

Управление в технических системах

© 2020 г. А.И. ПЕСЧАНСКИЙ, д-р техн. наук (peschansky_sntu@mail.ru)
(Севастопольский государственный университет)

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕНАДЕЖНОЙ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ И УЧЕТОМ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПО НАРАБОТКЕ¹

Рассматривается ненадежная восстанавливаемая одноканальная система обслуживания с потерями, в которой во время обслуживания требований могут происходить отказы прибора. Случайные величины, описывающие систему, имеют распределения общего вида. Для повышения эффективности системы предлагается проводить профилактическое техническое обслуживание прибора в тот момент, когда накопленное время обслуживания требований превышает заранее заданный уровень. Построена полумарковская модель эволюции системы во времени. С помощью найденного стационарного распределения вложенной цепи Маркова устанавливаются выражения для определения финальных вероятностей и средних времен пребывания системы в различных физических состояниях. Решается задача оптимизации периодичности проведения технического обслуживания прибора с целью максимизации средней удельной прибыли и минимизации средних удельных затрат системы.

Ключевые слова: одноканальная система обслуживания с отказами, техническое обслуживание, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, финальные вероятности состояний, стационарные показатели эффективности.

DOI: 10.31857/S0005231020070065

1. Введение

Интерес к системам с отказами каналов обслуживания связан с практической важностью адекватного описания функционирования современных технических и информационных систем. Обзор по ненадежным системам обслуживания можно найти, например, в [1, 2]. Отметим некоторые результаты исследований в этом направлении. Так, в [3] исследована многоканальная система обслуживания с каналами конечной надежности при частном виде функций распределения случайных величин, описывающих процессы в системе. В [4] описана система $M/G/1/1$ с двумя типами заявок, в которой

¹ Работа выполнена в рамках Государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.10513.2018/11.12) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00704).

функции распределения времени восстановления и времени между отказами имеют общий вид. В [5] решена задача оптимизации групповой политики восстановления отказавших обслуживающих приборов. В [6] исследована дисциплина обслуживания в двухканальной неоднородной системе обслуживания с различными надежностными характеристиками и интенсивностями обслуживания заявок. Следует отметить, что наиболее полные результаты получены при условии, что случайные факторы, описывающие ненадежные системы, имеют показательные распределения. Модели ненадежных одноканальных систем обслуживания в случае общего вида распределений построены в [7, 8]. Упомянутые публикации — далеко не полный список исследований по определению характеристик систем обслуживания с каналами, которые могут отказывать.

Системы с ненадежными приборами часто являются предметом современных исследований, поскольку развитие технологий приводит к появлению новых содержательных математических задач. Наряду с определением характеристик систем с отказами каналов важно оказывать воздействия на эти показатели. В ряде случаев повысить эффективность системы можно за счет проведения предупредительного технического обслуживания (ТО) канала. Так, в [9] исследована стратегия, при которой решение о проведении ТО зависит от длительности обслуживания требования. В [10] построена модель системы с учетом наработки прибора на отказ и отложенным ТО, в [11] — с учетом ТО системы в случае скрытых отказов прибора, в [12] — с учетом ТО в зависимости от суммарной наработки прибора на отказ, в [13] — с учетом различных типов восстановления прибора. В данной статье исследуется еще одна стратегия ТО ненадежной одноканальной системы обслуживания с потерями: ТО прибора начинается в тот момент, когда накопленное время обслуживания требований после завершения восстановительных работ превысит заранее заданный уровень.

2. Постановка задачи

В ненадежную систему обслуживания $GI/G/1/0$ поступает рекуррентный поток требований, порожденный случайной величиной (СВ) β с функцией распределения (ФР) $G(t) = P\{\beta \leq t\}$. Длительность обслуживания требования — СВ α с ФР $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$. В начальный момент времени начинается обслуживание поступившего требования и отсчет наработки прибора до отказа. Под наработкой понимается накопленное время, затраченное прибором на обслуживание требований. Во время обслуживания требования возможен отказ прибора, который происходит в момент достижения прибором наработки, реализуемой как СВ γ с ФР $\Phi(t) = P\{\gamma \leq t\}$. Отказ обнаруживается мгновенно, и сразу же начинается аварийное восстановление (АВ) прибора, которое длится случайное время σ_a с ФР $\Psi_a(t) = P\{\sigma_a \leq t\}$.

Перед началом эксплуатации назначается предельно допустимый детерминированный уровень наработки τ , при достижении которого незамедлительно начинается ТО прибора. Длительность проведения ТО — СВ σ_p с ФР $\Psi_p(t) = P\{\sigma_p \leq t\}$. Обслуживание требования, находящегося на приборе в момент начала АВ или ТО, прерывается и на дообслуживание требование

не возвращается. В результате любого вида восстановления надежностные характеристики прибора полностью обновляются, и в момент поступления первого требования в обновленную систему весь процесс ее функционирования повторяется.

Предполагается, что $0 < P\{\alpha < \beta\} < 1$ и $0 < P\{\alpha < \gamma\} < 1$; СВ $\alpha, \beta, \gamma, \sigma_a, \sigma_p$ независимы, имеют соответственно плотности распределения вероятностей $f(t), g(t), \varphi(t), \psi_a(t), \psi_p(t)$, конечные математические ожидания $M\alpha, M\beta, M\gamma, M\sigma_a, M\sigma_p$ и дисперсии.

Требуется построить полумарковскую модель функционирования описанной выше системы обслуживания, найти ее стационарные вероятностные и экономические характеристики, решить задачу оптимизации периодичности проведения ТО прибора с целью повышения средней удельной прибыли в единицу календарного времени и снижения средних удельных затрат в единицу времени обслуживания требований.

3. Построение полумарковской модели системы

Для описания функционирования системы используем аппарат теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний. Приведем краткие сведения из теории этих процессов. Пусть (E, ξ) — измеримое пространство, E интерпретируется как фазовое пространство состояний стохастической системы, ξ — булева алгебра выделенных подмножеств из E , интерпретируемых как совокупность наблюдаемых подмножеств состояний системы. Полумарковский процесс с общим фазовым пространством состояний определяется с помощью процесса марковского восстановления, который, в свою очередь, задается полумарковским ядром $Q(t, x, B), x \in E, B \in \xi, t \geq 0$ [14, 15].

Процесс марковского восстановления есть двухмерная цепь Маркова $\{S_n, \theta_n; n \geq 0\}$ со значениями в $E \times [0, \infty)$, вероятности перехода которой определяются равенством

$$P\{S_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t / S_n = x\} = Q(t, x, B).$$

Первая компонента $\{S_n; n \geq 0\}$ процесса марковского восстановления $\{S_n, \theta_n; n \geq 0\}$ является однородной цепью Маркова с переходными вероятностями

$$P(x, B) = P\{S_{n+1} \in B / S_n = x\} = Q(+\infty, x, B),$$

и называется вложенной цепью Маркова (ВЦМ). Случайные величины $\{\theta_{n+1}, n \geq 0\}$, составляющие вторую компоненту процесса марковского восстановления, можно интерпретировать как времена пребывания системы в состояниях $\{S_n; n \geq 0\}$, они определяют интервалы между моментами марковского восстановления τ_n :

$$\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k, \quad n \geq 1, \quad \tau_0 = \theta_0 = 0.$$

Полумарковский процесс $S(t)$, $t \geq 0$, в измеримом фазовом пространстве (E, ξ) , соответствующий процессу марковского восстановления $\{S_n, \theta_n; n \geq 0\}$, задается соотношением

$$S(t) = S_{\nu(t)}, \quad t \geq 0,$$

где $\nu(t)$ — число моментов марковского восстановления на отрезке $[0, t]$.

Полумарковское ядро $Q(t, x, B)$ процесса марковского восстановления $\{S_n, \theta_n; n \geq 0\}$ с условно независимыми компонентами представимо в виде

$$Q(t, x, B) = P(x, B)G_x(t), \quad x \in E, \quad B \in \xi, \quad t \geq 0,$$

где

$$G_x(t) = P\{\theta_{n+1} \leq t / S_n = x\} = Q(t, x, E)$$

— функции распределения СВ θ_{n+1} , зависящие от первой компоненты. Таким образом, для задания процесса марковского восстановления достаточно описать фазовое пространство состояний E , определить переходные вероятности ВЦМ $\{S_n; n \geq 0\}$ и функции распределения случайных величин θ_n .

Начнем с описания фазового пространства состояний. Рассматриваемая система может находиться в следующих физических состояниях: 0 — прибор в работоспособном состоянии ожидает требование; 1 — прибор занят обслуживанием; 2 — проводится АВ прибора; 3 — проводится ТО прибора. Расширим пространство физических состояний за счет введения непрерывных компонент, в результате фазовое пространство состояний системы будет иметь вид

$$E = \{1, 1uv, 2x, 3x, 0x, 0xuv; x > 0, u > 0, 0 < v < \tau\}.$$

Поясним коды состояний: 1 — начинается обслуживание первого требования, поступившего после завершения ТО или АВ прибора; $1uv$ — начинается обслуживание поступившего требования, наработка прибора в этот момент равна v , величина оставшейся наработки до отказа равна u ; $2x$ — произошел отказ и начинается АВ прибора, до поступления следующего требования в систему остается время x ; $3x$ — величина наработки достигла предельного уровня и начинается ТО прибора, до поступления следующего требования в систему остается время x ; $0x$ — завершилось ТО или АВ прибора, до поступления следующего требования остается время x ; $0xuv$ — закончилось обслуживание требования, наработка прибора в этот момент равна v , величина оставшейся наработки до отказа равна u , до поступления следующего требования в систему остается время x .

Временная диаграмма функционирования системы представлена на рис. 1. Времена пребывания системы в соответствующих состояниях определяются формулами

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \alpha \wedge \gamma \wedge \tau, & \theta_{1uv} &= \alpha \wedge u \wedge (\tau - v); \\ \theta_{2x} &= \sigma_a; & \theta_{3x} &= \sigma_p; & \theta_{0xuv} &= \theta_{0x} = x, \end{aligned}$$

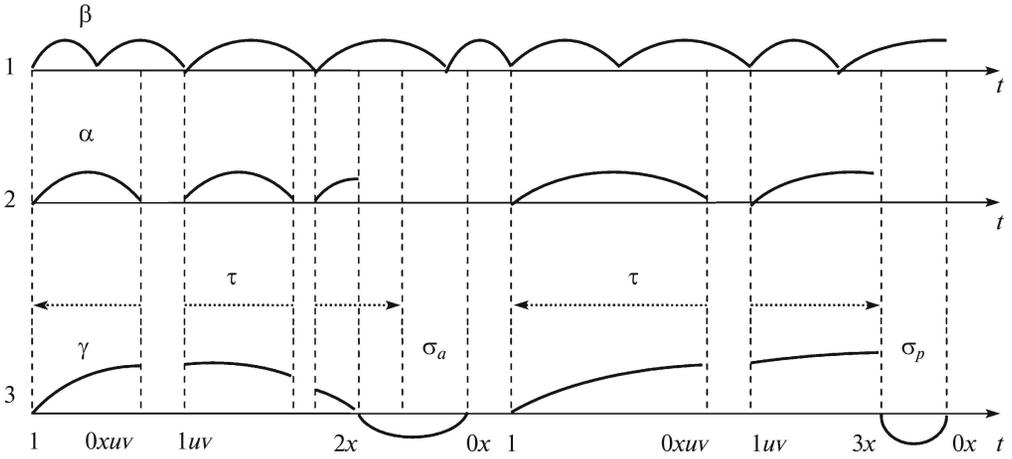


Рис. 1. Временная диаграмма функционирования системы: 1 — входящий поток (β — время между требованиями); 2 — процесс обслуживания требований (α — время обслуживания); 3 — процесс функционирования прибора (γ — наработка до отказа, σ_a — аварийное восстановление, σ_p — техническое обслуживание; τ — предельно допустимый уровень наработки).

где \wedge — знак минимума, исходя из которых нетрудно выписать функции распределения времен пребывания в состояниях.

Опишем случайные события и вероятности переходов из состояний ВЦМ $\{S_n; n \geq 0\}$ с учетом их содержательного смысла. Например, переходы из состояния $1uv$, в котором система пребывает время $\alpha \wedge u \wedge (\tau - v)$, зависят от реализации минимума случайного времени α обслуживания требования и детерминированных величин в момент начала обслуживания требования: оставшейся наработки прибора u до отказа и оставшейся наработке $\tau - v$ до проведения ТО прибора. Если время обслуживания требования меньше указанных наработок, причем $u < (\tau - v)$, тогда в момент окончания обслуживания требования система переходит в состояние $(0xu', v + u - u')$, где u' — величина оставшейся наработки прибора до отказа в этот момент, $v + u - u'$ — наработка прибора, x — время до поступления ближайшего требования в систему (время обслуживания реализуется как $u - u'$).

Аналогично рассматриваются и другие случаи реализации времени пребывания системы в состоянии $1uv$. В результате получаем:

$$\begin{aligned}
 & \{1uv \rightarrow (0xu', v + u - u')\} = \\
 & = \{\alpha < u < (\tau - v), \alpha \in u - du', \beta_{u-u'} \in dx, u' < u, x > 0\}, \\
 & \{1uv \rightarrow (0x, u + v - v', v')\} = \\
 & = \{\alpha < (\tau - v) < u, \alpha \in dv' - v, \beta_{v'-v} \in dx, v < v' < \tau, x > 0\}, \\
 & \{1uv \rightarrow 2x\} = \{u < \alpha \wedge (\tau - v), \beta_u \in dx, x > 0\}, \\
 & \{1uv \rightarrow 3x\} = \{\tau - v < \alpha \wedge u, \beta_{\tau-v} \in dx, x > 0\}.
 \end{aligned}$$

Здесь β_t — прямое остаточное время для процесса восстановления, порожденного СВ β , с плотностью распределения

$$v_g(t, x) = g(t + x) + \int_0^t h_g(t - s)g(s + x)ds,$$

$h_g(t)$ — плотность функции восстановления $H_g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(t)$ этого процесса [16]. Величина β_t фиксирует время в момент t до ближайшего момента поступления требования в систему. Запись, например, $\alpha \in u - du'$ означает, что $u - u' < \alpha \leq u - u' + du'$.

Иллюстрации переходов приведены на рис. 2–4, где использованы обозначения: 1 — входящий поток требований; 2 — процесс обслуживания требований; 3 — процесс функционирования прибора (v, v' — наработка, u, u' — оставшаяся наработка до отказа; τ — предельно допустимый уровень наработки; σ_a — длительность АВ; σ_p — длительность ТО прибора).

Вероятности переходов из состояния $1uv$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} p_{1uv}^{(0dx, du', v+u-du')} &= f(u - u')v_g(u - u', x)dxdu', \quad u' < u, \quad x > 0, \quad u < \tau - v; \\ p_{1uv}^{(0dx, v+u-dv', dv')} &= f(v' - v)v_g(v' - v, x)dx dv', \quad v < v' < \tau, \quad x > 0, \quad u > \tau - v; \\ p_{1uv}^{2dx} &= \bar{F}(u)v_g(u, x)dx, \quad x > 0, \quad u < \tau - v, \quad \bar{F}(u) = 1 - F(u); \\ p_{1uv}^{3dx} &= \bar{F}(\tau - v)v_g(\tau - v, x)dx, \quad x > 0, \quad u > \tau - v. \end{aligned}$$

Аналогично определяются вероятности перехода из других состояний:

$$\begin{aligned} p_1^{0dxduv} &= f(v)\varphi(v + u)v_g(v, x)dudvdx, \quad u > 0, \quad x > 0, \quad 0 < v < \tau; \\ p_1^{2dx} &= \int_0^{\tau} \varphi(t)\bar{F}(t)v_g(t, x)dt dx, \quad x > 0; \\ p_1^{3dx} &= \bar{F}(\tau)\bar{\Phi}(\tau)v_g(\tau, x), \quad x > 0, \\ \bar{\Phi}(\tau) &= 1 - \Phi(\tau); \quad P_{0xuv}^{1uv} = P_{0x}^1 = 1; \\ p_{3x}^{0dy} &= \psi_p(x - y) + \int_x^{\infty} \psi_p(t)v_g(t - x, y)dt dy, \quad 0 < y < x; \\ p_{3x}^{0dy} &= \int_x^{\infty} \psi_p(t)v_g(t - x, y)dt dy, \quad y > x; \\ p_{2x}^{0dy} &= \psi_a(x - y) + \int_x^{\infty} \psi_a(t)v_g(t - x, y)dt dy, \quad 0 < y < x; \\ p_{2x}^{0dy} &= \int_x^{\infty} \psi_a(t)v_g(t - x, y)dt dy, \quad y > x. \end{aligned}$$

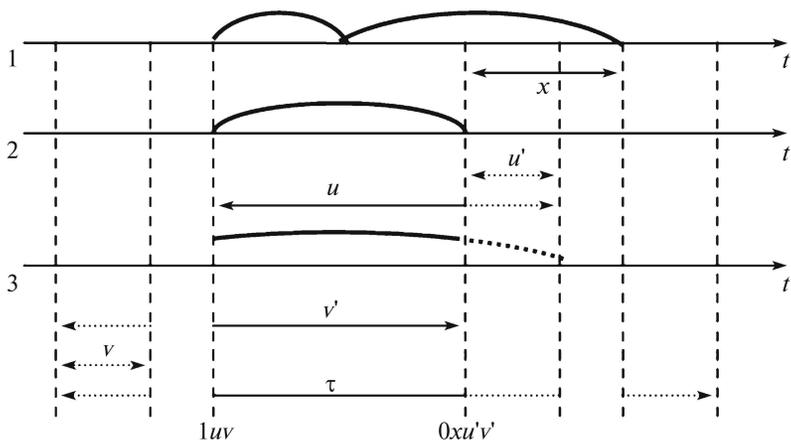


Рис. 2. Событие перехода из состояния $1uv$ в состояние $0xu'v'$, где $v' = v + u - u'$; $u < \tau - v$.

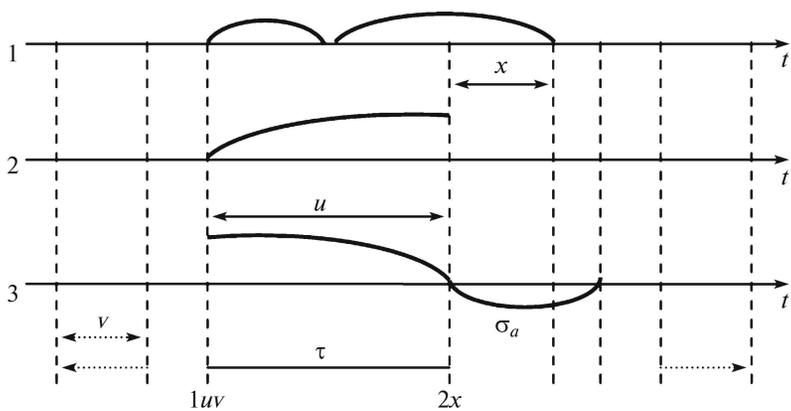


Рис. 3. Событие перехода из состояния $1uv$ в состояние $2x$.

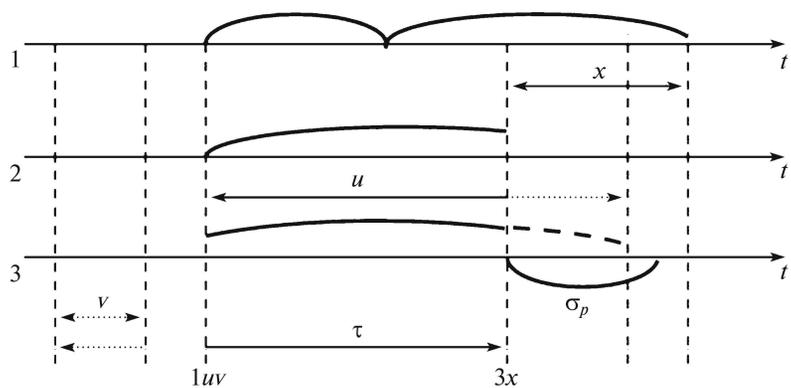


Рис. 4. Событие перехода из состояния $1uv$ в состояние $3x$.

Отметим, что построенный процесс $S(t)$, $t \geq 0$, является регенерирующим. Точкой регенерации является момент попадания системы в состояние 1, т.е. начало обслуживания первого требования после завершения любой из восстановительных работ.

4. Стационарные характеристики системы

Для нахождения стационарных характеристик системы потребуется определить стационарное распределение ВЦМ $\{S_n; n \geq 0\}$ полумарковского процесса $S(t)$, $t \geq 0$, описывающего ее функционирование. Введем следующие обозначения: ρ_1 — стационарная вероятность пребывания в состоянии 1, а $\rho(1uv)$, $\rho(0xuv)$, $\rho(0x)$, $\rho(2x)$ и $\rho(3x)$ — плотности стационарного распределения ВЦМ для соответствующих состояний.

Теорема 1. Стационарное распределение вложенной цепи Маркова $\{S_n; n \geq 0\}$ полумарковского процесса $S(t)$, $t \geq 0$, определяется формулами:

$$\begin{aligned} \rho(1uv) &= \rho_1 h_f(v) \varphi(u+v), \\ \rho(0xuv) &= \rho_1 \varphi(u+v) \left[f(v) v_g(v, x) + \int_0^v h_f(v-s) f(s) v_g(s, x) ds \right], \\ \rho(3x) &= \rho_1 \bar{\Phi}(\tau) \left[\bar{F}(\tau) v_g(\tau, x) + \int_0^\tau h_f(\tau-s) \bar{F}(s) v_g(s, x) ds \right], \\ (1) \quad \rho(2x) &= \rho_1 \int_0^\tau \varphi(t) \left[\bar{F}(t) v_g(t, x) + \int_0^t h_f(t-s) \bar{F}(s) v_g(s, x) ds \right] dt, \\ \rho(0x) &= \rho_1 \bar{\Phi}(\tau) \int_0^\infty \psi_p(t) \left[\bar{F}(\tau) v_g(\tau+t, x) + \int_0^\tau h_f(\tau-s) \bar{F}(s) v_g(s+t, x) ds \right] dt + \\ &+ \rho_1 \int_0^\infty \psi_a(t) dt \int_0^\tau \varphi(y) \left[\bar{F}(y) v_g(y+t, x) + \int_0^y h_f(y-s) \bar{F}(s) v_g(s+t, x) ds \right] dy, \\ \rho_1 &= \left[3 + 2 \int_0^\tau h_f(s) \bar{\Phi}(s) ds \right]^{-1}, \end{aligned}$$

где $h_f(v)$ — плотность функции восстановления $H_f(v)$, порожденной случайным временем α обслуживания требования.

Доказательства теоремы 1 и последующих теорем 2 и 3 приводятся в Приложении.

Отметим вероятностный смысл выражений, входящих в формулы для плотностей стационарного распределения. По переменной x функ-

ция $f(v)v_g(v, x) + \int_0^v h_f(v-s)f(s)v_g(s, x)ds$ является плотностью распределения интервала времени от момента окончания обслуживания требования до момента поступления следующего требования при условии, что наработка прибора в момент завершения обслуживания равна v . По переменной x функция $\overline{F}(t)v_g(t, x) + \int_0^t h_f(t-s)\overline{F}(s)v_g(s, x)ds$ — плотность распределения интервала времени между моментом отказа прибора и моментом поступления следующего требования в систему при условии, что наработка прибора в момент отказа достигла уровня t . Функция $\overline{F}(\tau)v_g(\tau+t, x) + \int_0^\tau h_f(\tau-s)\overline{F}(s)v_g(s+t, x)ds$ по переменной x — плотность распределения интервала времени между моментом завершения ТО прибора и первым после этого моментом поступления требования в систему при условии, что ТО прибора длилось время t .

Найдем финальные вероятности и средние стационарные времена пребывания системы в различных физических состояниях. Для этого разобьем фазовое пространство состояний E на непересекающиеся подмножества, соответствующие различным физическим состояниям прибора: $E_0 = \{0x, 0xuv\}$ — работоспособный прибор находится в состоянии ожидания требования; $E_1 = \{1, 1uv\}$ — прибор обслуживает требование; $E_2 = \{2x\}$ — проводится АВ прибора; $E_3 = \{3x\}$ — проводится ТО прибора.

В следующей теореме 2 устанавливаются выражения для предельных значений p_i^* переходных вероятностей

$$\Phi(t, x, E_i) = P \{S(t) \in E_i / S(0) = x\}, \quad x \in E, \quad i = \overline{0, 3},$$

полумарковского процесса $S(t), t \geq 0$, а в теореме 3 — выражения для средних стационарных времен пребывания в этих состояниях. Утверждения этих теорем содержат следующие характеристики $S(t), t \geq 0$, как регенерирующего процесса:

$$\overline{N}_{\text{обс}}(\tau) = \int_0^\tau \overline{\Phi}(v)h_f(v)dv$$

— среднее число полностью обслуженных требований в интервале между восстановительными работами;

$$\overline{N}_{\text{пот}}^{\text{обс}}(\tau) = \int_0^\tau \overline{\Phi}(v)f(v)H_g(v)dv + \int_0^\tau \overline{\Phi}(v)dv \int_0^v h_f(v-s)f(s)H_g(s)ds$$

— среднее число требований, потерянных по причине занятости прибора обслуживанием этих требований;

$$\overline{N}_{\text{пот}}^p(\tau) = \overline{\Phi}(\tau) \int_0^\infty \psi_p(t) \left[\overline{F}(\tau)\widehat{H}_g(\tau+t) + \int_0^\tau h_f(\tau-s)\overline{F}(s)\widehat{H}_g(s+t)ds \right] dt$$

— среднее число потерянных требований на периоде регенерации по причине ТО прибора и за время обслуживания требования, на котором достигается

предельно допустимая наработка на отказ;

$$\begin{aligned} \overline{N}_{\text{пот}}^a(\tau) &= \\ &= \int_0^{\infty} \psi_a(t) dt \int_0^{\tau} \varphi(y) \left[\overline{F}(y) \widehat{H}_g(y+t) + \int_0^y h_f(y-s) \overline{F}(s) \widehat{H}_g(s+t) ds \right] dy \end{aligned}$$

— среднее число потерянных требований на периоде регенерации по причине АВ прибора и за время обслуживания требования, находящегося на приборе в момент его отказа. Здесь

$$\widehat{H}_g(t) = 1 + H_g(t).$$

Теорема 2. Финальные вероятности $p_i^*(\tau)$ пребывания системы в состояниях E_i , $i = \overline{0, 3}$, определяются формулами:

$$(2) \quad \begin{aligned} p_0^*(\tau) &= 1 - \frac{M(\gamma \wedge \tau) + M\sigma_a P(\gamma < \tau) + M\sigma_p P(\gamma > \tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)}, \\ p_1^*(\tau) &= \frac{M(\gamma \wedge \tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)}, \quad p_2^*(\tau) = \frac{M\sigma_a P(\gamma < \tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)}, \quad p_3^*(\tau) = \frac{M\sigma_p P(\gamma > \tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)}, \end{aligned}$$

где

$$\overline{N}(\tau) = \overline{N}_{\text{обс}}(\tau) + \overline{N}_{\text{пот}}^{\text{обс}}(\tau) + \overline{N}_{\text{пот}}^p(\tau) + \overline{N}_{\text{пот}}^a(\tau)$$

— среднее число требований, поступающих в систему на периоде регенерации.

Теорема 3. Средние стационарные времена пребывания системы в состояниях E_i , $i = \overline{0, 3}$, определяются выражениями:

$$\begin{aligned} T(E_1) &= \frac{M(\gamma \wedge \tau)}{1 + \overline{N}_{\text{обс}}(\tau)}, \quad T(E_2) = M\sigma_a, \quad T(E_3) = M\sigma_p, \\ T(E_0) &= \frac{M\beta \overline{N}(\tau) - M(\gamma \wedge \tau) - M\sigma_a P(\gamma < \tau) - M\sigma_p P(\gamma > \tau)}{1 + \overline{N}_{\text{обс}}(\tau)}. \end{aligned}$$

Перейдем к нахождению стационарных экономических показателей эффективности функционирования системы [17]. Для этого воспользуемся тем, что случайный процесс, описывающий эволюцию технической системы во времени, является регенерирующим. Пусть c_1 — доход, получаемый за обслуживание одного требования; c_a — затраты в единицу времени АВ; c_p — затраты в единицу времени на проведение ТО прибора. Тогда средняя удельная прибыль $S(\tau)$ в единицу календарного времени и средние удельные затраты $C(\tau)$ в единицу времени обслуживания требований определяются соотношениями:

$$(3) \quad \begin{aligned} S(\tau) &= \frac{c_1 N_{\text{сер}}(\tau) - c_p M\sigma_p \overline{\Phi}(\tau) - c_a M\sigma_a \Phi(\tau)}{M\beta \overline{N}(\tau)}, \\ C(\tau) &= \frac{c_a M\sigma_a \Phi(\tau) + c_p M\sigma_p \overline{\Phi}(\tau)}{M(\gamma \wedge \tau)}. \end{aligned}$$

Для частных видов входящих потоков и времени обслуживания требования выражения для вычисления характеристик системы упрощаются. Так, в случае простейшего входящего потока требований с интенсивностью λ при вычислении стационарных характеристик ненадежной системы $M/G/1/0$ в соответствующих формулах следует полагать, что

$$\bar{N}(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} h_f(t) \bar{\Phi}(t) dt + \lambda \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) dt + \lambda M \sigma_a \Phi(\tau) + \lambda M \sigma_p \bar{\Phi}(\tau).$$

Для системы $GI/M/1/0$, в которой длительность обслуживания требования имеет показательное распределение с параметром μ , в формулах для вычисления стационарных характеристик следует подставить:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\text{обс}}(\tau) &= \mu \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(x) dx, \\ \bar{N}(\tau) &= \mu \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) dt + \mu \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) dt \int_0^t e^{-\mu s} h_g(s) ds + \\ &+ \bar{\Phi}(\tau) \int_0^{\infty} \psi_p(t) \hat{H}_g(t) dt + \bar{\Phi}(\tau) \int_0^{\infty} \psi_p(t) dt \int_0^{\tau} e^{-\mu s} h_g(s+t) ds + \\ &+ \bar{\Phi}(\tau) \int_0^{\infty} \psi_a(t) \hat{H}_g(t) dt + \int_0^{\infty} \psi_a(t) dt \int_0^{\tau} \varphi(y) dy \int_0^y e^{-\mu s} h_g(s+t) ds. \end{aligned}$$

Для системы $M/M/1/0$, в которой входящий поток требования является простейшим с параметром λ , а длительность обслуживания требования имеет показательное распределение с параметром μ , в формулах для определения стационарных характеристик имеем:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\text{обс}}(\tau) &= \mu \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(x) dx, \\ \bar{N}(\tau) &= 1 + (\lambda + \mu) \int_0^{\tau} \bar{\Phi}(t) dt + \lambda M \sigma_a \Phi(\tau) + \lambda M \sigma_p \bar{\Phi}(\tau). \end{aligned}$$

В частности, когда СВ γ , σ_a и σ_p , описывающие процессы отказа и восстановления, имеют экспоненциальные распределения, т.е. $\varphi(t) = \eta e^{-\eta t}$, $\psi_a(t) = \nu_a e^{-\nu_a t}$ и $\psi_p(t) = \nu_p e^{-\nu_p t}$, тогда финальные вероятности пребывания системы в состояниях вычисляются по формулам:

$$p_0^*(\tau) = \frac{\eta + \mu(1 - e^{-\eta\tau})}{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_p} e^{-\eta\tau}\right) + \left(\lambda + \mu + \frac{\eta\lambda}{\nu_a}\right) (1 - e^{-\eta\tau})},$$

$$p_1^*(\tau) = \frac{\lambda(1 - e^{-\eta\tau})}{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_p} e^{-\eta\tau}\right) + \left(\lambda + \mu + \frac{\eta\lambda}{\nu_a}\right) (1 - e^{-\eta\tau})},$$

$$p_2^*(\tau) = \frac{\frac{\lambda\eta}{\nu_a}(1 - e^{-\eta\tau})}{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_p} e^{-\eta\tau}\right) + \left(\lambda + \mu + \frac{\eta\lambda}{\nu_a}\right) (1 - e^{-\eta\tau})},$$

$$p_3^*(\tau) = \frac{\frac{\lambda\eta}{\nu_p} e^{-\eta\tau}}{\eta \left(1 + \frac{\lambda}{\nu_p} e^{-\eta\tau}\right) + \left(\lambda + \mu + \frac{\eta\lambda}{\nu_a}\right) (1 - e^{-\eta\tau})}.$$

5. Оптимизация периодичности проведения ТО прибора

Рассмотрим задачу оптимизации допустимого уровня наработки для проведения ТО прибора. Вначале выберем в качестве критерия оптимизации средние удельные затраты $C(\tau)$ в единицу времени обслуживания требований. Достаточные условия существования конечной точки минимума τ_c функции $C(\tau)$ приводятся в [16]. Заметим, что в случае $\tau_c = \infty$ оптимальной является пассивная стратегия обслуживания прибора, т.е. проведение его ТО нецелесообразно.

Если в качестве критерия оптимальности взять среднюю удельную прибыль $S(\tau)$ в единицу времени, то точка максимума этой функции удовлетворяет уравнению $S'(\tau) = 0$ или ему эквивалентному:

$$(4) \quad c_1 h_f(\tau) \bar{N}_{\text{пот}}(\tau) - \lambda_\varphi(\tau) (c_a M\sigma_a - c_p M\sigma_p) \bar{N}(\tau) - c_1 \bar{N}_{\text{обс}}(\tau) \frac{\bar{N}'_{\text{пот}}(\tau)}{\bar{\Phi}(\tau)} +$$

$$+ (c_a M\sigma_a \Phi(\tau) + c_p M\sigma_p \bar{\Phi}(\tau)) \left(h_f(\tau) + \frac{\bar{N}'_{\text{пот}}(\tau)}{\bar{\Phi}(\tau)} \right) = 0,$$

где $\bar{N}_{\text{пот}}(\tau) = \bar{N}_{\text{пот}}^{\text{обс}}(\tau) + \bar{N}_{\text{пот}}^p(\tau) + \bar{N}_{\text{пот}}^a(\tau)$ — среднее число потерянных требований на периоде регенерации, $\lambda_\varphi(\tau) = \varphi(\tau)/\bar{\Phi}(\tau)$ — интенсивность отказа прибора.

Обозначим функцию в левой части (4) через $Z(\tau)$, и предположим, что она является непрерывной. Тогда достаточным условием существования конечного решения этого уравнения является выполнение неравенства $Z(0)Z(\infty) < 0$. В частности, неравенство выполняется, если интенсивность отказов в ненадежной системе обслуживания неограниченно возрастает, т.е. $\lambda_\varphi(\infty) = \infty$; средние затраты за период регенерации на АВ больше, чем на ТО и меньше прибыли от обслуженных требований, т.е. $c_a M\sigma_a > c_p M\sigma_p$ и $c_a M\sigma_a < c_1 \bar{N}_{\text{обс}}(\infty)$; среднее число потерянных заявок по причине АВ больше, чем по причине ТО, т.е.

$$\int_0^\infty \bar{F}(y) dy \int_0^\infty (\psi_a(t) - \psi_p(t)) \hat{H}_g(y+t) dt > 0;$$

а также

$$c_1 h_f(0) - \lambda_\varphi(0) c_a M\sigma_a \geq 0.$$

При решении двухкритериальной задачи оптимизации в качестве целевой функции можно использовать линейную свертку $K(\tau) = a_s S(\tau) - a_c C(\tau)$ частных критериев $S(\tau)$ и $C(\tau)$ при весовых коэффициентах $a_s > 0$ и $a_c > 0$, $a_s + a_c = 1$.

6. Численный пример

Интервал времени между поступающими в систему требованиями имеет распределение Эрланга 4-го порядка с плотностью распределения $g(t) = 20(20t)^3 e^{-20t} / 3!$, длительность времени обслуживания требования — распределение Эрланга 3-го порядка с плотностью $f(t) = 12(12t)^2 e^{-12t} / 2!$. Нарботка прибора до отказа и длительность времени его АВ распределены по закону Вейбулла–Гнеденко с плотностями $\varphi(t) = 0,3(0,1t)^2 e^{-(0,1t)^3}$ и $\psi_a(t) = 5(10t)^{-0,5} e^{-(10t)^{0,5}}$ соответственно. Длительность ТО прибора имеет гамма-распределение с плотностью $\psi_p(t) = 5(5t)^{-0,5} e^{-5t} / \Gamma(0,5)$. Средние значения перечисленных случайных величин (в часах), доход от обслуживания требования и затраты в единицу времени на восстановительные работы (в денежных единицах) помещены в табл. 1.

Вычисленные в пакете MathCAD по формулам (2) и (3) значения стационарных характеристик системы в зависимости от предельного уровня τ наработки прибора на ТО помещены в табл. 2. В ней использованы следующие обозначения: τ_s — точка максимума функции удельной прибыли $S(\tau)$; τ_c — точка минимума функции удельных затрат $C(\tau)$; τ_k — точка максимума линейной свертки $K(\tau) = 0,2S(\tau) - 0,8C(\tau)$; $p_0^*(\tau)$ — вероятность пребывания системы в свободном работоспособном состоянии; $\bar{N}_{\text{обс}}(\tau)$ и $\bar{N}_{\text{пот}}(\tau)$ — среднее число обслуженных и потерянных требований на периоде регенерации соответственно; $M\beta \bar{N}(\tau)$ — средняя длина периода регенерации. Случай $\tau = \infty$ соответствует характеристикам системы для пассивной стратегии обслуживания (ТО не проводится).

Таблица 1. Исходные параметры системы

$M\beta$, ч	$M\alpha$, ч	$M\gamma$, ч	$M\sigma_a$, ч	$M\sigma_p$, ч	c_1 , денежных единиц	c_a , денежных единиц	c_p , денежных единиц
0,2	0,25	8,930	0,2	0,1	4	20	5

Таблица 2. Стационарные характеристики системы в зависимости от периодичности технического обслуживания прибора

Уровень наработки на ТО, ч	$S(\tau)$, денежных единиц	$C(\tau)$, денежных единиц	$p_0^*(\tau)$	$\bar{N}_{\text{обс}}(\tau)$	$\bar{N}_{\text{пот}}(\tau)$	$M\beta \bar{N}(\tau)$
$\tau = \infty$	10,006	0,448	0,336	35,386	33,343	13,746
$\tau_c = 4,162$	9,964	0,182	0,340	16,019	15,763	6,356
$\tau_s = 7,589$	10,101	0,254	0,338	27,081	25,681	10,552
$\tau_k = 5,099$	10,041	0,189	0,339	19,410	18,787	7,639

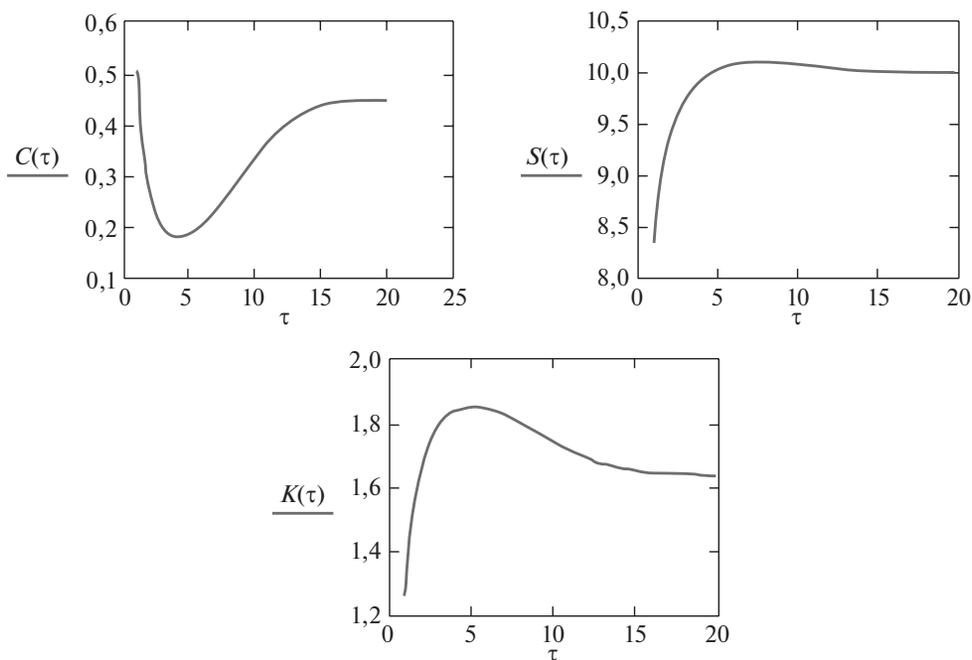


Рис. 5. Графики зависимостей экономических показателей системы и их линейной сверки от периодичности проведения ТО прибора.

При минимизации удельных затрат оптимально допустимый уровень наработки на ТО равен $\tau_c = 4,162$ ч, а при максимизации удельной прибыли — $\tau_s = 7,589$ ч. При этом по сравнению с пассивной стратегией обслуживания прибора затраты снижаются на 59,405 %, а прибыль увеличивается на 0,942 % соответственно. В случае двухкритериальной оптимизации оптимальный допустимый уровень наработки на ТО составляет $\tau_k = 5,099$ ч, по сравнению с пассивной стратегией обслуживания удельная прибыль увеличивается на 0,345 %, а удельные затраты снижаются на 57,735 %.

Графики зависимостей частных критериев и их линейной свертки от периодичности проведения ТО прибора представлены на рис. 5.

7. Заключение

С помощью аппарата теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным множеством состояний построена модель функционирования системы обслуживания $GI/G/1/0$, в которой во время обслуживания требования может произойти отказ прибора. С помощью найденного стационарного распределения вложенной цепи Маркова и предельных теорем найдены выражения для нахождения стационарных вероятностных и экономических показателей системы с учетом проведения профилактического обслуживания прибора. Приводятся достаточные условия, при которых целесообразно проведение технического обслуживания в зависимости от уровня наработки прибора. В приведенном численном примере найдены стационарные харак-

теристики системы и количественно оценено влияние периодичности проведения профилактического обслуживания на среднюю удельную прибыль в единицу календарного времени и средние удельные затраты в единицу времени обслуживания требований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Система уравнений

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx)P(x, B)$$

для стационарного распределения $\rho(\cdot)$ ВЦМ $\{S_n, n \geq 0\}$ с учетом вероятностей переходов $P(x, B)$ из состояний имеет вид:

$$\rho(0xuv) = \int_0^v f(t)v_g(t, x)\rho(1, t + u, v - t)dt + \rho_1 f(v)v_g(v, x)\varphi(v + u),$$

$$\rho(1uv) = \int_0^\infty \rho(0xuv)dx,$$

$$\rho(3x) = \int_0^\tau v_g(t, x)\bar{F}(t)dt \int_t^\infty \rho(1u, \tau - t)du + \rho_1 \bar{F}(\tau)v_g(\tau, x)\bar{\Phi}(\tau),$$

$$\rho(2x) = \int_0^\tau v_g(t, x)\bar{F}(t)dt \int_t^\tau \rho(1t, v - t)dv + \rho_1 \int_0^\tau \bar{F}(t)v_g(t, x)\varphi(t)dt,$$

$$\rho(0x) = \int_0^\infty \psi_p(t)\rho(3, t + x)dt + \int_0^\infty \psi_p(t)dt \int_0^t v_g(t - s, x)\rho(3s)ds +$$

$$+ \int_0^\infty \psi_a(t)\rho(2, t + x)dt + \int_0^\infty \psi_a(t)dt \int_0^t v_g(t - s, x)\rho(2s)ds,$$

$$\rho_1 = \int_0^\infty \rho(0x)dx.$$

В результате исключения из первых двух уравнений системы функции $\rho(0xuv)$ получаем уравнение восстановления для плотности $\rho(1uv)$ по переменной v :

$$\rho(1uv) = \rho_1 f(v)\varphi(u + v) + \int_0^v f(t)\rho(1, t + u, v - t)dt,$$

решением которого является функция $\rho(1uv) = \rho_1 h_f(v) \varphi(u+v)$. Выражения для остальных плотностей находятся с помощью свойств плотностей функции восстановления и прямого остаточного времени восстановления. Значение стационарной вероятности ρ_1 определяется из условия нормировки. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Предельные значения p_i^* переходных вероятностей полумарковского процесса $S(t)$, $t \geq 0$, определяются с помощью соотношений [14, 15]

$$p_i^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x, E_i) = \int_{E_i} m(x) \rho(dx) \left[\int_E m(x) \rho(dx) \right]^{-1}, \quad i = \overline{0, 3}.$$

С учетом найденного стационарного распределения ВЦМ (1), средних времен пребывания в состояниях:

$$\begin{aligned} M\theta_1 &= \int_0^\tau \overline{F}(t) \overline{\Phi}(t) dt, & M\theta_{1uv} &= \int_0^{u \wedge (\tau-v)} \overline{F}(t) dt, \\ M\theta_{2x} &= M\sigma_a; & M\theta_{3x} &= M\sigma_p; & M\theta_{0xuv} &= M\theta_{0x} = x \end{aligned}$$

и тождества $M\beta_t = M\beta(1 + H_g(t)) - t$ получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{E_1} m(x) \rho(dx) &= \rho_1 \int_0^\tau \overline{F}(t) \overline{\Phi}(t) dt + \rho_1 \int_0^\tau h_f(v) dv \int_0^\infty \varphi(u+v) du \int_0^{u \wedge (\tau-v)} \overline{F}(t) dt = \\ &= \rho_1 \int_0^\tau \overline{F}(t) \overline{\Phi}(t) dt + \rho_1 \int_0^\tau \overline{\Phi}(s) ds \int_0^s h_f(t) \overline{F}(s-t) dt = \rho_1 \int_0^\tau \overline{\Phi}(t) dt = \rho_1 M(\gamma \wedge \tau); \\ \int_{E_2} m(x) \rho(dx) &= M\sigma_a \int_0^\infty \rho(2x) dx = \rho_1 M\sigma_a \overline{\Phi}(\tau) = \rho_1 M\sigma_a P(\gamma < \tau); \\ \int_{E_3} m(x) \rho(dx) &= M\sigma_p \int_0^\infty \rho(3x) dx = \rho_1 M\sigma_p \overline{\Phi}(\tau) = \rho_1 M\sigma_p P(\gamma > \tau); \\ \int_{E_0} m(x) \rho(dx) &= \rho_1 M\beta \left[\overline{N}_{обс}(\tau) + \overline{N}_{пот}^{обс}(\tau) + \overline{N}_{пот}^p(\tau) + \overline{N}_{пот}^a(\tau) \right] - \\ &\quad - \rho_1 \int_0^\tau \overline{\Phi}(t) dt - \rho_1 \overline{\Phi}(\tau) M\sigma_p - \rho_1 \overline{\Phi}(\tau) M\sigma_a; \\ \int_E m(x) \rho(dx) &= \rho_1 M\beta \left[\overline{N}_{обс}(\tau) + \overline{N}_{пот}^{обс}(\tau) + \overline{N}_{пот}^p(\tau) + \overline{N}_{пот}^a(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Средние времена $T(E_i)$ пребывания системы в подмножествах состояний E_i определяются с помощью соотношений [14, 15]

$$(П.1) \quad T(E_i) = \int_{E_i} m(x)\rho(dx) \left[\int_{E \setminus E_i} \rho(dx)P(x, E_i) \right]^{-1}, \quad i = \overline{0, 3}.$$

Учитывая вероятности переходов и вид стационарного распределения ВЦМ (1), интегралы в знаменателях дробей выражений (П.1) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \int_{E \setminus E_1} \rho(dx)P(x, E_1) &= \int_0^\infty \rho(0x)dx + \int_0^\tau dv \int_0^\infty du \int_0^\infty \rho(0xuv)dx = \\ &= \rho_1 + \rho_1 \int_0^\tau h_f(x) \overline{\Phi}(x) dx = \rho_1 [1 + \overline{N}_{обс}(\tau)]; \\ \int_{E \setminus E_2} \rho(dx)P(x, E_2) &= \int_{E_2} \rho(dx)P(x, E \setminus E_2) = \int_0^\infty \rho(2x)dx = \rho_1 \overline{\Phi}(\tau); \\ \int_{E \setminus E_3} \rho(dx)P(x, E_3) &= \int_{E_3} \rho(dx)P(x, E \setminus E_3) = \int_0^\infty \rho(3x)dx = \rho_1 \overline{\Phi}(\tau); \\ \int_{E \setminus E_0} \rho(dx)P(x, E_0) &= \int_{E_0} \rho(dx)P(x, E \setminus E_0) = \\ &= \int_0^\infty \rho(0x)dx + \int_0^\tau dv \int_0^\infty du \int_0^\infty \rho(0xuv)dx = \rho_1 [1 + \overline{N}_{обс}(\tau)]. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.
3. Печинкин А.В., Чаплыгин В.В. Стационарные характеристики системы массового обслуживания $SM/MSP/n/r$ // АИТ. 2004. № 9. С. 85–100.
Pechinkin A.V., Chaplygin V.V. Stationary Characteristics of the $SM/MSP/n/r$ Queuing System // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 9. P. 1429–1443.

4. *Krishna Kumar B., Arivudainambi D., Vijayakumar A.* An M/G/1/1 Queue with Unreliable Server and no Waiting Capacity // *Inf. Manage. Sci.* 2002. V. 13. P. 35–50.
5. *Wu C.-H., Lee W.-C., Ke J.-C., Liu T.-H.* Optimization Analysis of an Unreliable Multi-server Queue with a Controllable Repair Policy // *Comput. Oper. Res.* 2014. No. 49. P. 83–96.
6. *Özkan E., Kharoufeh J.P.* Optimal Control of a Two-server Queuing System with Failures // *Prob. Eng. Inform. Sci.* 2014. No. 28 (4). P. 489–527.
7. *Песчанский А.И.* Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным восстанавливаемым каналом // *Динамические системы.* 2017. Т. 7 (35). № 1. С. 53–61.
8. *Peschansky A.I.* Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input. Germany. LAP LAMPERT Acad. Publish., 2013.
9. *Песчанский А.И., Коваленко А.И.* Полумарковская модель однолинейной системы обслуживания с учетом технического обслуживания ненадежного канала // *Сб. науч. тр. Оптимизация производственных процессов.* 2014. Вып. 15. С. 63–70.
10. *Peschansky A.I., Kovalenko A.I.* On a Strategy for the Maintenance of an Unreliable Channel of a One-Server Loss Queue // *Automat. Contr. Comput. Sci.* 2016. V. 50. No. 6. P. 397–407.
11. *Песчанский А.И., Коваленко А.И.* Полумарковская модель технического обслуживания ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями и скрытым отказом // *Сб. науч. тр. Вестн. СевНТУ. Автоматизация процессов и управление.* 2014. Вып. 147. С. 64–72.
12. *Peschansky A.I., Kovalenko A.I.* Semi-Markov Model of a Single-Server Queue with Losses and Maintenance of an Unreliable Server // *Cybern. Syst. Anal.* 2015. V. 51. No. 4. P. 632–643.
13. *Песчанский А.И., Коваленко А.И.* Полумарковская модель ненадежной однолинейной системы обслуживания с потерями и различными типами восстановления // *АиТ.* 2016. № 11. С. 112–126.
Peschansky A.I., Kovalenko A.I. A Semi-Markov Model for an Unreliable Single-Line Queueing System with Losses and Different Restoration Types // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 12. P. 2192–2204.
14. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. Киев: Наук. думка, 1982.
15. *Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.И. и др.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. Кишинев: Штиинца, 1991.
16. *Beichelt F., Franken P.* Zuverlässigkeit und Instanzhaltung, Mathematische Methoden. StateplaceBerlin: VEB Verlag Technik, 1983.
17. *Капитанов В.А., Медведев А.И.* Теория надежности сложных систем (теория и практика). М.: Европейский центр по качеству, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 30.09.2019

После доработки 22.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020