

© 2020 г. Д.В. БАЛАНДИН, д-р физ.-мат. наук (dbalandin@yandex.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),
М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

УПРАВЛЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ¹

Показано, что множеством достижимости линейной нестационарной непрерывной или дискретной системы, в которой сумма квадратичной формы начального состояния и интеграла или суммы квадратичных форм возмущения на конечном интервале времени ограничена сверху заданной величиной, является эволюционирующий эллипсоид. Матрица эллипсоида удовлетворяет линейному матричному дифференциальному или разностному уравнению соответственно. Синтезированы оптимальные эллипсоидальные наблюдатель и алгоритм идентификации, обеспечивающие наилучшие эллипсоидальные оценки состояния системы и неизвестных параметров, а также оптимальные регуляторы, обеспечивающие попадание состояния системы в целевое множество или удержание траектории системы в эллипсоидальной трубке. Установлено соответствие между оптимальным эллипсоидальным наблюдателем и фильтром Калмана. Приведены иллюстрирующие примеры для уравнения Матве, описывающего параметрические колебания линейной осциллятора.

Ключевые слова: линейная нестационарная система, эллипсоидальное множество достижимости, оптимальное управление, оптимальное оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231020080024

1. Введение

Авторы посвящают эту статью памяти Ю.И. Неймарка, учениками которого (прямыми или косвенными) они являются. Хочется повторить слова, которые Юрий Исаакович написал в эпиграфе своей последней монографии “Математическое моделирование как наука и искусство” [1, 2]: “В науке и ее приложениях, как и в жизни, самое главное – понимание. Оно всегда просто, но добывается трудно.”

В монографии [3] Ю.И. Неймарк изложил результаты широкого круга своих исследований, касающихся вопросов устойчивости, управления и оптимизации в динамических системах. Одна из важных тем этих исследований относилась к задачам управления в условиях неопределенности математической модели объекта управления и действующих возмущений. Эта тема развивалась в последующих работах Ю.И. Неймарка (см., например, [4–7]) и изучается в настоящей работе.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-41-520002, 19-01-00289), проекта № 0729-2020-0055 и научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего”.

В задачах оценивания и управления в динамических системах при отсутствии полной информации о начальных условиях, возмущениях и помехах в измерениях важную роль играет множество достижимости системы, понимаемое как множество всех состояний, в которых система может оказаться в данный момент времени при всевозможных допустимых значениях неопределенных факторов. Характеризация множеств достижимости и их зависимости от параметров системы позволяет проектировать оптимальные системы оценивания и управления, при которых множества достижимости синтезированной системы в данный момент времени или в течение некоторого интервала времени включены в желаемые целевые множества с оптимальными характеристиками.

Классическая задача Б.В. Булгакова о влиянии ограниченных возмущений на линейную динамическую систему была поставлена и решена в [8]. Проблема нахождения или оценивания множеств достижимости активно изучается с конца 60-х г. прошлого века и до сих пор продолжает привлекать внимание специалистов в области теории управления и ее приложений [9–19]. В силу линейности системы состояние в данный момент времени есть сумма двух векторов: состояния невозмущенной системы с неопределенным начальным состоянием и состояния возмущенной системы с нулевым начальным состоянием. Если множество начальных состояний выбрать эллипсоидальным и множество достижимости возмущенной системы аппроксимировать эллипсоидом, то возникает задача описания геометрической суммы двух эллипсоидов, которая является выпуклым множеством, но не эллипсоидом. В задачах рекуррентного оценивания возникает необходимость в нахождении эллипсоида наименьшего размера, включающего пересечение двух эллипсоидов. Для описания таких множеств обычно стараются получать их верхние и нижние эллипсоидальные аппроксимации. Все это привело к развитию техники оперирования с эллипсоидами. Несмотря на значительный прогресс в этом направлении, связанный с применением линейных матричных неравенств и соответствующего программного обеспечения, проблема остается открытой в силу того, что методы, основанные на эллипсоидальных аппроксимациях множеств достижимости, трудно применить для синтеза оптимальных систем оценивания и управления за исключением очень простых случаев.

В недавних работах [20–23] было введено понятие максимального уклонения выхода линейной нестационарной системы на конечном интервале времени при неопределенных начальном состоянии и возмущении. По существу, это — индуцированная норма оператора, порожденного системой и отображающего пару, состоящую из вектора начального состояния и вектор-функции возмущения, в целевой выход, где квадрат “величины” пары измеряется суммой квадратичной формы начального состояния и интеграла от квадратичной формы возмущения, а “величина” выхода измеряется максимальным по времени значением его евклидовой нормы. Для линейной стационарной системы на бесконечном интервале времени при нулевых начальных условиях подобная характеристика была введена в [24] и названа обобщенной H_2 -нормой системы. В [20–23] максимальное уклонение выхода характеризуется в терминах решений линейного матричного дифференциального уравнения или неравенств и на основе этого синтезируется оптимальное управление,

минимизирующее максимальное отклонение выхода. Эти результаты навели авторов на мысль о том, что когда сумма квадратичной формы начального состояния и интеграла от квадратичной формы возмущения ограничена сверху заданной величиной, состояние системы принадлежит эллипсоиду с матрицей, удовлетворяющей указанному линейному дифференциальному уравнению. Подтверждение такого предположения было найдено в работах [11, 13], в последней из которых методом динамического программирования показано, что при аналогичном ограничении множеством достижимости системы является эллипсоид, матрица которого является решением дифференциального уравнения Риккати. На этой основе в [13] был построен оптимальный наблюдатель, обеспечивающий эллипсоидальную оценку состояния системы. Однако указанные результаты получены при достаточно жестких условиях невырожденности квадратичных форм начального состояния и возмущений, которые означают, что начальное состояние должно принадлежать невырожденному эллипсоиду, а возмущения должны присутствовать в уравнении для каждой компоненты состояния и в измерении каждой компоненты выхода.

В данной работе эти результаты развиваются в нескольких направлениях одновременно как для непрерывных (см. также [25]), так и для дискретных линейных нестационарных систем. Во-первых, показано, что в случае вырожденных квадратичных форм в совместном ограничении на начальное состояние и возмущение и, в частности, в крайних случаях, когда возмущение отсутствует или когда начальное состояние нулевое, множествами достижимости системы также являются эллипсоиды, в том числе и вырожденные. Необходимость в изучении множеств достижимости в случае вырожденной квадратичной формы начального состояния возникает, например, в задачах управления механическими системами с ударными воздействиями, когда некоторые переменные состояния известны, а некоторые испытывают мгновенные неопределенные изменения. Рассмотрение этого вопроса потребовало применить иной подход для обоснования результата, который привел к линейным матричным дифференциальному или разностному уравнениям Ляпунова, описывающим динамику эллипсоидального множества достижимости в непрерывном и дискретном случаях. Установлено, что величина максимальной на заданном интервале времени полуоси эллипсоидального множества достижимости для данного выхода системы действительно совпадает с обобщенной H_2 -нормой системы при ненулевых начальных условиях. Во-вторых, получено уравнение оптимального эллипсоидального наблюдателя, обеспечивающего оценку состояния в виде эллипсоида минимального размера в том числе и в вырожденном случае, когда возмущения в системе и помехи в измерениях могут отсутствовать в некоторых уравнениях. Выявлена связь оптимального эллипсоидального наблюдателя в задачах фильтрации и идентификации неизвестных параметров с фильтром Калмана и рекуррентным алгоритмом метода наименьших взвешенных квадратов соответственно. В-третьих, показано, как синтезировать ограниченное управление, при котором состояние системы попадает в целевое эллипсоидальное множество или траектория системы удерживается в заданной эллипсоидальной трубке. Все результаты иллюстрируются на примере линейного нестационарного осциллятора, описываемого уравнением Матъе.

2. Эллипсоидальные множества достижимости

Рассмотрим динамический объект, описываемый нестационарной системой линейных дифференциальных или разностных уравнений

$$(2.1) \quad \partial x(t) = A(t)x(t) + B(t)v(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, t_f],$$

где ∂ – оператор дифференцирования в непрерывном случае или оператор сдвига на единицу вперед в дискретном случае при $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_f$, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние объекта, $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ – возмущение, действующее на объект. Введем обозначения, позволяющие в дальнейшем рассматривать параллельно непрерывный и дискретный случаи: для вектора a и для непрерывной или дискретной вектор-функции $b(t)$ на интервале $[t_0, t]$ обозначим:

$$|a|_Q^2 = a^T Q^{-1} a, \quad \|b\|_M^2 [t_0, t] = \begin{cases} \int_{t_0}^t b^T(\sigma) M^{-1}(\sigma) b(\sigma) d\sigma, \\ \sum_{i=t_0}^{t-1} b_i^T M_i^{-1} b_i \end{cases}$$

для обратимых матриц Q , $M(\sigma)$ и M_i . Если обозначение матрицы у нормы отсутствует, это значит матрица единичная.

Предположим, что начальное состояние $x(t_0)$ и возмущение $v = v(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, t]$ принадлежат множеству допустимых пар начальных состояний и возмущений, определяемому как

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & S(t, t_0; R, G) = \\ & = \left\{ (x, v(\sigma)) : x = R^{1/2} w_1, v(\sigma) = G^{1/2}(\sigma) w_2(\sigma), |w_1|^2 + \|w_2\|_{[t_0, t]}^2 \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

для заданных матрицы $R^T = R \geq 0$ и матричной функции $G^T(\sigma) = G(\sigma) \geq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$. Если $R > 0$ и $G(\sigma) > 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, то, выражая w_1 и $w_2(\sigma)$ из первых двух равенств в (2.2) и подставляя в последнее неравенство, получим, что в невырожденном случае допустимые начальные условия и возмущения удовлетворяют неравенству

$$(2.3) \quad |x(t_0)|_R^2 + \|v\|_G^2 [t_0, t] \leq 1.$$

Левую часть этого неравенства можно интерпретировать как квадрат меры неопределенности в системе для текущего момента времени, а само условие (2.3) — как то, что мера неопределенности в системе не превышает известной величины, которую, не умаляя общности, можно принять единицей. Другими словами, начальное состояние находится внутри заданного эллипсоида, а “энергия” возмущения ограничена величиной, зависящей от начального состояния. Смысл этого совместного ограничения на начальное состояние и возмущение можно пояснить следующим образом. Состояние линейной системы в текущий момент времени зависит линейно от начальных условий и возмущения и их увеличение приводит к соответствующему увеличению переменных состояния. Для того чтобы характеризовать поведение системы при неопределенных начальных условиях и возмущениях, имеет смысл нормировать текущее значение евклидовой нормы состояния величиной, равной

указанной сумме, или, что то же самое для линейных систем, ограничить указанную сумму единицей.

Весовая матрица R при заданной $G(\sigma)$ отражает относительную важность учета неопределенностей начальных условий и внешнего возмущения: чем “больше” R , тем больший вес придается неопределенности в начальных условиях. Из (2.2) следует, что множество начальных состояний системы совпадает с эллипсоидом $\mathcal{E}(R) = \{x = R^{1/2}w : |w| \leq 1\}$. Если $R > 0$, то приходим к стандартному представлению эллипсоида $\mathcal{E}(R) = \{x : x^T R^{-1}x \leq 1\}$. Если $R \geq 0$, то $\mathcal{E}(R)$ – вырожденный эллипсоид, аффинная размерность которого совпадает с рангом матрицы R [26, с. 30]. Обозначим через $\varphi(t; \tau, x, v)$ решение уравнения (2.1) с начальным условием $\varphi(\tau) = x$ при соответствующей функции $v = v(\sigma)$, $\sigma \in [\tau, t]$.

Задача состоит в описании множества состояний, в которых система может оказаться в определенный момент времени при всевозможных начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$.

Определение 1. Множеством достижимости $\mathcal{D}(t, \tau, \mathcal{E}(R))$ системы (2.1) в момент времени $t \geq \tau$ называется совокупность концов траекторий $\varphi(t; \tau, x_\tau, v)$ при всех допустимых начальных состояниях $x_\tau \in \mathcal{E}(R)$ в момент времени τ и возмущениях $v(\sigma)$, $\sigma \in [\tau, t]$, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, \tau; R, G)$.

Теорема 2.1. Множеством достижимости системы (2.1) в момент времени $t \geq t_0$ при всех допустимых начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, $t \in [t_0, t_f]$ с $R \geq 0$ и $G(\sigma) \geq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, является эллипсоид

$$(2.4) \quad \mathcal{D}(t, t_0, \mathcal{E}(R)) = \mathcal{E}(P(t)),$$

матрица $P(t) \geq 0$ которого в непрерывном случае – решение линейного матричного дифференциального уравнения

$$(2.5) \quad \dot{P} = A(t)P + PA^T(t) + B(t)G(t)B^T(t)$$

и в дискретном случае – решение линейного матричного разностного уравнения

$$(2.6) \quad P(t+1) = A(t)P(t)A^T(t) + B(t)G(t)B^T(t)$$

с начальным условием $P(t_0) = R$.

Доказательство теоремы 2.1. В непрерывном случае решение уравнения (2.5) имеет вид

$$(2.7) \quad P(t) = \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)G(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t, \tau)d\tau,$$

где $\Phi(t, \tau)$ – решение уравнения

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = A(t)\Phi(t, \tau), \quad \Phi(\tau, \tau) = I.$$

Рассмотрим сначала регулярный случай $R > 0$ и $G(t) > 0$, $t \in [t_0, t_f]$. Так как $\Phi(t, \tau)$ – невырожденная матрица, то тогда $P(t) > 0$, $t \in [t_0, t_f]$. Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму $V(t, x) = x^T P^{-1}(t)x$ с матрицей $P(t)$, удовлетворяющей уравнению (2.5). Вычислим ее производную в силу системы (2.1), принимая во внимание, что $d(P^{-1})/dt = -P^{-1}(\dot{P})P^{-1}$:

$$(2.8) \quad \dot{V} = v^T G^{-1}v - (v - v_*)^T G^{-1}(v - v_*),$$

где $v_*(t) = G(t)B^T(t)P^{-1}(t)x(t)$, а $x(t)$ – решение уравнения

$$(2.9) \quad \dot{x} = [A(t) + B(t)G(t)B^T(t)P^{-1}(t)]x.$$

Интегрируя (2.8) на интервале $[t_0, t]$, имеем

$$(2.10) \quad x^T(t)P^{-1}(t)x(t) = |x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2 - \|v - v_*\|_{G[t_0, t]}^2.$$

Так как $R > 0$ и $G(\sigma) > 0$, то для $(x_0, v(\sigma)) \in \mathcal{S}(t, t_0; R, G)$ выполняется неравенство (2.3). Следовательно,

$$(2.11) \quad x^T(t)P^{-1}(t)x(t) \leq 1,$$

т.е. $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$.

Покажем, что для любой точки $\bar{x} \in \mathcal{E}(P(t))$ найдется точка $\bar{x}_0 \in \mathcal{E}(R)$ и возмущение $\bar{v}(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, t]$, принадлежащие $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, такие что выполняется $\varphi(t; t_0, \bar{x}_0, \bar{v}) = \bar{x}$. Возьмем $\bar{v}(\sigma) = v_*(\sigma)$, где $x(\sigma)$ – решение уравнения (2.9) с конечным условием $x(t) = \bar{x}$. Очевидно, что в качестве искомой точки следует взять начальную точку $\bar{x}_0 = x(t_0)$ этой траектории. С учетом (2.10) получим

$$|\bar{x}_0|_R^2 + \|v_*\|_{G[t_0, t]}^2 = \bar{x}^T P^{-1}(t)\bar{x} \leq 1.$$

Следовательно, $|\bar{x}_0|_R^2 \leq 1$, т.е. $\bar{x}_0 \in \mathcal{E}(R_0)$.

Рассмотрим теперь вырожденный случай $R \geq 0$ и $G(t) \geq 0$, $t \in [t_0, t_f]$. Введем матрицы

$$R_\varepsilon = R + \varepsilon I > 0, \quad G_\varepsilon(t) = G(t) + \varepsilon I > 0.$$

Решение уравнения (2.5), в котором матрица $G(t)$ заменена матрицей $G_\varepsilon(t)$ и начальное условие есть $P(t_0) = R_\varepsilon$, имеет вид $P_\varepsilon(t) = P(t) + \varepsilon P_1(t) > 0$, где $P_1(t) > 0$ – решение уравнения (2.5) при $G(\sigma) \equiv I$ и $R = I$. Согласно доказанному невырожденный эллипсоид $\mathcal{E}(P_\varepsilon(t))$ есть множество достижимости системы при начальных состояниях и возмущениях из множества $\mathcal{S}(t, t_0; R_\varepsilon, G_\varepsilon)$.

Покажем, что множество достижимости системы при начальных состояниях и возмущениях из множества $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$ в случае $R \geq 0$ и $G(t) \geq 0$ также представляется в виде вырожденного эллипсоида $\mathcal{E}(P(t)) = \left\{ x = P^{1/2}(t)w, |w| \leq 1 \right\}$. Для этого сначала покажем, что для произвольной пары из $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$ конец траектории в момент t будет принадлежать эллипсоиду $\mathcal{E}(P(t))$. Зафиксируем начальное состояние $x_0 \in \mathcal{E}(R)$ и выберем некоторое малое $\varepsilon > 0$. Поскольку $\mathcal{S}(t, t_0; R, G) \subset \mathcal{S}(t, t_0; R_\varepsilon, G_\varepsilon)$, то

для данного начального состояния и некоторого допустимого возмущения конец фазовой траектории $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0, v)$ в момент t будет принадлежать эллипсоиду $\mathcal{E}(P_\varepsilon(t))$ для любого сколь угодно малого ε . Это значит, что $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$.

Покажем теперь, что для любого состояния $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$ найдется пара $(x_0^*, v^*(\sigma)) \in \mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, для которой $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0^*, v^*)$. Так как $x(t) \in \mathcal{E}(P_\varepsilon(t))$ и $\mathcal{E}(P_\varepsilon(t))$ – область достижимости системы в регулярном случае при $R_\varepsilon > 0$ и $G_\varepsilon(\sigma) > 0$, то найдется пара $(x_0^\varepsilon, v^\varepsilon(\sigma)) \in \mathcal{S}(t, t_0; R_\varepsilon, G_\varepsilon)$, где $x_0^\varepsilon = (R + \varepsilon I)^{1/2} w_1^\varepsilon$, $v^\varepsilon(\sigma) = (G + \varepsilon I)^{1/2} w_2^\varepsilon(\sigma)$, $|w_1^\varepsilon|^2 + \|w_2^\varepsilon(\sigma)\|^2 \leq 1$, для которой $x(t) = \varphi(t; t_0, x_0^\varepsilon, v^\varepsilon)$. Возьмем последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как последовательность $(w_1^{\varepsilon_n}, w_2^{\varepsilon_n}(\sigma))$ ограничена в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$\langle (w_1^{(1)}, w_2^{(1)}(\sigma)), (w_1^{(2)}, w_2^{(2)}(\sigma)) \rangle = w_1^{(1)\text{T}} w_1^{(2)} + \int_{t_0}^t w_2^{(1)\text{T}}(\sigma) w_2^{(2)}(\sigma) d\sigma,$$

то она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность [27, теорема 1.8.1]. Согласно [27, теорема 1.8.4] из указанной подпоследовательности можно извлечь такую подпоследовательность $(w_1^{\varepsilon_{n_k}}, w_2^{\varepsilon_{n_k}}(\sigma))$, что последовательность ее средних арифметических $\sum_{k=1}^m (w_1^{\varepsilon_{n_k}}, w_2^{\varepsilon_{n_k}}(\sigma))/m$ сильно сходится к $(w_1^*, w_2^*(\sigma))$ при $m \rightarrow \infty$. Так как множество $\{(w_1, w_2(\sigma)) : |w_1|^2 + \|w_2(\sigma)\|^2 \leq 1\}$ выпукло и замкнуто, то все члены последней последовательности принадлежат этому множеству и $|w_1^*|^2 + \|w_2^*(\sigma)\|^2 \leq 1$. В силу принципа суперпозиции для линейной системы траектории с начальными состояниями и возмущениями, соответствующими каждой паре указанной последовательности средних арифметических, в момент времени t попадают в $x(t)$. Так как $\hat{\varepsilon}_m = \sum_{k=1}^m \varepsilon_{n_k}/m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то $R + \hat{\varepsilon}_m I \rightarrow R$, $G(\sigma) + \hat{\varepsilon}_m I \rightarrow G(\sigma)$, $P(t) + \hat{\varepsilon}_m P_1(t) \rightarrow P(t)$ при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, $(x_0^*, v^*(\sigma))$ с $x_0^* = R^{1/2} w_1^*$ и $v^*(\sigma) = G^{1/2} w_2^*(\sigma)$ есть искомая пара.

Замечание 1. Возможно альтернативное доказательство утверждения теоремы, основанное на понятии опорной функции множества достижимости [11], вычисление которой сводится к максимизации скалярного произведения на шаре².

Переходим к дискретному случаю. Начнем со вспомогательного утверждения, доказательство которого приведено в Приложении.

Лемма 2.1. Пусть S – $(m \times n)$ -матрица, причем $m \leq n$. Следующие два множества совпадают:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= \{x = Sg \quad \forall g \in \mathbb{R}^n : |g| \leq 1\} = \\ &= \left\{ x = (SS^{\text{T}})^{1/2} w \quad \forall w \in \mathbb{R}^m : |w| \leq 1 \right\} = \mathcal{S}_2, \end{aligned}$$

где \mathcal{S}_2 – эллипсоид, матрица которого SS^{T} .

² Это доказательство любезно предоставил авторам А.И. Матасов.

Решение уравнения (2.1) имеет вид

$$(2.12) \quad x(t) = \Psi(t, t_0)x(t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \Psi(t, i+1)B(i)v(i), \quad t \geq t_0 + 1,$$

где переходная матрица

$$\Psi(t, t_0) = \begin{cases} A(t-1)A(t-2) \cdots A(t_0), & t \geq t_0 + 1, \\ I, & t = t_0, \end{cases}$$

является решением разностного уравнения

$$(2.13) \quad \Psi(t+1, t_0) = A(t)\Psi(t, t_0), \quad \Psi(t_0, t_0) = I, \quad t \geq t_0.$$

С учетом (2.2) запишем (2.12) в виде

$$(2.14) \quad x(t) = S_t g_t, \quad g_t^T g_t \leq 1,$$

где

$$S_t = (\Psi(t, t_0)R^{1/2} \quad \Psi(t, t_0+1)B(t_0)G^{1/2}(t_0) \cdots \Psi(t, t)B(t-1)G^{1/2}(t-1)), \\ g_t = \text{col}(w_1, w_2(t_0), \dots, w_2(t-1)).$$

Заметим, что $S_t S_t^T = P(t) \geq 0$, где

$$P(t) = \Psi(t, t_0)R\Psi^T(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \Psi(t, i+1)B(i)G(i)B^T(i)\Psi^T(t, i+1),$$

т.е. матрица $P(t)$ является решением разностного уравнения (2.6). Таким образом, множество достижимости в момент времени t образуют все векторы вида (2.14). В силу леммы 2.1 это множество совпадает с эллипсоидом $\mathcal{E}(P(t))$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Множество достижимости системы (2.1) при начальных состояниях и возмущениях из множества $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$ обладает эволюционным свойством

$$\mathcal{D}(t, t_0, \mathcal{E}(R)) = \mathcal{D}(t, \tau, \mathcal{D}(\tau, t_0, \mathcal{E}(R))),$$

так как $\mathcal{D}(\tau, t_0, \mathcal{E}(R)) = \mathcal{E}(P(\tau))$ и $\mathcal{D}(t, \tau, \mathcal{E}(P(\tau))) = \mathcal{D}(t, t_0, \mathcal{E}(R))$ для любого $\tau \in [t_0, t]$.

Замечание 2. Заметим, что уравнения (2.5) и (2.6) в теореме 2.1 совпадают с уравнениями для ковариационных матриц $Ex(t)x^T(t)$ состояния системы (2.1) в непрерывном и дискретном случаях, когда начальное состояние и возмущения являются случайными независимыми процессами с нулевыми математическими ожиданиями и заданными ковариационными матрицами $Ex(t_0)x^T(t_0) = R$, $Ev(t)v^T(t) = G(t)$ [28].

Замечание 3. Непосредственно, но достаточно громоздко проверяется, что в дискретном случае при условии $\det A(t) \neq 0$, $R > 0$ и $G(t) > 0$ для приращения функции $V(t) = x^T P^{-1}(t)x$, где $P(t) > 0$, $t \in [t_0, t_f]$ — решение урав-

нения (2.6), в силу системы тождественно выполняется

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \Delta V(t) &= v^T(t)G^{-1}(t)v(t) - \\ &- (v(t) - v_*(t))^T[G^{-1}(t) - B^T(t)P^{-1}(t+1)B(t)](v(t) - v_*(t)), \end{aligned}$$

где $v_*(t) = [G^{-1}(t) - B^T(t)P^{-1}(t+1)B(t)]^{-1}B^T(t)P^{-1}(t+1)A(t)x(t)$. Неравенство $G^{-1}(t) - B^T(t)P^{-1}(t+1)B(t) > 0$ по лемме Шура эквивалентно неравенству $P(t+1) - B(t)G(t)B^T(t) > 0$, которое выполняется в силу уравнения (2.6). Следовательно, суммируя тождества (2.15) и учитывая начальное условие $P(t_0) = R$, а также (2.3), получим

$$x^T(t_f)P^{-1}(t_f)x(t_f) \leq 1,$$

т.е. $x(t_f) \in \mathcal{E}(P(t_f))$ для всех допустимых начальных состояний и возмущений.

В частном случае, когда возмущения отсутствуют и начальное состояние принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(R)$, $R \geq 0$, т.е. множеством допустимых начальных состояний и возмущений является $\mathcal{S}(t, t_0; R, 0)$, множество достижимости системы (2.1) есть эллипсоид $\mathcal{E}(P_0(t))$, матрица которого $P_0(t) \geq 0$ – решение уравнения (2.5) или (2.6) при $G(t) \equiv 0$ с начальным условием $P_0(t_0) = R$. В другом частном случае при нулевом начальном состоянии, когда множество допустимых начальных состояний и возмущений составляет $\mathcal{S}(t, t_0; 0, G)$, множеством достижимости является эллипсоид $\mathcal{E}(P_v(t))$, матрица которого $P_v(t) \geq 0$ – решение уравнения (2.5) или (2.6) с нулевым начальным условием $P_v(t_0) = 0$. Так как решение неоднородного уравнения представимо в виде

$$(2.16) \quad P(t) = P_0(t) + P_v(t),$$

то $\mathcal{E}(P_0(t)) \subseteq \mathcal{E}(P(t))$ и $\mathcal{E}(P_v(t)) \subseteq \mathcal{E}(P(t))$.

Замечание 4. Обратим внимание на возможность определения множества достижимости с помощью решения обратной задачи: для заданной матрицы $S > 0$ найти матрицу $R > 0$ такую, что множество достижимости системы (2.1) в момент времени $t \geq t_0$ при всех допустимых начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, совпадает с эллипсоидом $\mathcal{E}(S)$. Действительно, запишем уравнения

$$(2.17) \quad \dot{Q} = -A^T(t)Q - QA(t) - QB(t)G(t)B^T(t)Q$$

для непрерывного случая и

$$(2.18) \quad Q(t) = A^T(t)Q(t+1)A(t) - A^T(t)Q(t+1)B(t)M^{-1}(t)B^T(t)Q(t+1)A(t)$$

с $M(t) = G^{-1}(t) - B^T(t)Q(t+1)B(t) > 0$ для дискретного случая, которые являются сопряженными к уравнениям (2.5) и (2.6). Задавая $Q(t_f) = S^{-1}$ в уравнениях (2.17) и (2.18) и находя $Q(t_0)$, получим, что заданный эллипсоид $\mathcal{E}(S)$ является областью достижимости системы (2.1) при всех начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; Q^{-1}(t_0), G)$.

Далее, пусть $z = C_z(t)x$ – некоторый выход системы (2.1). Если $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$, т.е. $x(t) = P^{1/2}(t)w$, где $|w| \leq 1$, то $z(t) = C_z(t)P^{1/2}(t)w$. Согласно лемме 2.1 множество всех таких векторов составляет эллипсоид

$\mathcal{E}(C_z(t)P(t)C_z^T(t)) = \left\{ z : z = (C_z(t)P(t)C_z^T(t))^{1/2} g, |g| \leq 1 \right\}$, а максимальное значение евклидовой нормы выхода совпадает с величиной максимальной полуоси этого эллипсоида, т.е.

$$(2.19) \quad \max_{(x_0, v) \in \mathcal{S}(t, t_0; R, G)} |z(t)| = \lambda_{\max}^{1/2}(C_z(t)P(t)C_z^T(t)).$$

Если $R > 0$ и $G(\sigma) > 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, то максимальное значение этой величины на заданном отрезке времени $[t_0, t_f]$

$$(2.20) \quad \sup_{t \in [t_0, t_f]} \max_{(x_0, v) \in \mathcal{S}(t, t_0; R, G)} |z(t)| = \max_{x(t_0) \neq 0, v \neq 0} \frac{\sup_{t \in [t_0, t_f]} |z(t)|}{\left(|x(t_0)|_R^2 + \|v\|_{G[t_0, t]}^2 \right)^{1/2}} = \\ = \sup_{t \in [t_0, t_f]} \lambda_{\max}^{1/2}(C_z(t)P(t)C_z^T(t))$$

совпадает с максимальным уклонением выхода, которое при $G(\sigma) \equiv I$ является обобщенной H_2 -нормой системы при ненулевых начальных условиях [20–23].

Полученный в теореме 2.1 результат непосредственным образом переносится на случай, когда область неопределенности начального состояния есть эллипсоид с центром не в нуле, а в заданной точке x_* . Действительно, пусть начальное состояние и возмущение системы $(x_0, v(\sigma))$ представимы в виде

$$x_0 = x_* + R^{1/2}w_1, \quad v(\sigma) = G^{1/2}(\sigma)w_2(\sigma), \quad |w_1|^2 + \|w_2\|_{[t_0, t]}^2 \leq 1.$$

Отсюда следует, что начальное состояние принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(R, x_*)$ с центром в x_* и матрицей R . В силу линейности системы представим ее решение в виде двух слагаемых: решения возмущенной системы с начальным состоянием, принадлежащим соответствующему эллипсоиду с центром в начале координат, и решения невозмущенной системы с начальным состоянием x_* , т.е.

$$\varphi(t; t_0, x_0, v) = \varphi(t; t_0, x_0 - x_*, v) + \varphi_*(t), \quad \varphi_*(t) = \varphi(t; t_0, x_*, 0).$$

Тогда из теоремы 2.1 следует, что в этом случае множество достижимости системы в момент времени t представляет собою эллипсоид с центром в точке $\varphi_*(t)$ и матрицей $P(t)$, т.е.

$$\mathcal{D}(t, t_0, \mathcal{E}(R, x_*)) = \mathcal{E}(P(t), \varphi_*(t)).$$

Для иллюстрации теоремы 2.1 рассмотрим известное уравнение Матье, описывающее параметрические колебания линейного осциллятора. Представим это уравнение в виде системы дифференциальных уравнений

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin \omega t)x_1 + v, \\ x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \end{aligned}$$

где ω_0 , ω и ε – заданные параметры, $v = v(t)$ – внешнее возмущение, действующее на осциллятор. Известно [1, с. 162], что при определенном соотношении параметров в рассматриваемой системе возможен параметрический

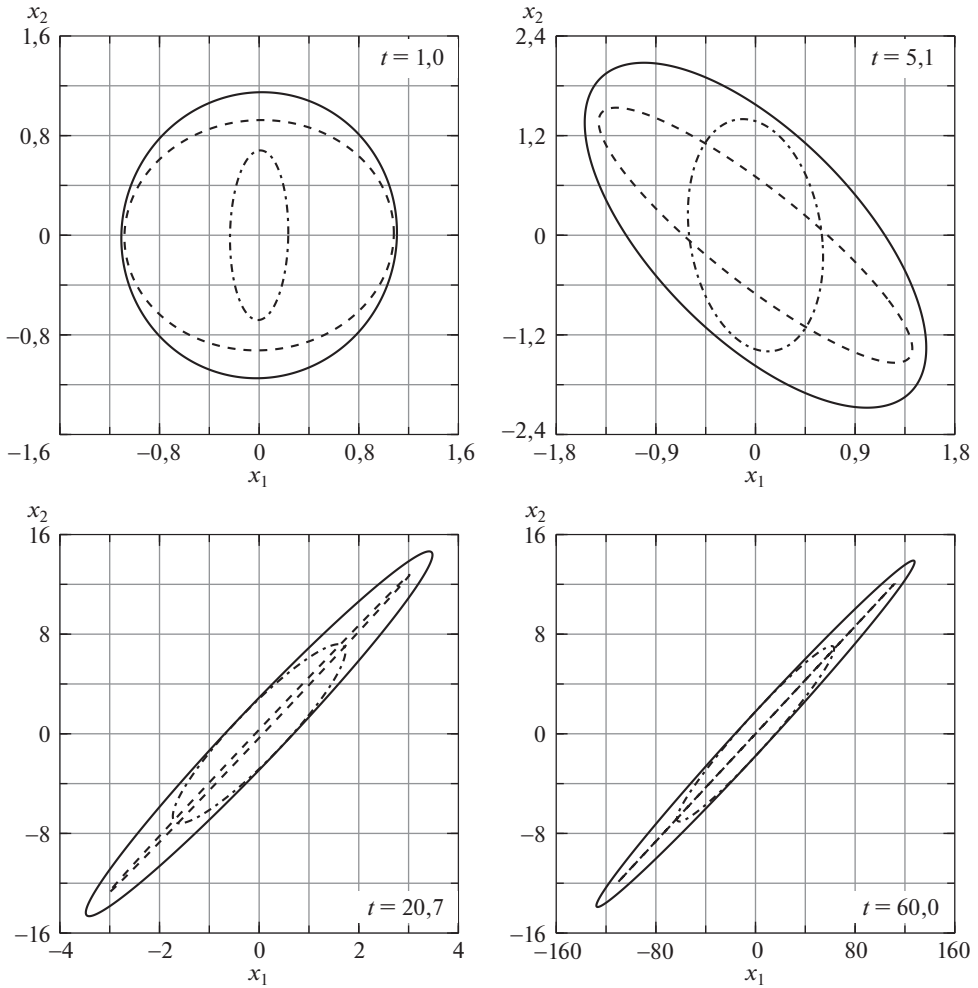


Рис. 1. Динамика множеств достижимости уравнения Мат'ко в регулярном случае.

резонанс. Основной резонанс возникает при соотношении $\omega_0/\omega = 1/2$. Далее при проведении вычислительных экспериментов будем полагать, что $\omega_0 = \pi$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0,1$.

На рис. 1 для моментов времени 1, 5,1, 20,7, 60 показаны множества достижимости для регулярного случая, когда $R = \text{diag}(1, 1)$, $G(\sigma) \equiv 1$ (сплошная линия), для вырожденного случая, когда отсутствует внешнее возмущение $G(\sigma) \equiv 0$ (пунктирная линия), и для вырожденного случая, когда начальное состояние нулевое $R = 0$ (штрих-пунктирная линия). Заметим, что при $t = 60$ эллипс, обозначенный пунктирной линией, имеет длины полуосей, равные 0,0093 и 111,75 соответственно.

Далее рассмотрим вырожденный случай, когда внешнее возмущение отсутствует ($G(\sigma) \equiv 0$), а в качестве матрицы R выбрана вырожденная диагональная матрица $R = \text{diag}(0, 1)$. Другими словами, в качестве допустимых начальных условий полагается $x_{10} = 0$, $x_{20} \in [-1, 1]$. Для этого случая на рис. 2 показана эволюция во времени величины L , определяющей длину по-

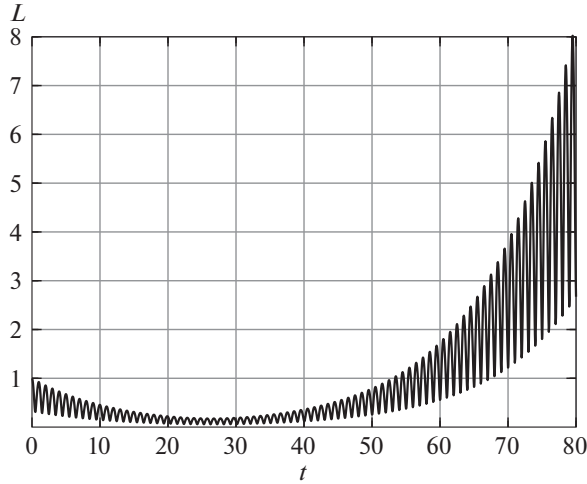


Рис. 2. Динамика “размера” множества достижимости уравнения Матье в вырожденном случае.

ловины отрезка — множества достижимости. Заметим, что эта зависимость носит колебательный характер с частотой, близкой к 2π .

3. Оптимальное эллипсоидальное оценивание состояния и параметров

Рассмотрим задачу оценивания состояния $x(t)$ линейной нестационарной системы

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)v(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t) \end{aligned}$$

с неизвестным начальным состоянием $x(t_0)$ по измерениям выхода $y(\sigma)$, $\sigma \in [t_0, t]$. Предположим, что начальное состояние системы и возмущения представимы в виде

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x(t_0) - x_* &= R^{1/2}w_1, \quad v(\sigma) = G^{1/2}(\sigma)w_2(\sigma), \\ |w_1|^2 + \|w_2\|_{[t_0, t]}^2 &\leq 1, \quad t \in [t_0, t_f] \end{aligned}$$

для заданных матрицы $R^\Gamma = R \geq 0$ и матричной функции $G^\Gamma(\sigma) = G(\sigma) \geq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$. Построим наблюдатель полного порядка

$$(3.3) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + L(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(t_0) = x_*,$$

где $\hat{x}(t)$ — оценка состояния $x(t)$, а $L(t)$ — матрица параметров наблюдателя, подлежащая определению. Обозначим ошибку оценивания: $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$(3.4) \quad \dot{e}(t) = A_c(t)e(t) + B_c(t)v(t), \quad e(t_0) = x(t_0) - x_*,$$

где $A_c(t) = A(t) - L(t)C(t)$, $B_c(t) = B(t) - L(t)D(t)$. Тогда множество достижимости системы (3.4) в момент времени t согласно теореме 2.1 есть эллип-

соид $\mathcal{E}(P(t))$, матрица которого в непрерывном случае удовлетворяет уравнению

$$(3.5) \quad \dot{P} = A_c(t)P + PA_c^T(t) + B_c(t)G(t)B_c^T(t)$$

с начальным условием $P(t_0) = R$, а в дискретном случае – уравнению

$$(3.6) \quad P(t+1) = A_c(t)P(t)A_c^T(t) + B_c(t)G(t)B_c^T(t)$$

с начальным условием $P(t_0) = R$. Это означает, что состояние $x(t)$ системы (3.1) находится внутри соответствующего эллипсоида $\mathcal{E}(P(t), \hat{x}(t))$ с центром в точке $\hat{x}(t)$, определяемой уравнением наблюдателя (3.3). Это множество естественно назвать эллипсоидальной оценкой состояния $x(t)$ в момент времени t , а наблюдатель с матрицей $L_*(t)$, при которой, например, след матрицы $P(t)$ будет минимальным, назвать оптимальным.

Согласно замечанию 2 динамика матрицы эллипсоидального множества достижимости уравнения (3.4) описывается тем же уравнением, что и динамика ковариационной матрицы ошибки $Ee(t)e^T(t)$ в стохастическом случае, когда ковариация начального состояния равна $Ex(t_0)x^T(t_0) = R$, а ковариация возмущения равна $Ev(t)v^T(t) = G(t)$. Так как след матрицы эллипсоидальной оценки равен дисперсии ошибки оценивания, то уравнение оптимального наблюдателя совпадает с уравнением фильтра Калмана для оценки состояния системы (3.1), в которой возмущения $\xi_1(t) = B(t)v(t)$ и $\xi_2(t) = D(t)v(t)$, входящие аддитивно в уравнение состояния и в уравнение измерения, являются коррелированными

$$(3.7) \quad E \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} (\xi_1^T(t) \xi_2^T(t)) = \begin{pmatrix} B(t)G(t)B^T(t) & * \\ D(t)G(t)B^T(t) & D(t)G(t)D^T(t) \end{pmatrix},$$

где * замещает матрицу, транспонированную к симметрично расположенному блоку. Принимая во внимание стандартное требование в контексте калмановской фильтрации о невырожденности ковариационной матрицы возмущений в измерениях [28, с. 404], приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. Если $\det[D(\sigma)G(\sigma)D^T(\sigma)] \neq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, то оптимальный наблюдатель (3.3), обеспечивающий наилучшую эллипсоидальную оценку $\mathcal{E}(P_(t), \hat{x}(t))$ состояния системы (3.1) в момент времени $t \geq t_0$ при любых начальных состояниях и возмущениях, удовлетворяющих условию (3.2) при $R \geq 0$ и $G(\sigma) \geq 0$, $\sigma \in [t_0, t]$, определяется в непрерывном случае матрицей $L(t)$, равной*

$$(3.8) \quad L^{(c)}(t) = [D(t)G(t)B^T(t) + C(t)P_*(t)]^T [D(t)G(t)D^T(t)]^{-1},$$

где матрица $P_*(t) \geq 0$ является решением уравнения (3.5) при $L(t) = L^{(c)}(t)$, а в дискретном случае – матрицей $L(t)$, равной

$$(3.9) \quad L^{(d)}(t) = [A(t)P_*(t)C^T(t) + B(t)G(t)D^T(t)] [C(t)P_*(t)C^T(t) + D(t)G(t)D^T(t)]^{-1},$$

где $P_*(t) \geq 0$ – решение уравнения (3.6) при $L(t) = L^{(d)}(t)$.

Замечание 5. Если $z(t) = C_z(t)x(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ – некоторый выход системы (3.1), то оптимальной эллипсоидальной оценкой выхода в момент времени t является эллипсоид $\mathcal{E}(C_z(t)P_*(t)C_z^T(t), \hat{z}(t))$, где $\hat{z}(t) = C_z(t)\hat{x}(t)$, а $\hat{x}(t)$ – оценка состояния, определяемая оптимальным наблюдателем (3.3).

Замечание 6. Установленное соответствие между оптимальным наблюдателем и фильтром Калмана позволяет выявить важное свойство последнего. Пусть $\hat{x}(t)$ – оценка состояния системы (3.1), определяемая фильтром Калмана при заданных ковариационных матрицах начального состояния $K_x(t_0) = R$ и возмущения $K_v(t) \equiv G(t)$, а $P_*(t)$ – ковариация ошибки этой оценки. Тогда при любых детерминированных начальных состояниях и возмущениях вида (3.2) состояние системы $x(t)$ принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(P_*(t), \hat{x}(t))$.

Представим теперь задачу оценивания неизвестных параметров линейной регрессии

$$(3.10) \quad \chi(t) = \Phi(t)\zeta_0 + v(t), \quad t = t_0, \dots, t_f,$$

где $\chi(t)$ – вектор измерений, $\Phi(t)$ – матрица регрессоров, ζ_0 – вектор неизвестных параметров, $v(t)$ – вектор помех измерений, как задачу оптимального эллипсоидального оценивания состояния системы

$$(3.11) \quad \zeta(t+1) = \zeta(t), \quad \zeta(t_0) = \zeta_0$$

по измерениям зашумленного выхода $\chi(t)$. Предположим, что неизвестные параметры и возмущения удовлетворяют ограничению

$$(3.12) \quad (\zeta_0 - \zeta_*)^T R^{-1} (\zeta_0 - \zeta_*) + \|v\|_{G[t_0, t]}^2 \leq 1, \quad t \in [t_0, t_f]$$

при $R > 0$ и $G(t) > 0$, где ζ_* – заданный вектор. Согласно теореме 3.1 оптимальный наблюдатель описывается уравнениями, которые приводятся к следующему виду:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \hat{\zeta}(t+1) &= \hat{\zeta}(t) + P(t+1)\Phi^T(t)G^{-1}(t)[\chi(t) - \Phi(t)\hat{\zeta}(t)], \quad \hat{\zeta}(t_0) = \zeta_*, \\ P(t+1) &= P(t) - P(t)\Phi^T(t)[\Phi(t)P(t)\Phi^T(t) + G(t)]^{-1}\Phi(t)P(t), \quad P(t_0) = R. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что эти уравнения описывают рекуррентный алгоритм метода наименьших взвешенных квадратов [29], а также согласно [30, с. 56], и фильтр Калмана при ковариациях $E\zeta_0\zeta_0^T = R$ и $E v(t)v^T(t) = G(t)$, а оценка $\hat{\zeta}(t)$ минимизирует функционал

$$J_t(\zeta) = (\zeta - \zeta_*)^T R^{-1} (\zeta - \zeta_*) + \sum_{i=0}^{t-1} (\chi(i) - \Phi(i)\zeta)^T G^{-1}(i) (\chi(i) - \Phi(i)\zeta).$$

Таким образом, в предположениях (3.12) метод наименьших взвешенных квадратов обеспечивает оптимальную эллипсоидальную оценку неизвестных параметров, т.е. гарантирует в момент времени t , что неизвестный вектор ζ_0 принадлежит эллипсоиду $\mathcal{E}(P(t), \hat{\zeta}(t))$.

Для иллюстрации утверждения теоремы 3.1 обратимся к уравнению Маттье, представленному в виде системы (2.21). Будем полагать, что измеряемый

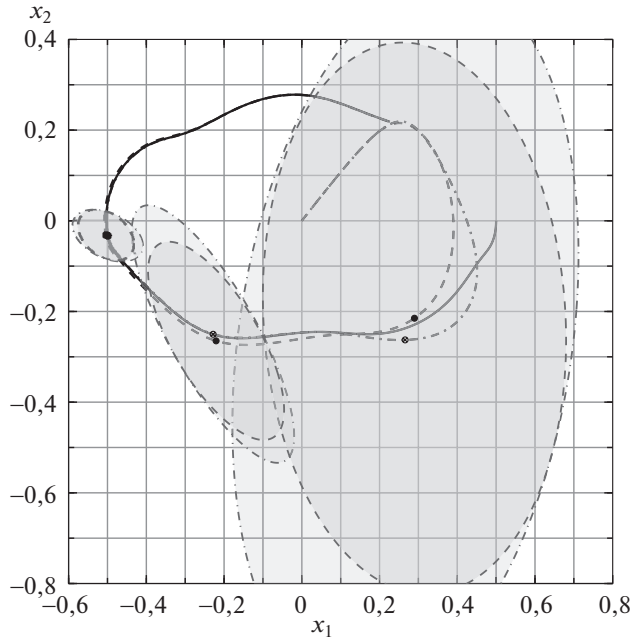


Рис. 3. Динамика оптимальной эллипсоидальной и обобщенной H_∞ -оптимальной оценок состояния для уравнения Матве.

выход этой системы

$$y = x_1 + x_2 + v.$$

При проведении вычислительных экспериментов будем считать, что $\omega_0 = \pi/6$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0,1$, $R = 10,5I$, $G(\sigma) \equiv 1$. На рис. 3 на плоскости (x_1, x_2) представлены траектория системы (сплошная линия) $x(t)$, отвечающая начальным условиям $x_{10} = 0,5$, $x_{20} = 0$ и возмущению $v(t) = 0,05 \sin \pi t$, а также траектория оптимальной оценки $\hat{x}(t)$ (пунктирная линия) и соответствующие эллипсы $\mathcal{E}(P_*(t), \hat{x}(t))$ в моменты времени $t_1 = 2$, $t_2 = 4$, $t_3 = 6$. На этом же рисунке для сравнения приведена траектория обобщенной H_∞ -оптимальной оценки (штрих-пунктирная линия), при которой обобщенная H_∞ -норма системы (3.4) [31] является минимальной, а также соответствующие эллипсоидальные оценки состояния. Эксперимент показывает, что “размеры” эллипсов с течением времени заметно уменьшаются и что эллипсы, получаемые в соответствии с обобщенной H_∞ -нормой ошибки, “больше” эллипсов, отвечающих оптимальным эллипсоидальным оценкам.

4. Оптимальные эллипсоидальные управления

Выше было установлено, что состояние линейной системы при неопределенных начальных условиях и возмущениях, связанных общим ограничением, в каждый момент времени находится внутри эволюционирующего эллипсоида. Покажем, что это позволяет синтезировать ограниченное управление вида нестационарной обратной связи по состоянию $u = \Theta(t)x$, обеспечивающее выполнение одной из следующих целей: (i) попадание состояния или вы-

хода замкнутой системы в заданное эллипсоидальное множество в определенный момент времени, (ii) нахождение в заданной эллипсоидальной трубке в каждый момент времени. Такие законы управления будем называть эллипсоидальными.

Уравнение замкнутой системы имеет вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A(t) + B_u(t)\Theta(t)]x(t) + B(t)v(t), & x(t_0) &= x_0, & t &\in [t_0, t_f], \\ z(t) &= [C_z(t) + D(t)\Theta(t)]x(t), \end{aligned}$$

где $z(t)$ – управляемый выход системы. Предполагается, что допустимые начальные состояния и возмущения принадлежат множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, вектор управления в любой момент времени должен принадлежать эллипсоиду $u(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$ с $Q_u(t) > 0$, а целевое множество есть эллипсоид $\mathcal{E}_z(Q(t)) = \{z : z^T Q^{-1}(t) z \leq 1\}$ с $Q(t) > 0$.

Далее потребуется вспомогательное утверждение, доказательство которого приведено в Приложении.

Лемма 4.1. Для заданной матрицы $\Theta(t)$ имеет место $u(t) = \Theta(t)x(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$ с $Q_u(t) > 0$ при всех $x(t) \in \mathcal{E}(P(t))$ с $P(t) \geq 0$ тогда и только тогда, когда линейное матричное неравенство

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} P(t) & * \\ \Theta(t)P(t) & Q_u(t) \end{pmatrix} \geq 0$$

разрешимо относительно $P(t)$.

Согласно теореме 2.1 состояние замкнутой системы (4.1) в непрерывном случае в каждый момент времени находится внутри эллипсоида $\mathcal{E}(P(t))$, матрица которого удовлетворяет уравнению

$$(4.3) \quad \dot{P} = A(t)P + PA^T(t) + B_u(t)Z(t) + Z^T(t)B_u^T(t) + B(t)G(t)B^T(t)$$

с начальным условием $P(t_0) = R$, в котором $Z(t) = \Theta(t)P(t)$. Тогда при всех допустимых начальных условиях и возмущениях целевой выход замкнутой системы будет находиться внутри эллипсоида $\mathcal{E}_z(Q_z(t))$, где $Q_z(t) = [C(t) + D(t)\Theta(t)]P(t)[C(t) + D(t)\Theta(t)]^T$, и будет содержаться внутри целевого множества, если $\mathcal{E}_z(Q_z(t)) \subseteq \mathcal{E}(Q(t))$, т.е. $Q_z(t) \leq Q(t)$. Подставляя в это неравенство выражение для $Q_z(t)$ и применяя лемму Шура, а также учитывая лемму 4.1, приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. Закон управления $u = \Theta(t)x$ с параметрами $\Theta(t) = Z(t)P^{-1}(t)$ удовлетворяет ограничению $u(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$, $Q_u(t) > 0$, $\forall t \in [t_0, t_f]$ и обеспечивает выполнение $z(t_f) \in \mathcal{E}_z(Q(t_f))$ для цели (i) ($z(t) \in \mathcal{E}_z(Q(t))$, $\forall t \in [t_0, t_f]$) для цели (ii) при всех начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, если существуют матричные функции $P(t) > 0$ и $Z(t)$, удовлетворяющие матричному дифференциальному уравнению (4.3), неравенствам (4.2) и $Q_z(t_f) \leq Q(t_f)$ для цели (i) ($Q_z(t) \leq Q(t)$, $\forall t \in [t_0, t_f]$) для цели (ii).

Для вычисления искомых параметров обратной связи проведем дискретизацию указанной задачи. Введем на отрезке $[t_0, t_f]$ равномерную сетку $t_k = t_{k-1} + h$, $k = 1, \dots, N$, где $h = (t_f - t_0)/N$, и запишем дискретный аналог

рассматриваемой задачи в виде следующих соотношений при $k = 0, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
 & Y(k+1) - Y(k) - h(A(k)Y(k) + Y(k)A^T(k)) - \\
 & - h(B_u(k)Z(k) + Z^T(k)B_u^T(k) + B(k)G(k)B^T(k)) = 0, \quad k \neq N, \\
 & \left(\begin{array}{cc} Y(k) & * \\ Z(k) & Q_u(k) \end{array} \right) \geq 0, \quad Y(k) > 0, \quad Y(0) = R, \\
 & \text{(i)} : \left(\begin{array}{cc} Y(N) & * \\ C(N)Y(N) + D(N)Z(N) & Q(N) \end{array} \right) \geq 0, \\
 & \text{(ii)} : \left(\begin{array}{cc} Y(k) & * \\ C(k)Y(k) + D(k)Z(k) & Q(k) \end{array} \right) \geq 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

где аргумент k указывает на значение соответствующей переменной в момент времени t_k . Решив эту задачу полуопределенного программирования относительно неизвестных $Y(k)$, $Z(k)$, найдем матрицы $\Theta(k) = Z(k)Y^{-1}(k)$.

В теореме 4.1 и в процедуре (4.4) вычисления параметров регулятора сделаны дополнительные предположения о положительной определенности матриц $P(t) > 0$ и $Y(k) > 0$, которые обеспечивают возможность вычисления параметров регулятора. Заметим, что имеются различные возможности для оптимизации в рассматриваемой задаче. В частности, можно искать оптимальное эллипсоидальное управление, обеспечивающее попадание в целевой эллипсоид, матрица которого имеет минимальный след. В таком случае матрица $Q(N)$ становится переменной и решается задача $\min \text{tr} Q(N)$ при ограничениях, определенных в (4.4).

В дискретном случае имеет место следующий результат.

Теорема 4.2. Закон управления $u(t) = \Theta(t)x(t)$ с параметрами $\Theta(t) = Z(t)Y^{-1}(t)$ удовлетворяет ограничению $u(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$, $Q_u(t) > 0$, $\forall t \in [t_0, t_f]$ и обеспечивает выполнение $z_{t_f} \in \mathcal{E}_z(Q(t_f))$ для цели (i) ($z_t \in \mathcal{E}_z(Q(t))$, $\forall t \in [t_0, t_f]$) для цели (ii) при всех начальных состояниях и возмущениях, принадлежащих множеству $\mathcal{S}(t, t_0; R, G)$, если разрешимы линейные матричные неравенства при $t = t_0, \dots, t_f$:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc} Y(t) & * & * \\ A(t)Y(t) + B_u(t)Z(t) & Y(t+1) & * \\ 0 & B^T(t) & G^{-1}(t) \end{array} \right) \geq 0, \quad t \neq t_f, \\
 & \left(\begin{array}{cc} Y(t) & * \\ Z(t) & Q_u(t) \end{array} \right) \geq 0, \quad Y(t_0) \geq R, \\
 & \text{(i)} : \left(\begin{array}{cc} Y(t_f) & * \\ C(t_f)Y(t_f) + D(t_f)Z(t_f) & Q(t_f) \end{array} \right) \geq 0, \\
 & \text{(ii)} : \left(\begin{array}{cc} Y(t) & * \\ C(t)Y(t) + D(t)Z(t) & Q(t) \end{array} \right) \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

относительно неизвестных матриц $Y(t) > 0$, $Z(t)$.

Доказательство теоремы 4.2 приведено в Приложении.

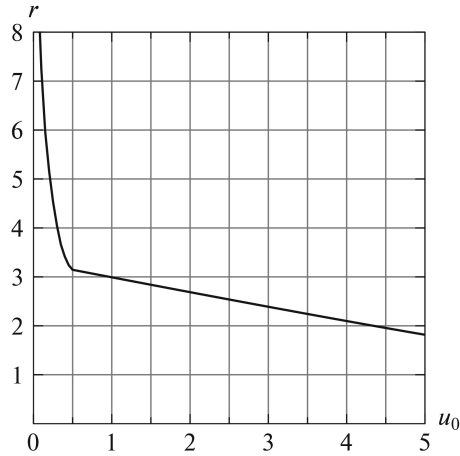


Рис. 4. Зависимость минимального радиуса трубки от максимальной величины управления.

Для иллюстрации приведенных в данном разделе результатов обратимся к системе

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0^2(1 + \varepsilon \sin \omega t)x_1 + u + v, \\ x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \end{aligned}$$

описывающей параметрические колебания управляемого линейного осциллятора. Зададим параметры осциллятора точно такие же, как и разделе 2, т.е. $\omega_0 = \pi$, $\omega = 2\pi$, $\varepsilon = 0,1$. Рассмотрим задачу синтеза нестационарного управления по состоянию в виде $u = \theta_1(t)x_1 + \theta_2(t)x_2$ при заданном ограничении $|u| \leq u_0$, обеспечивающего на конечном отрезке времени $[0, 60]$ удержание траекторий системы (4.6) при неопределенных начальных условиях и возмущениях, связанных общим ограничением с матрицей $R = \text{diag}(1, 1)$ и $G(\sigma) \equiv 1$, в круглой трубке $x_1^2(t) + x_2^2(t) \leq r^2$, $t \in [0, 60]$ с минимально возможным радиусом r . На рис. 4 показана зависимость минимального радиуса трубки от параметра u_0 .

5. Заключение

Показано, что при наличии совместного ограничения на неточно заданные начальное состояние и возмущение множествами достижимости линейной нестационарной непрерывной или дискретной системы являются эволюционирующие эллипсоиды, матрицы которых удовлетворяют линейному матричному дифференциальному или разностному уравнению. Применение этого результата позволяет синтезировать оптимальный наблюдатель неизменяемого состояния системы, обеспечивающий эллипсоидальную оценку с минимальным следом матрицы эллипсоида, а также линейные нестационарные регуляторы для приведения состояния системы в заданное эллипсоидальное множество. Доказано, что фильтр Калмана в задаче оценивания состояния и рекуррентный алгоритм метода наименьших взвешенных квадратов в задаче идентификации неизвестных параметров обеспечивают оптимальные эллип-

социальные оценки состояния и параметров при детерминированных начальном состоянии системы и возмущении с заданной мерой неопределенности. Тем самым устанавливается связь между стохастическим и детерминированным подходами к задачам фильтрации и идентификации. Иллюстративные примеры для уравнения Матье демонстрируют эффективность предложенного подхода.

Авторы признательны А.И. Матасову за полезные обсуждения и конструктивные предложения по доказательству теоремы 2.1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 2.1. В соответствии с полярным разложением [32, с. 490] представим матрицу S в виде $S = (SS^T)^{1/2}U$, где $UU^T = I$. Тогда $x = Sg = (SS^T)^{1/2}Ug = (SS^T)^{1/2}w$, где $w = Ug$. Так как $w^T w \leq 1$ и для каждого такого w найдется $g = U^T w$ такой, что $g^T g = w^T w \leq 1$, то лемма доказана.

Доказательство леммы 4.1. Запишем эквивалентные условия $u \in \mathcal{E}(Q_u) \quad \forall x \in \mathcal{E}(P) \Leftrightarrow \max x^T \Theta^T Q_u^{-1} \Theta x \leq 1, \quad x = P^{1/2} w \quad \forall w : w^T w \leq 1$.

Вводя функцию Лагранжа

$$L = w^T P^{1/2} \Theta^T Q_u^{-1} \Theta P^{1/2} w + \mu (1 - w^T w),$$

приходим к условию

$$\mu = \lambda_{\max} \left(P^{1/2} \Theta^T Q_u^{-1} \Theta P^{1/2} \right) = \lambda_{\max} \left(Q_u^{-1/2} \Theta P \Theta^T Q_u^{-1/2} \right) \leq 1,$$

которое эквивалентно неравенству $\Theta P \Theta^T \leq Q_u$. Согласно характеристике псевдообратной матрицы представим $P = PP^+P$ и запишем последнее неравенство как $\Theta PP^+P \Theta^T \leq Q_u$. С учетом варианта леммы Шура для вырожденных матриц, доказанного в [29, с. 190], приходим к (4.2). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Замкнутая система описывается уравнением

$$x(t+1) = A_c(t)x(t) + B(t)v(t), \quad A_c(t) = A(t) + B_u(t)\Theta(t).$$

Множества достижимости этой системы – эллипсоиды $\mathcal{E}(P_c(t))$ с матрицами $P_c(t)$, определяемыми согласно теореме 2.1. Введем матрицы $Y(t) = Y^T(t) > 0$, $t = t_0, \dots, t_f$, удовлетворяющие неравенствам

$$(П.1) \quad Y(t+1) \geq A_c(t)Y(t)A_c^T(t) + B(t)G(t)B^T(t), \quad Y(t_0) \geq R.$$

Если обозначить $\Theta(t)Y(t) = Z(t)$ и применить лемму Шура, то это неравенство превратится в первое неравенство в (4.5). Из (П.1) следует, что соотношения

$$Y(t+1) - P_c(t+1) = A_c(t)[Y(t) - P_c(t)]A_c^T(t) + M(t), \quad Y(t_0) - P_c(t_0) \geq 0$$

выполняются при некоторых матрицах $M(t) = M^T(t) \geq 0$. Тогда

$$Y(t) - P_c(t) = \Phi(t, t_0)[Y(t_0) - P_c(t_0)]\Phi^T(t, t_0) + \sum_{i=t_0}^{t-1} \Phi(i, t_0)M(i)\Phi^T(i, t_0) \geq 0,$$

где $\Phi(t, t_0)$ – переходная матрица замкнутой системы. Следовательно, $P_c(t) \leq Y(t)$ и $\mathcal{E}(P_c(t)) \subseteq \mathcal{E}(Y(t))$, т.е. состояние замкнутой системы находится внутри эллипсоида $\mathcal{E}(Y(t))$, а значит, целевой выход находится внутри эллипсоида $\mathcal{E}_z(Q_z(t))$, где $Q_z(t) = [C(t) + D(t)\Theta(t)]Y(t)[C(t) + D(t)\Theta(t)]^T$. Тогда выполнение неравенства $Q_z(t) \leq Q(t)$, которое при $Z(t) = \Theta(t)Y(t)$ с помощью леммы Шура приводится к третьему и четвертому неравенствам в (4.5), обеспечит выполнение соответствующей цели управления. Второе неравенство в (4.5) согласно лемме 4.1 означает, что $u(t) \in \mathcal{E}(Q_u(t))$. Таким образом, если неравенства (4.5) выполняются, то управление обеспечивает выполнение цели. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. уни-та, 2010.
2. *Neimark Ju.I.* Mathematical Models in Natural Science and Engineering. Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2003.
3. *Неймарк Ю.И.* Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.
4. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость и D -разбиение // *АиТ.* 1992. № 7. С. 10–18.
Neimark Ju.I. Robust stability and D -partition // *Autom. Remote Control.* 1992. V. 53. No. 7. P. 957-965.
5. *Неймарк Ю.И.* Робастная устойчивость по нелинейным параметрам // *Дифференц. уравнения.* 1992. № 12. С. 2185–2187.
Neimark Ju.I. Robust stability under nonlinear parameters // *Differen. Equat.* 1992. V. 28. No. 12. P. 1829–1831.
6. *Коган М.М., Неймарк Ю.И.* Об оптимальности локально-оптимальных решений линейно-квадратичных задач управления и фильтрации // *АиТ.* 1992. № 4. С. 101–110.
Kogan M.M., Neimark Ju.I. On Optimality of Locally-Optimal Solutions to Linear-Quadratic Control and Filtering Problems // *Autom. Remote Control.* 1992. V. 53. No. 4. P. 561–569.
7. *Kogan M.M., Neimark Ju.I.* Locally optimal adaptive control without persistent excitation // *Automatica.* 1996. V. 32. No. 10. P. 1463–1467.
8. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // *ДАН СССР.* 1946. Т. 51. № 5. С. 339-342.
9. *Schwerpe F.C.* Recursive State Estimation: Unknown but Bounded Errors and System Inputs // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1968. V. 13. No. 1. P. 22–28.
10. *Bertsekas D.P., Rhodes I.P.* On the Minimax Reachability of Target Sets and Target Tubes // *Automatica.* 1971. V. 7. P. 233–247.
11. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
12. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
13. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
14. *Kurzhanskiy A.A., Varaiya P.* Reach Set Computation and Control Synthesis for Discrete-Time Dynamical Systems with Disturbances // *Automatica.* 2011. V. 47. P. 1414–1426.

15. *Kuntsevich V.M., Volosov V.V.* Ellipsoidal and Interval Estimation of State Vectors for Families of Linear and Nonlinear Discrete-Time Dynamic Systems // *Cybernet. Syst. Anal.* 2015. V. 51. No. 1. P. 64–72.
16. *Filippova T.F.* Ellipsoidal Estimates of Reachable Sets for Control Systems with Nonlinear Terms // *IFAC PapersOnLine.* 2017. V. 50. No. 1. P. 15355–15360.
17. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
18. *Chernousko F.L., Ovseevich A.I.* Properties of the Optimal Ellipsoids Approximating the Reachable Sets of Uncertain Systems // *J. Optim. Theory Appl.* 2004. V. 120. No. 2. P. 223–246.
19. *Wang Z., Shen X., Zhu Y.* On Equivalence of Major Relaxation Methods for Minimum Ellipsoid Covering Intersection of Ellipsoids // *Automatica.* 2019. V. 103. P. 337–345.
20. *Баладин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Оптимальное управление максимальными отклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // *АиТ.* 2019. № 10. С. 37–61.
Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Optimal Control of Maximum Output Deviations of a Linear Time-Varying System on a Finite Horizon // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 10. P. 1783–1802.
21. *Баладин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Минимаксное управление отклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // *АиТ.* 2019. № 12. С. 3–24.
Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M. Minimax Control of Deviations for the Outputs of a Linear Discrete Time-Varying System // *Autom. Remote Control.* 2019. V. 80. No. 12. P. 345–359.
22. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multi-Objective Generalized H_2 Control // *Automatica.* 2019. V. 99. No. 1. P. 317–322.
23. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Finite-Horizon Multi-Objective Generalized H_2 Control with Transients // *Automatica.* 2019. V. 106. No. 8. P. 27–34.
24. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1989. V. 34. P. 94–97.
25. *Баладин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М.* Эллипсоидальные множества достижимости линейных нестационарных систем в задачах управления и оценивания // *Дифференц. уравнения.* 2019. Т. 55. № 11. С. 1485–1498.
26. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge Univ. Press, 2004.
27. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
28. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
29. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
30. *Kailath T., Sayed A.N., Hassibi B.* Linear Estimation. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, Inc., 2000.
31. *Nagpal K.M., Khargonekar P.P.* Filtering and Smoothing in an H_∞ Setting // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1991. V. 36. No. 2. P. 152–166.
32. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 03.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020