI^{(1,0)}\bar{A}_c(\delta) + \bar{A}_c^T(\delta)I^{(0,1)}P\bar{A}_c(\delta) - I^{(0,1)}P + \\ + Q + K^T R K \preceq 0, \quad \delta \in \mathbf{D}, \end{aligned}$$

где $Q = \text{diag}[Q_1 \ Q_2] \succ 0$ и $R \succ 0$ — весовые матрицы, которые подлежат выбору. Они аналогичны весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора, и их выбор осуществляется на основе результатов этой теории.

Поскольку $\tilde{\xi}$ недоступна, то для дальнейшего анализа матрицы $A_{c11}(\delta), A_{c21}$ необходимо представить в виде

$$(19) \quad \begin{aligned} A_{c11}(\delta) &= A_{11} + B_1(\delta)K_1C_0, \\ A_{c21} &= A_{21} + B_2K_1C_0, \end{aligned}$$

где

$$C_0 = [I \ 0].$$

Выберем компоненты векторной функции Ляпунова (16) в виде квадратичных форм $V_1(\eta_k(t)) = \eta_k^T(t)P_1\eta_k(t)$, $V_2(\varepsilon_k(t)) = \varepsilon_k^T(t)P_2\varepsilon_k(t)$, где $P_1 \succ 0$ и

$P_2 \succ 0$. Тогда, вычисляя $\mathcal{D}_c V$, получим, что при выполнении неравенства (18) $\mathcal{D}_c V \leq -Q - K^T R K$ и все условия теоремы оказываются выполненными, что гарантирует экспоненциальную устойчивость (11). Используя формулу дополнения Шура, учитывая (19) и вводя вспомогательную переменную Z_1 как решение уравнения $C_0 X_1 = Z_1 C_0$, сведем (18) к линейному матричному неравенству относительно $X = \text{diag}[X_1 \ X_2]$, где $X_1 = P_1^{-1}$ и $X_2 = P_2^{-1}$ и $Y_1 = K_1 Z_1$, $Y_2 = K_2 X_2$:

$$(20) \quad \begin{bmatrix} (A_{11}(\delta)X_1 + B_1(\delta)(Y_1 C_0)) + (A_{11}(\delta)X_1 + B_1(\delta)(Y_1 C_0))^T & (A_{12}X_2 + B_1(\delta)Y_2) \\ (A_{12}X_2 + B_1(\delta)Y_2)^T & -X_2 \\ 0 & 0 \\ (A_{21}X_1 + B_2(Y_1 C_0)) & (A_{22}X_2 + B_2 Y_2) \\ X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \\ (Y_1 C_0) & Y_2 \\ \\ 0 & (A_{21}X_1 + B_2(Y_1 C_0))^T & X_1 & 0 & (Y_1 C_0)^T \\ 0 & (A_{22}X_2 + B_2 Y_2)^T & 0 & X_2 & Y_2^T \\ -X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} \preceq 0, \quad \delta \in \mathbf{D},$$

$$C_0 X_1 = Z_1 C_0, \quad X_1 \succ 0, \quad X_2 \succ 0.$$

Поскольку (20) — линейное неравенство и зависимость от δ аффинная, то (20) будет выполняться для всех $\delta \in \mathbf{D}$ тогда и только тогда, когда оно выполняется для $\delta \in \mathbf{D}_v$.

Таким образом, если неравенство (20) разрешимо для $\delta \in \mathbf{D}_v$, то $K = [K_1 C_0 \ K_2]$, $K_2 = Y_2 X_2^{-1}$ и поскольку матрица C_0 имеет ранг, совпадающий с рангом единичной матрицы ее первого блока, то матрица Z_1 будет невырожденной и $K_1 = Y_1 Z_1^{-1}$.

Замечание. При практическом нахождении матрицы K целесообразно вместо линейного матричного неравенства (20) решать задачу максимизации следа матрицы X при ограничениях в виде этого линейного матричного неравенства. Это позволит ускорить процесс нахождения решения.

3. Пример

Рассмотрим модель однозвенного гибкого манипулятора [16], функционирующего в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения. Динамика движения манипулятора в пространстве состояний описывается урав-

нениями (1), где $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$, θ — угол поворота сервопривода, α — угол отклонения гибкого звена,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

B_{eq} — коэффициент вязкого трения сервопривода, K_s — жесткость гибкого звена, J_l — момент инерции гибкого звена относительно центра масс, J_{eq} — момент инерции сервопривода. Движение гибкого звена происходит в горизонтальной плоскости.

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм управления с итеративным обучением, при котором выходная переменная $y(t)$ воспроизводила бы желаемую траекторию $y_{ref}(t)$ с заданной точностью e^* . Непосредственному измерению доступен только угол θ .

Для расчетов и моделирования были приняты следующие значения параметров из [16]: $B_{eq} = 0,004$ Н·м/(рад/с), $K_s = 1,3$ Н·м/рад, $J_l = 0,038$ кг·м², $J_{eq} = 2,08 \cdot 10^{-3}$ кг·м². Продолжительность цикла повторения 3 с, требуемая точность $e^* = 0,005$ рад. При вычислениях использовался метод Эйлера с шагом $T_s = 0,001$ с.

Желаемая траектория движения звена представлена на рис. 1 и описывается уравнением

$$y_{ref}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, \quad t \in [0, T].$$

В данном примере $CB = 0$, а разработанная теория предполагает, чтобы $CB \neq 0$. С целью обойти это затруднение воспользуемся тем, что для данной системы

$$\dot{y}_k = C\dot{x}_k = C_1 x_k,$$

где $C_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$.

Поскольку непосредственно измеряется только угол, то вместо производной можно использовать лишь ее оценку $\hat{y}_k = C_1 \hat{x}_k$, где \hat{x}_k определяется наблюдателем (7). В этом случае динамику процесса изменения ошибки относительно переменной k можно описать только с использованием оценки второй

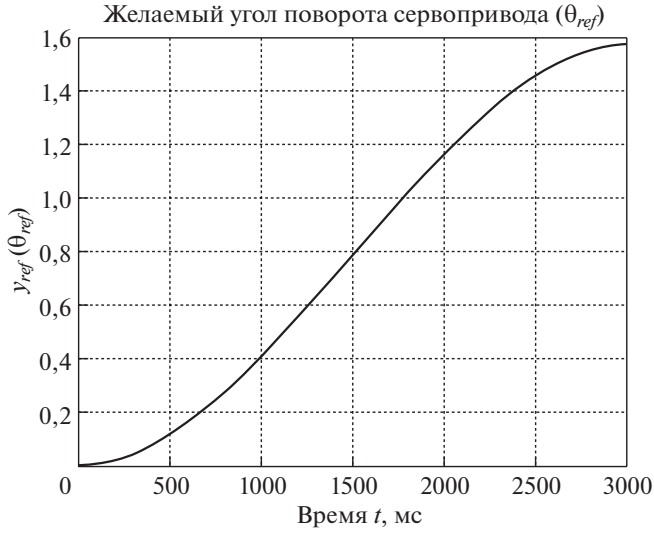


Рис. 1. Желаемая траектория.

производной

$$\hat{e}_k = \ddot{y}_{ref} - C_1 \hat{x}_k.$$

Обозначим $\epsilon_k = \hat{e}_k$, и тогда ошибка обучения опишется уравнением

$$(21) \quad \epsilon_{k+1} = \epsilon_k - C_1 A \hat{\xi}_{k+1} - C_1 F C \tilde{\xi}_{k+1} - C_1 B \Delta u_{k+1}.$$

Динамика системы с учетом наблюдателя теперь будет описываться уравнениями

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_{k+1}(t) &= A_{11}(\delta) \eta_{k+1}(t) + A_{12} \epsilon_k(t) + B_1 v_{k+1}(t), \\ \epsilon_{k+1}(t) &= A_{21} \eta_{k+1}(t) + A_{22} \epsilon_k(t) + B_2 v_{k+1}(t), \end{aligned}$$

где

$$A_{11}(\delta) = \begin{bmatrix} A & FC \\ A_a(\delta) & A(\delta) - FC \end{bmatrix}, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -C_1 A & -C_1 FC \end{bmatrix}, \\ A_{22} = I, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = -C_1 B.$$

Начальные условия для наблюдателя в дополнение к (8) должны удовлетворять условию

$$\hat{y}_k(0) = C \hat{x}_k(0) = \dot{y}_{ref}(0).$$

Выберем корректирующую поправку в виде

$$\Delta u_{k+1} = K_1 \hat{\xi}_{k+1} + K_2 \epsilon_k.$$

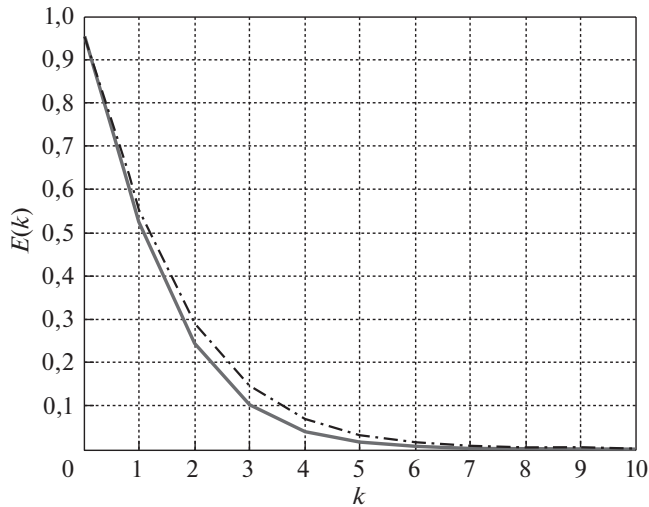


Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка обучения при различных разбросах неопределенных параметров J_l и K_s .

Тогда закон управления с итеративным обучением будет иметь вид

$$(23) \quad \begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \Delta u_{k+1} = u_k + K_1(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k) + K_2(\ddot{y}_{ref} - C_1\hat{x}_k) = \\ &= u_k + K_1(\hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k) + K_2(\ddot{y}_{ref} - C_1A\hat{x}_k - C_1Bu_k - C_1F(y_k - C\hat{x}_k)). \end{aligned}$$

Чтобы оценить эффективность этого закона управления с итеративным обучением, для каждого повторения k введем среднеквадратическое отклонение ошибки обучения

$$(24) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |e_k(t)|^2 dt}.$$

Предположим, что момент инерции гибкого звена может принимать значения от $J_l + \Delta \underline{J}_l$ до $J_l + \Delta \overline{J}_l$, что с физической точки зрения может означать наличие или отсутствие груза на гибком звене или наличие различных грузов. Также добавим неопределенность по жесткости K_s , полагая, что жесткость может принимать значения от $K_s + \Delta \underline{K}_s$ до $K_s + \Delta \overline{K}_s$. В этом случае матрица параметров $A(\delta)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} A(\delta) &= A + A_a(\delta), \quad A_a(\delta) = \delta A, \quad \delta = \{\delta_1; \delta_2\}, \\ \delta_1 &= [\underline{J}_l; \overline{J}_l], \quad \delta_2 = [\underline{K}_s; \overline{K}_s]. \end{aligned}$$

Параметры фильтра выберем с помощью стандартной функции `lqr` пакета MATLAB из условия, что вещественные части собственных значений матрицы $(A - FC)$ меньше $-0,15$. Этому условию удовлетворяет матрица $F = [0,1881 \quad -0,0026 \quad 0,0127 \quad -0,0055]$. Решая задачу максимизации $\text{tr}[X]$ при ограничениях в виде неравенства (20), с учетом очевидных изменений

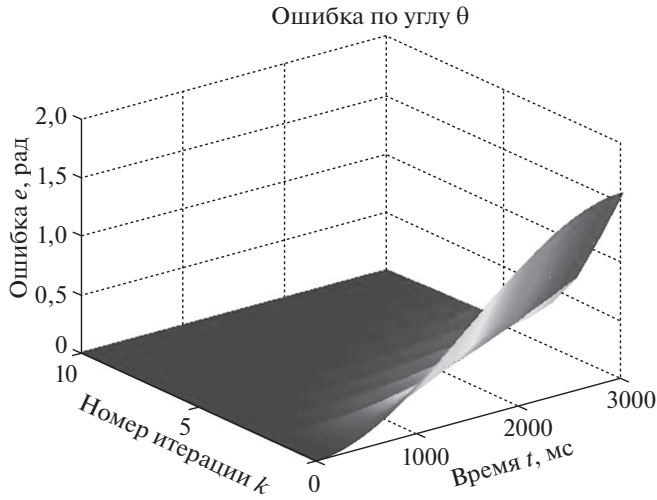


Рис. 3. Изменение ошибки обучения в зависимости от числа повторений.

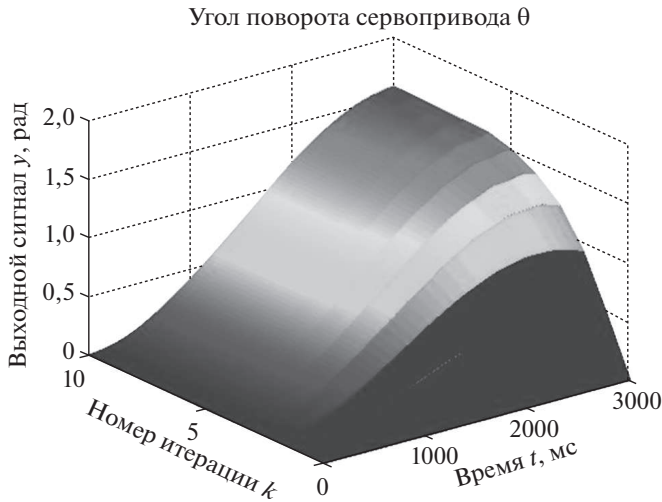


Рис. 4. Изменение выходной переменной в зависимости от числа повторений.

матриц $A_{11}(\delta)$, A_{12} , A_{21} , A_{22} , $B_1(\delta)$, B_2 , и задавая

$$\begin{aligned} \Delta \bar{J}_l &= 0,3J_l, & \Delta \underline{J}_l &= -0,3J_l, & \Delta \bar{K}_s &= 0,1K_s, & \Delta \underline{K}_s &= -0,1K_s, \\ Q &= \text{diag}[Q_1 \ Q_2], & Q_1 &= 10^{-2}I, & Q_2 &= 10^{-3}I, & R &= 1, \end{aligned}$$

получим

$$K_1 = [-0,0000 \quad -1,2385 \quad 0,0019 \quad -0,0004], \quad K_2 = 0,0020.$$

На рис. 2 представлен график изменения среднеквадратической ошибки обучения (24) в зависимости от числа повторений k при указанном разбросе параметров J_l и K_s (штрихпунктирная линия). При меньшем разбросе этих параметров $\Delta \bar{J}_l = 0,1J_l$, $\Delta \underline{J}_l = -0,1J_l$, $\Delta \bar{K}_s = 0,005K_s$, $\Delta \underline{K}_s = -0,005K_s$

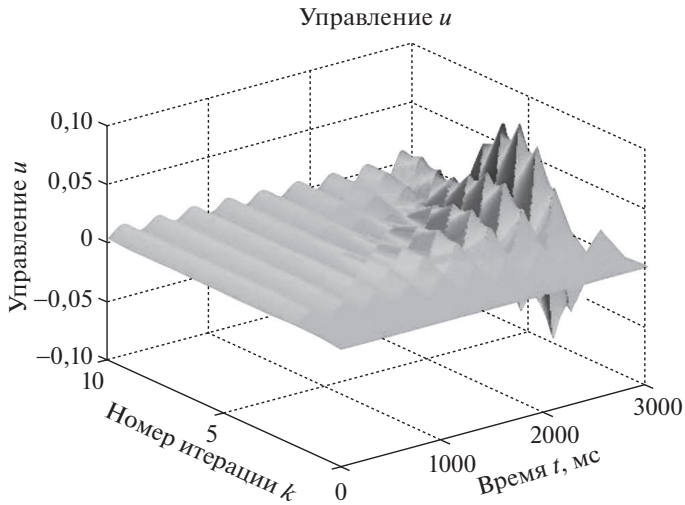


Рис. 5. Изменение управления в зависимости от числа повторений.

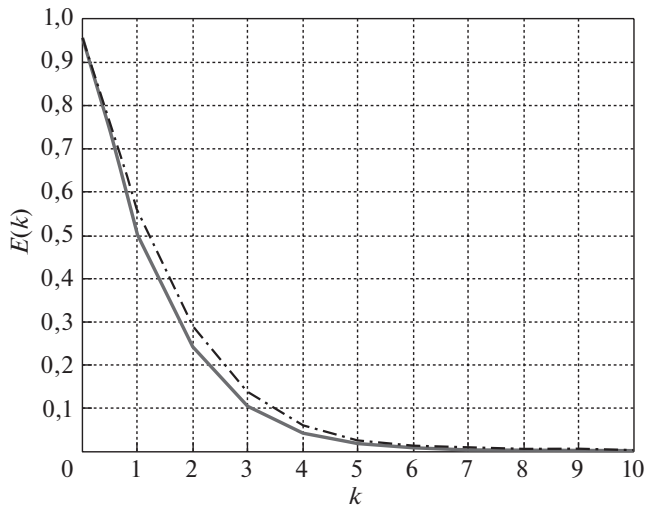


Рис. 6. Среднеквадратическая ошибка обучения в случае сочетания неопределенных параметров J_l и K_s на верхней границе (штрихпунктирная линия) и на нижней границе.

ошибка сходится к нулю быстрее (сплошная линия). Требуемая точность $e^* = 0,005$ рад достигается за 8 повторений ($k_{fin} = 8$, $E(8) = 0,003454$ рад $\approx 0,2^\circ$). При большем разбросе неопределенных параметров система может не только не достичь требуемой точности, но и не стабилизироваться, это вполне объяснимо — энергии управления не хватает для компенсации неопределенности.

На рис. 3–5 представлены изменения ошибки, выходной переменной и управления в зависимости от времени на текущем повторении и числа повторений.

На рис. 6 представлен случай, когда оба неопределенных параметра J_l и K_s находятся на верхней границе, а именно $\Delta \overline{J_l} = 0,3J_l$, $\Delta \overline{K_s} = 0,1K_s$ (штрих-пунктирная линия), или на нижней границе $\Delta \underline{J_l} = -0,3J_l$, $\Delta \underline{K_s} = -0,1K_s$ (сплошная линия).

4. Заключение

В данной статье разработан метод синтеза управления с итеративным обучением с использованием наблюдателя состояния для случая дифференциальных повторяющихся процессов, когда модель объекта управления содержит аффинные неопределенности. Результаты решения данной задачи позволяют повысить скорость сходимости процессов управления с итеративным обучением и обеспечить робастность этих процессов по отношению к различным неопределенностям, неизбежно возникающим при функционировании реальных систем. Значительный интерес представляет исследование влияния динамики наблюдателя на ошибку обучения. Эта задача пока остается открытой. Сочетание управления с итеративным обучением и управления с обратной связью также представляет интересную задачу для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // IEEE Control Syst. Magaz. 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
2. *Ahn H-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Survey and Categorization // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
3. *Freeman C.T., Rogers E., Hughes A.-M., Burridge J.H., Meadmore K.L.* Iterative Learning Control in Health Care: Electrical Stimulation and Robotic-Assisted Upper-Limb Stroke Rehabilitation // IEEE Control Syst. Magaz. 2012. V. 47. P. 70–80.
4. *Meadmore K.L., Exell T.A., Hallewell E., Hughes A.-M., Freeman C.T., Kutlu M., Benson V., Rogers E., Burridge J.H.* The Application of Precisely Controlled Functional Electrical Stimulation to the Shoulder, Elbow and Wrist for Upper Limb Stroke Rehabilitation: a Feasibility Study // J. NeuroEngineer. Rehabilitation. 2014. P. 11–105.
5. *Ketelhut M., Stemmler S., Gesenhues J., Hein M., Abel D.* Iterative Learning Control of Ventricular Assist Devices with Variable Cycle Durations // Control Engin. Pract. 2019. V. 83. P. 33–44.
6. *Sammons P.M., Gegel M.L., Bristow D.A., Landers R.G.* Repetitive Process Control of Additive Manufacturing with Application to Laser Metal Deposition // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2019. V. 27. No. 2. P. 566–575.
7. *Sornmo O., Bernhardsson B., Kroling O., Gunnarsson P., Tenhamn R.* Frequency-Domain Iterative Learning Control of a Marine Vibrator // Control Engin. Pract. 2016. V. 47. P. 70–80.
8. *Lim I., Hoelzle D.J., Barton K.L.* A Multi-Objective Iterative Learning Control Approach for Additive Manufacturing Applications // Control Eng. Pract. 2017. V. 64. P. 74–87.

9. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // *J. Robot. Syst.* 1984. V. 1. P. 123–140.
10. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / *Lect. Notes Control Inform. Sci.* Berlin: Springer-Verlag, 2007. V. 349.
11. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Galkowski K., Rogers E.* Dissipativity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes // *Syst. Control Lett.* 2016. V. 91. P. 14–20.
12. *Hladowski L., Galkowski K., Cai Z., Rogers E., Freeman C., Lewin P.* Experimentally Supported 2D Systems Based Iterative Learning Control Law Design for Error Convergence and Performance // *Control Engin. Pract.* 2010. V. 18. P. 339–348.
13. *Paszke W., Rogers E., Patan K.* Observer-Based Iterative Learning Control Design in the Repetitive Process Setting // *IFAC-PapersOnline.* 2017. V. 50. No. 1. P. 13390–13395.
14. *Емельянова Ю.П., Пахшин П.В.* Синтез управления с итеративным обучением на основе наблюдателя состояния // *АиТ.* 2019. № 9. С. 9–24.
Emelianova J.P., Pakshin P.V. Iterative Learning Control Design Based on State Observer // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 9. P. 1561–1573.
15. *Jayawardhana R.N., Ghosh B.K.* Kalman Filter Based Iterative Learning Control for Discrete Time MIMO Systems // *Proc. 30th Chinese Control and Decision Conf. (2018 CCDC).* 2018. P. 2257–2264.
16. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 27.11.2019

После доработки 11.02.2020

Принята к публикации 04.03.2020