

© 2020 г. А.С. ШВЕДОВ, д-р физ.-мат. наук (ashvedov@hse.ru)
(Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва)

ВОЙНА НА ИЗНУРЕНИЕ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ И С НЕЧЕТКИМИ ТИПАМИ ИГРОКОВ

Результат о существовании равновесного в смысле Байеса–Нэша профиля чистых стратегий для симметричных игр с неполной информацией класса «война на изнурение» обобщается для случая, когда действия и типы игроков могут быть нечеткими.

Ключевые слова: игра с неполной информацией, нечеткое множество, нечетко-случайная величина, равновесие Байеса–Нэша.

DOI: 10.31857/S0005231020070090

1. Введение

В последние десятилетия играм класса «война на изнурение» уделяется значительное внимание. Для таких игр многие результаты и теоретического, и прикладного характера были получены при рассмотрении биологических задач, когда два животных одного вида вступают в спор за некоторый приз, например пищу или территорию, при этом приз может достаться только одному из них. Однако животные не начинают схватку, а пытаются показать сопернику свою силу и заставить его отступить. При этом ценность приза для каждого из соперников уменьшается при увеличении времени противостояния.

В различных работах изучаются игры этого класса и с полной, и с неполной информацией. При рассмотрении игр с неполной информацией каждый из игроков знает свой тип, но не знает тип соперника (например, типом игрока может быть то, насколько животное голодно). Однако каждому из игроков известно распределение вероятностей для типа его соперника.

Результат о существовании равновесного в смысле Байеса–Нэша профиля чистых стратегий для симметричных игр с неполной информацией класса «война на изнурение» (т.е. для игр с одинаковыми игроками, точнее, с игроками с одинаковыми распределениями вероятностей для типов и с одинаковыми действиями для каждого типа) представлен в [1]. Доказательство этого результата можно найти, например, в [2]. В некоторых последующих работах данный результат назван классическим. Различные модификации игр класса «война на изнурение» рассматривались многими авторами. Например, в [3] даются приложения к экономическим задачам. Некоторые обзоры этого направления можно найти в [4, 5]. Подробнее об играх с неполной информацией и о равновесии Байеса–Нэша см., например, [6].

Теория нечетких множеств применяется при рассмотрении многих игровых задач. Для игр в нормальной форме можно назвать обзор [7]. Если

использовать электронные базы научных ресурсов, то нетрудно убедиться, что число работ, в названиях которых присутствует и слово “fuzzy”, и слово “game”, является значительным, причем многие из этих работ недавние. Теория нечетких множеств используется и в моделях, где присутствует некоторый управляющий центр, но объекты управления активны, т.е. преследуют и свои интересы [8]. Однако, насколько известно, до сих пор не рассматривались игры с неполной информацией, где типы игроков были бы нечеткими числами (или нечеткими множествами).

Для игр класса «война на изнурение» логично предположить, что ценность приза для каждого из игроков (при любом сроке противостояния) известна лишь приближенно, т.е. является нечетким числом. Тогда и типы игроков должны быть нечеткими числами. Такие задачи рассматриваются в настоящей работе. Получено обобщение результата о существовании равновесного профиля чистых стратегий из [1].

Теория нечетких множеств и теория вероятностей — это два различных подхода к описанию неопределенности. Эти подходы могут использоваться и независимо друг от друга, и комбинированно. При этом существуют различные пути, как такое комбинирование может производиться. В настоящей работе используется подход, при котором понятие нечетко-случайной величины — это прямое обобщение понятия случайной величины, только значениями измеримой функции являются нечеткие числа, а не обычные действительные числа. Первые такие определения нечетко-случайных величин даются в [9–11]. Здесь используется определение нечетко-случайной величины из работы [12], являющееся модификацией упомянутых определений.

С точки зрения автора для нечетко-случайных величин распределения вероятностей удобнее задавать не при помощи функций распределения, а при помощи квантильных функций, как это сделано в [13]. В настоящей работе математический инструментарий, развитый в [13], существенно используется.

В разделе 2 приводится постановка задачи, решение которой дается в разделе 3.

2. Равновесие Байеса–Нэша

Для положительных чисел z, γ, δ рассмотрим функцию

$$U(z, \gamma, \delta) = \begin{cases} z - \delta & \text{при } \delta < \gamma, \\ -\gamma & \text{при } \delta \geq \gamma. \end{cases}$$

Пусть x — это тип первого игрока, y — тип второго игрока, α — действие первого игрока, β — действие второго игрока. Здесь α и β — выбранное время противостояния для каждого игрока. Тогда функция $U(x, \alpha, \beta)$ определяет выигрыш первого игрока. Если $\beta < \alpha$, то приз достается первому игроку, и ценность приза для него равняется $x - \beta$. Если $\beta \geq \alpha$, то приз не достается первому игроку, и его потери считаются равными α . Аналогично функция $U(y, \beta, \alpha)$ определяет выигрыш второго игрока.

Напомним, что нечеткое число $\tilde{z}$ — это фигура (компактное множество) на плоскости с координатами (ξ, η) , лежащая в полосе $0 \leq \eta \leq 1$ и определяе-

мая двумя функциями $z^L(\eta)$ и $z^R(\eta)$, которые будем называть соответственно левым и правым индексами нечеткого числа $\tilde{z}$. Функция $z^L(\eta)$ монотонно неубывающая, функция $z^R(\eta)$ монотонно невозрастающая, $z^L(1) \leq z^R(1)$. Фигура $\tilde{z}$ состоит из точек (ξ, η) таких, что $z^L(\eta) \leq \xi \leq z^R(\eta)$ при любом $\eta \in [0, 1]$. Если обе функции $z^L(\eta)$ и $z^R(\eta)$ линейные, то фигура $\tilde{z}$ — это трапеция и нечеткое число называется трапециoidalным. Если обе эти функции константы, то фигура $\tilde{z}$ — это прямоугольник и нечеткое число называется прямоугольным. Если, кроме того, эти константы равны одному и тому же действительному числу, то нечеткое число $\tilde{z}$ можно отождествлять с данным действительным числом. В общем случае компактность множества $\tilde{z}$ обеспечивается условием, что функции $z^L(\eta)$ и $z^R(\eta)$ являются непрерывными слева.

Определение нечетко-случайной величины в настоящей работе то же, что и в [12]. Квантильная функция случайной величины — это монотонно неубывающая функция $q(p)$ на интервале $0 < p < 1$. Квантильная функция нечетко-случайной величины, определение которой дается в [13], — это множество нечетких чисел $\tilde{q}(p)$, $0 < p < 1$. (Нечеткие числа будем обозначать строчными буквами со знаком «тильда», нечетко-случайные величины — прописными буквами со знаком «тильда».)

Пусть $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ — это две независимые одинаково распределенные нечетко-случайные величины, которые используются для задания типов первого и второго игрока соответственно. Под одинаковой распределенностью нечетко-случайных величин понимается совпадение их квантильных функций. Эта квантильная функция считается известной обоим игрокам.

Через $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ будем обозначать нечеткие числа, являющиеся типом первого и второго игрока соответственно. Стратегией первого игрока называется функция A , которая ставит в соответствие каждому типу $\tilde{x}$ первого игрока некоторое действие $\tilde{a}$, где $\tilde{a}$ также является нечетким числом. Стратегией второго игрока называется функция B , которая ставит в соответствие каждому типу $\tilde{y}$ второго игрока некоторое действие $\tilde{b}$, где $\tilde{b}$ также является нечетким числом.

Пусть функции $x^L(\eta)$ и $x^R(\eta)$ — это соответственно левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{x}$, функции $y^L(\eta)$ и $y^R(\eta)$ — это соответственно левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{y}$, функции $\alpha^L(\eta)$ и $\alpha^R(\eta)$ — это соответственно левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{a}$, функции $\beta^L(\eta)$ и $\beta^R(\eta)$ — это соответственно левый и правый индексы нечеткого числа $\tilde{b}$, $0 \leq \eta \leq 1$.

Наложим ограничение на функции A и B . Будем считать, что существует функция $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что при любом $\eta \in [0, 1]$ выполняются соотношения $\alpha^L(\eta) = a(x^L(\eta))$, $\alpha^R(\eta) = a(x^R(\eta))$, и существует функция $b: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что при любом $\eta \in [0, 1]$ выполняются соотношения $\beta^L(\eta) = b(y^L(\eta))$, $\beta^R(\eta) = b(y^R(\eta))$. Каждая из функций a и b является строго возрастающей, непрерывно дифференцируемой, $a(0) = b(0) = 0$.

Пусть однопараметрические семейства случайных величин $X^L(\eta)$ и $X^R(\eta)$ — это соответственно левый и правый индексы нечетко-случайной величины $\tilde{X}$; однопараметрические семейства случайных величин $Y^L(\eta)$

и $Y^R(\eta)$ — это соответственно левый и правый индексы нечетко-случайной величины $\tilde{Y}$; параметр η меняется от 0 до 1.

Будем считать, что квантильная функция любой из случайных величин $X^L(\eta)$, $X^R(\eta)$, $Y^L(\eta)$, $Y^R(\eta)$, определенная на интервале $0 < p < 1$, является строго возрастающей и непрерывно дифференцируемой, стремится к 0 при $p \rightarrow 0$. Кроме того, все эти квантильные функции на интервале $(0, 1)$ ограничены сверху некоторой общей константой. (Последнее условие вытекает из определения нечетко-случайной величины, данного в [12]).

Будем говорить, что профиль стратегий (A, B) является равновесием Байеса–Нэша, если при каждом типе $\tilde{x}$ и при каждом $\eta \in [0, 1]$

$$(1) \quad \begin{aligned} a(x^L(\eta)) &\in \arg \max_{\alpha^L(\eta)} E(U(x^L(\eta), \alpha^L(\eta), b(Y^L(\eta)))) , \\ a(x^R(\eta)) &\in \arg \max_{\alpha^R(\eta)} E(U(x^R(\eta), \alpha^R(\eta), b(Y^R(\eta)))) \end{aligned}$$

и при каждом типе $\tilde{y}$ и при каждом $\eta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} b(y^L(\eta)) &\in \arg \max_{\beta^L(\eta)} E(U(y^L(\eta), \beta^L(\eta), a(X^L(\eta)))) , \\ b(y^R(\eta)) &\in \arg \max_{\beta^R(\eta)} E(U(y^R(\eta), \beta^R(\eta), a(X^R(\eta)))) . \end{aligned}$$

Здесь E означает ожидание соответствующей случайной величины.

3. Определение нечетких действий, составляющих равновесный профиль

Если для краткости писать x вместо $x^L(\eta)$, α вместо $\alpha^L(\eta)$, Y вместо $Y^L(\eta)$, то условие (1) можно записать в виде

$$(2) \quad a(x) \in \arg \max_{\alpha} E(U(x, \alpha, b(Y))) .$$

Пусть q — квантильная функция случайной величины Y . Из соотношения (2) можно вывести, что

$$(3) \quad b(y) = \int_0^y \frac{z}{1 - q^{-1}(z)} \frac{dq^{-1}(z)}{dz} dz .$$

Имеет место аналогичное выражение и для функции $a(x)$. Это дает равновесный в смысле Байеса–Нэша профиль чистых стратегий, найденный в [1] (доказательство приведено, например, в [2]). В Приложении приводится новый вывод формулы (3), более простой, чем другие известные автору доказательства. При этом используется выражение из [13] для моментов случайных величин через интеграл, содержащий квантильную функцию.

Если обозначить через $F^L(z; \eta)$ функцию распределения случайной величины $Y^L(\eta)$, а через $F^R(z; \eta)$ функцию распределения случайной величины $Y^R(\eta)$, то выражение (3) дает

$$(4) \quad b(y^L(\eta)) = \int_0^{y^L(\eta)} \frac{z}{1 - F^L(z; \eta)} \frac{dF^L(z; \eta)}{dz} dz.$$

Аналогично

$$(5) \quad b(y^R(\eta)) = \int_0^{y^R(\eta)} \frac{z}{1 - F^R(z; \eta)} \frac{dF^R(z; \eta)}{dz} dz.$$

Остается найти условия, при которых функции $b(y^L(\eta))$ и $b(y^R(\eta))$, задаваемые формулами (4), (5), являются левым и правым индексами некоторого нечеткого числа соответственно.

Обозначим через $q^L(p; \eta)$ квантильную функцию случайной величины $Y^L(\eta)$, а через $q^R(p; \eta)$ квантильную функцию случайной величины $Y^R(\eta)$. Предположим, что существует нечеткое число $\tilde{c}$, левый и правый индексы которого обозначаются как $c^L(\eta)$ и $c^R(\eta)$ соответственно, причем $c^L(0) > 0$, такое что

$$q^L(p; \eta) = c^L(\eta)q_0(p), \quad q^R(p; \eta) = c^R(\eta)q_0(p)$$

при всех $p \in (0, 1)$, $\eta \in [0, 1]$, где $q_0(p)$ — некоторая квантильная функция. Функцию распределения, соответствующую квантильной функции q_0 , обозначим через F_0 .

Ключевым в задаче оказывается соображение, что нужно связать типы игроков с квантильной функцией нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$.

Теорема. Пусть фиксировано $p \in (0, 1)$ и пусть $y^L(\eta) = q^L(p; \eta)$, $y^R(\eta) = q^R(p; \eta)$ при любом $\eta \in [0, 1]$. Тогда функции, стоящие в левых частях равенств (4), (5), являются соответственно левым и правым индексами нечеткого числа $\gamma_p \tilde{c}$, где

$$\gamma_p = \int_0^{q_0(p)} \frac{u}{1 - F_0(u)} F_0'(u) du.$$

Доказательство теоремы приводится в Приложении.

4. Заключение

Во многих работах, где изучаются приложения теории нечетких множеств к игровым задачам, предполагается, что нечеткими являются выпырыши. Выигрыши не являются однозначно определенными действительными числами

и в настоящей работе. Но это — не исходное предположение, а следствие того, что и типы игроков, и действия нечеткие. В отличие от сложения нечетких чисел их вычитание — это не прямолинейная задача. Многие трудности в приложениях теории нечетких множеств связаны именно с этим. По смыслу игр класса «война на изнурение» вычитание необходимо. В настоящей работе удалось таким образом наложить все условия, что вычитание не приводит к выходу из множества нечетких чисел. Получен ответ на вопрос, каким образом приближительность в типах игроков (нечеткость) должна влиять на приближительность их действий, чтобы профиль стратегий был равновесным. Результаты могут иметь практическое значение, например, в тех случаях, когда по смыслу задачи действия являются не мгновенными, а пролонгированными.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство формулы (3). Согласно (2) из [13]

$$I(x, \alpha) = E(U(x, \alpha, b(Y))) = \int_0^1 U(x, \alpha, b(q(p))) dp.$$

Если рассмотреть функцию

$$\psi(\alpha) = q^{-1}(b^{-1}(\alpha)),$$

то последняя формула может быть записана в виде

$$I(x, \alpha) = \int_0^{\psi(\alpha)} (x - b(q(p))) dp - \alpha(1 - \psi(\alpha)).$$

Из формулы

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\int_0^{\psi(\alpha)} f(p) dp \right) = f(\psi(\alpha)) \psi'(\alpha)$$

следует, что

$$(П.1) \quad \frac{d}{d\alpha} I(x, \alpha) = x\psi'(\alpha) - \alpha\psi'(\alpha) + \alpha\psi'(\alpha) - (1 - \psi(\alpha)).$$

Необходимое условие максимума, равенство нулю частной производной, дает

$$x\psi'(\alpha) - (1 - \psi(\alpha)) = 0.$$

Из условия $a(x) = \alpha$ и из симметричности игроков следует, что $x = b^{-1}(\alpha)$. Следовательно,

$$(П.2) \quad b^{-1}(\alpha)\psi'(\alpha) - (1 - \psi(\alpha)) = 0.$$

Имеем

$$\psi'(\alpha) = (q^{-1})' (b^{-1}(\alpha)) (b^{-1})'(\alpha).$$

Положим $z = b^{-1}(\alpha)$. Тогда с учетом того, что

$$(b^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{b'(z)},$$

соотношение (П.2) записывается в виде

$$z (q^{-1})'(z) \frac{1}{b'(z)} = 1 - q^{-1}(z).$$

Следовательно,

$$b'(z) = \frac{z}{1 - q^{-1}(z)} \frac{dq^{-1}(z)}{dz}.$$

Тогда из условия $b(0) = 0$ вытекает соотношение (3).

Обоснование того, что точка, найденная из необходимого условия экстремума, в данном случае является точкой глобального максимума, проводится по известной схеме. Из (П.1) вытекает, что

$$(П.3) \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} I(x, \alpha) > 0.$$

Будем рассматривать функцию $a(x)$, которая в силу симметричности игроков имеет тот же вид, что и функция $b(y)$, определяемая формулой (3). Предположим, что при некотором x_0 существует значение α' такое, что

$$I(x_0, \alpha') > I(x_0, a(x_0)).$$

Тогда

$$\int_{a(x_0)}^{\alpha'} \frac{\partial I}{\partial \alpha}(x_0, t) dt > 0.$$

При любом t

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha}(a^{-1}(t), t) = 0,$$

поэтому

$$\int_{a(x_0)}^{\alpha'} \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}(x_0, t) - \frac{\partial I}{\partial \alpha}(a^{-1}(t), t) \right) dt > 0$$

или

$$(П.4) \quad \int_{a(x_0)}^{\alpha'} \int_{a^{-1}(t)}^{x_0} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} I(x, t) dx dt > 0.$$

Пусть $a(x_0) < \alpha'$. Тогда для любого $t \in (a(x_0), \alpha']$ выполняется $a^{-1}(t) > x_0$, условия (П.3) и (П.4) противоречат друг другу. Пусть $a(x_0) > \alpha'$. Тогда для любого $t \in [\alpha', a(x_0))$ выполняется $a^{-1}(t) < x_0$, и вновь условия (П.3) и (П.4) противоречат друг другу. Показано, что найден глобальный максимум.

Доказательство теоремы. Имеем

$$\begin{aligned} b(y^L(\eta)) &= \int_0^{c^L(\eta)q_0(p)} \frac{z}{1 - F^L(z; \eta)} \frac{dF^L(z; \eta)}{dz} dz = \\ &= \int_0^{c^L(\eta)q_0(p)} \frac{z}{1 - F_0\left(\frac{z}{c^L(\eta)}\right)} \frac{1}{c^L(\eta)} F'_0\left(\frac{z}{c^L(\eta)}\right) dz = \\ &= c^L(\eta) \int_0^{q_0(p)} \frac{u}{1 - F_0(u)} F'_0(u) du. \end{aligned}$$

Так же проводится преобразование для $b(y^R(\eta))$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bishop D.T., Cannings C., Maynard Smith J. The war of attrition with random rewards // J. Theoret. Biol. 1978. V. 74. P. 377–388.
2. Milgrom P.R., Weber R.J. Distributional strategies for games with incomplete information // Math. Oper. Res. 1985. V. 10. P. 619–632.
3. Fudenberg D., Tirole J. A theory of exit in duopoly // Econometrica. 1986. V. 54. P. 943–960.
4. Hörner J., Sahuguet N. A war of attrition with endogenous effort levels // Econ. Theory. 2011. V. 47. P. 1–27.
5. Kim G.J., Kim B., Kim J. Equilibrium in a war of attrition with an option to fight decisively // Oper. Res. Lett. 2019. V. 47. P. 326–330.
6. Алипрантис К.Д., Чакрабарти С.К. Игры и принятие решений. М.: Изд. дом Высш. шк. эконом., 2016.
7. Larbani M. Non cooperative fuzzy games in normal form: A survey // Fuzzy Sets Syst. 2009. V. 160. P. 3184–3210.
8. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
9. Kwakernaak H. Fuzzy random variables — I. Definitions and theorems // Inform. Sci. 1978. V. 15. P. 1–29.
10. Kwakernaak H. Fuzzy random variables — II. Algorithms and examples for the discrete case // Inform. Sci. 1979. V. 17. P. 153–178.

11. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Fuzzy random variables // J. Math. Anal. Appl. 1986. V. 114. P. 409–422.
12. *Шведов А.С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикл. эконометрика. 2016. Т. 42. С. 121–138.
http://pe.cemi.rssi.ru/pe_2016_42_121-138.pdf
13. *Шведов А.С.* Квантильная функция нечетко-случайной величины и выражения для ожиданий // Мат. заметки. 2016. Т. 100. С. 455–460.
<http://www.mathnet.ru/links/2307f468fe7c02264feb6d8cf54c25f5/mzm10879.pdf>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 17.10.2019

После доработки 23.01.2020

Принята к публикации 30.01.2020