

© 2020 г. В.Н. БЕЛЫХ, д-р физ.-мат. наук (belykh@unn.ru),  
Н.В. БАРАБАШ (barabash@itmm.unn.ru)

(Волжский государственный университет водного транспорта, Нижний Новгород;  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),  
И.В. БЕЛЫХ, канд. физ.-мат. наук (ibelykh@gsu.edu)  
(Государственный университет Джорджии, Атланта, США)

## БИФУРКАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ В КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦЕВСКОГО ТИПА<sup>1</sup>

Изучается динамика кусочно-гладкой системы дифференциальных уравнений, для которой ранее было строго доказано существование странного аттрактора лоренцевского типа и получены бифуркационные механизмы его рождения. В настоящей статье обсуждается вопрос о разрушении этого аттрактора за счет появления в его структуре скользящих движений. Качественно-численными методами изучается сложная последовательность бифуркаций аттрактора, в результате которой в системе остается глобально устойчивый предельный цикл. Показано, что основой этой последовательности являются  $S$ -бифуркации и бифуркации многообходных гомоклинических траекторий.

*Ключевые слова:* динамическая система, бифуркации, предельный цикл, скользящие движения, странный аттрактор, хаос.

DOI: 10.31857/S0005231020080036

### 1. Введение

Настоящая статья выполнена в русле одного из главных научных направлений Ю.И. Неймарка — бифуркационной теории динамических систем. Широко известный метод  $D$ -разбиений можно рассматривать как один из первых результатов Ю.И. Неймарка по теории бифуркаций корней характеристических уравнений линеаризованных динамических систем. Другой значимый результат — это бифуркация рождения тора или сложного неблуждающего множества из периодического движения при смене его устойчивости. Это хорошо известная специалистам бифуркация Неймарка–Сакера [1]. Теория кусочно-гладких (релейных) систем, начатая Ю.И. Неймарком в 50–60 гг. XX в. [2, 3], продолжает успешно развиваться в настоящее время [4, 5]. Настоящую статью можно рассматривать как развитие теории бифуркаций в кусочно-гладких динамических системах.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00556 и № 18-31-20052), а также Национального научного фонда США (проект DMS-1909924). Численные результаты получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00367).

Кусочно-линейные и кусочно-гладкие системы широко использовались в теории динамических систем в различных контекстах и приложениях [4, 6–8]. Их потенциальное преимущество перед их нелинейными аналогами заключается в возможности получать явные решения в заданных областях фазового пространства системы и “склеивать” решения на границах этих областей.

Широкий класс кусочно-гладких динамических систем [4–6] в настоящее время широко используется в технике в качестве релейных, автоматических систем управления и систем с переключениями [9–12].

Интересным примером такой кусочно-гладкой системы является биомеханическая модель баланса пешехода, идущего по мосту [13], в которой переключения между двумя системами [14] соответствуют переносу веса пешехода с одной ноги на другую. Траектория такой кусочно-гладкой системы определяется двумя склеенными решениями интегрируемых подсистем, что позволяет получить точные формы периодического движения пешехода [15].

Кусочно-гладкие динамические системы могут использоваться для построения потоков, обладающих основными свойствами хаотических нелинейных систем и допускающих строгое аналитическое исследование. В недавней статье [16] авторами был предложен новый подход построения кусочно-гладких моделей, заменяющих нелинейные неинтегрируемые хаотические системы. Эти модели имеют качественно ту же бифуркационную структуру и позволяют аналитически доказывать существование странных аттракторов и их бифуркаций.

Этот подход был применен к известной системе Лоренца [17], вместо которой была построена кусочно-линейная система как ее простейший аналог. Для этой системы авторам удалось провести строгое доказательство существования сингулярно-гиперболического аттрактора и бифуркаций его рождения. Полученные бифуркации и аттракторы качественно совпадают с бифуркационной картиной и структурой аттрактора самой системы Лоренца, детально изученными качественно-численными методами [18–20]. Из численных результатов известно, что аттрактор Лоренца разрушается при потере инвариантного слоения [19, 21] с последующими сложными бифуркациями. В силу сложности сценарий разрушения аттрактора Лоренца теоретически изучен слабо.

В настоящей статье рассматривается этот вопрос, т.е. бифуркационная картина гибели сингулярно-гиперболического аттрактора, но не в системе Лоренца, а в ее аналоге — в модели из [16]. Это разрушение начинается с разрушения инвариантного слоения и после бесконечной последовательности бифуркаций заканчивается рождением единственного устойчивого предельного цикла.

Статья устроена следующим образом. В разделе 2 дано описание предложенной кусочно-линейной модели, в разделе 3 приведена характеристика скользящих движений, в разделе 4 представлен основной результат [16], в разделе 5 приведен качественно-численный анализ разрушения странного аттрактора.

## 2. Описание модели

Рассматривается кусочно-линейная система, склеенная из трехмерных линейных подсистем  $A_s$ ,  $A_l$ , и  $A_r$

$$\begin{aligned}
 & \dot{x} = x, \\
 A_s : & \quad \dot{y} = -\alpha y, \quad (x, y, z) \in G_s, \\
 & \quad \dot{z} = -\nu z, \\
 & \quad \dot{x} = -\lambda(x+1) + \omega(z-b), \\
 (1) \quad A_l : & \quad \dot{y} = -\delta(y+1), \quad (x, y, z) \in G_l, \\
 & \quad \dot{z} = -\omega(x+1) - \lambda(z-b), \\
 & \quad \dot{x} = -\lambda(x-1) - \omega(z-b), \\
 A_r : & \quad \dot{y} = -\delta(y-1), \quad (x, y, z) \in G_r, \\
 & \quad \dot{z} = \omega(x-1) - \lambda(z-b),
 \end{aligned}$$

где  $\alpha, \delta, \nu, \omega, \lambda$  и  $b$  — положительные параметры. Эти подсистемы определены на следующем разбиении фазового пространства  $G_s, G_l$ , и  $G_r$  соответственно:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad G_s : & \quad |x| < 1, \quad y \in \mathbb{R}^1, \quad z < b, \\
 G_l : & \quad \begin{cases} x \leq -1 & \text{при } z \leq b, \\ x \leq -1 & \text{при } z > b \text{ и } y \geq 0, \\ x < 1 & \text{при } z > b \text{ и } y < 0, \end{cases} \\
 G_r : & \quad \begin{cases} x \geq 1 & \text{при } z \leq b, \\ x \geq 1 & \text{при } z > b \text{ и } y < 0, \\ x > -1 & \text{при } z > b \text{ и } y \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Векторные поля подсистем  $A_s, A_l$  и  $A_r$  будем обозначать соответственно  $F_s, F_l$  и  $F_r$  в виде системы  $\dot{X} = F_i(X)$ , где индекс  $i = (s, l, r)$  и вектор  $X = (x, y, z)$ .

Эта система моделирует известную систему Лоренца [17]. Она, как и система Лоренца, имеет три состояния равновесия и инвариантность относительно замены  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ .

Линейная подсистема  $A_s$  управляет динамикой системы (1) в области  $G_s$ . Эта система имеет седловое состояние равновесия  $O_s$  в начале координат, поэтому будем называть  $G_s$  седловой областью. Подсистемы  $A_{r,l}$  определены в областях  $G_{r,l}$  и имеют симметричные равновесия  $e_{r,l} = \{\pm 1, \pm 1, b\}$  соответственно. Эти равновесия являются устойчивыми трехмерными фокусами в подсистемах  $A_{r,l}$ . В полной системе эти равновесия становятся склеенными и поэтому могут менять устойчивость. Заметим, что линии склейки  $w_l = \{x = -1, z = b, y \in \mathbb{R}^1\}$  и  $w_r = \{x = 1, z = b, y \in \mathbb{R}^1\}$  являются устойчивыми многообразиями фокусов  $e_l$  и  $e_r$  соответственно (см. рис. 1). Будем называть  $G_r$  и  $G_l$  правой и левой фокусными областями.

Седловая область  $G_s$  ограничена справа и слева вертикальными полуплоскостями  $S_1 = \{x = 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b\}$  и  $S_2 = \{x = -1, y \in \mathbb{R}^1, z < b\}$  (см.

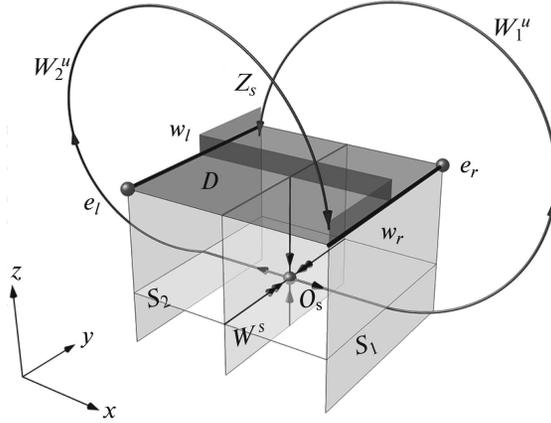


Рис. 1. Схема построения кусочно-линейной системы (1). Фазовое пространство разделено на три области:  $G_s$ ,  $G_l$  и  $G_r$  (не указаны на рисунке). Седловая область  $G_s$  образована вертикальными полуплоскостями  $S_{1,2}$  и горизонтальной поверхностью  $D$ . Фокусные области  $G_l$  и  $G_r$  разделены седловой областью и вертикальной  $Z$ -образной границей  $Z_s$ . Седло  $O_s$  имеет двумерное устойчивое многообразие  $W^s$  и одномерное неустойчивое многообразие ( $W_1^u$  и  $W_2^u$  его правая и левая ветви соответственно). Отрезки  $w_l$  и  $w_r$  принадлежат одномерным устойчивым многообразиям фокусов  $e_l$  и  $e_r$  соответственно.

рис. 1). Область  $G_s$  также ограничена сверху частью плоскости  $D = \{|x| \leq 1, y \in \mathbb{R}^1, z = b\}$  (темно-серая горизонтальная плоскость на рис. 1). Ниже плоскости  $D$  фокусные области  $G_l$  и  $G_r$  расположены слева и справа от вертикальных полуплоскостей  $S_2$  и  $S_1$  соответственно. Выше плоскости  $D$  фокусные области разделены  $Z$ -образной границей  $Z_s$  (см. рис. 1).

Седло  $O_s$  имеет двумерное устойчивое многообразие, определенное в седловой области как  $W_{saddle}^s = \{x = 0, y \in \mathbb{R}^1, z < b\}$  (центральная вертикальная плоскость на рис. 1) и одномерное неустойчивое многообразие, определенное в седловой области как  $W_{1saddle}^u = \{0 < x < 1, y = z = 0\}$  и  $W_{2saddle}^u = \{-1 < x < 0, y = z = 0\}$ . Эти многообразия и их продолжения по траекториям систем  $A_{r,l}$  в фокусных областях образуют глобальные многообразия седла  $W^s$ ,  $W_1^u$  и  $W_2^u$  седла  $O_s$  в полном фазовом пространстве системы (1).

Предполагается, что выполняется условие

$$(3) \quad \frac{1}{2} < \nu < 1 < \alpha.$$

Часть неравенства (3)  $\nu < 1$  означает, что седловая величина равновесия  $O_s$  положительна. В силу неравенства  $1 < \alpha$  плоскость  $W^{lead} = ((x, z) \in G_s, y = 0)$  является частью ведущего многообразия, что аналогично системе Лоренца.

### 3. Скользящие движения

Система (1) диссипативна, т.е. в ее фазовом пространстве существует поглощающая область  $G$  такая, что любая траектория с начальной точкой в

области  $\mathbb{R}^3 \setminus G$  попадает в область  $G$  и остается в ней навсегда. Эта область задана неравенствами [16]

$$(4) \quad G = \begin{cases} |y| \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 2b & \text{при } |x| \leq 1, \\ V_l \leq b^2 & \text{при } x < -1, \\ V_r \leq b^2 & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

где  $V_{l,r} = (x \pm 1)^2 + (z - b)^2$ . Очевидно, что в этой области находятся все траектории системы (1). Система (1) имеет две поверхности устойчивых скользящих движений  $S_1^+ = \{x = 1, z > b^+ = b + \frac{2\lambda}{\omega}, y < 0\}$  и  $S_2^+ = \{x = -1, z > b^+ = b + \frac{2\lambda}{\omega}, y > 0\}$ . На поверхностях  $S_1^+$  и  $S_2^+$  векторное поле системы  $A_l$  ориентировано в сторону увеличения  $x$ , а системы  $A_r$  — в сторону уменьшения  $x$  (векторные поля систем  $A_l$  и  $A_r$  “встречаются” на этих поверхностях). Скользящие движения на этих поверхностях задаются двумерными системами, которые получаются по доопределению А.Ф. Филиппова [22], аналогичного одному из доопределений Ю.И. Неймарка [2]. Это доопределение в рассматриваемом случае приобретает вид

$$(5) \quad \dot{X} = \alpha F_r(X) + (1 - \alpha) F_l(X).$$

Здесь коэффициент  $\alpha$  определен скалярным произведением

$$(6) \quad (\alpha F_r(X) + (1 - \alpha) F_l(X), \nabla s) = 0,$$

где градиент функции  $s(X)$ , определяющей поверхность скользящих движений  $s(X) = 0$ , в рассматриваемом случае есть вектор  $\nabla s(1, 0, 0)$ . Из (1), (2), (5), (6) получаем, что система скользящих движений имеет вид

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= -\delta y + \frac{\lambda \delta}{\omega(z - b) - \lambda}, \\ \dot{z} &= -\omega - \lambda(z - b) - \frac{\lambda \omega}{\omega(z - b) - \lambda}. \end{aligned}$$

Из системы (7) получаем простую динамику скользящих движений. Поскольку в (7)  $\dot{z}|_{S_{1,2}^+} < 0$ , координата  $z$  уменьшается и любая траектория покидает  $S_{1,2}^+$  через линии срыва  $z = b^+$ . В зависимости от параметров системы (1) роль скользящих движений в динамике системы (1) разная. Рассмотрим два основных случая.

#### 4. Аттракторы без скользящих движений

В [16] доказано, что в области параметров

$$(8) \quad \begin{aligned} \delta &> \delta_{cr} = \frac{\omega \ln 2}{\pi}, \\ b &< b_{cr} = 2\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\omega} \left( \arctg \frac{\omega}{\lambda} + \pi \right) \right\} \end{aligned}$$

аттракторы системы (1) не содержат скользящих движений. При условиях (8) строго доказано следующее утверждение [16].

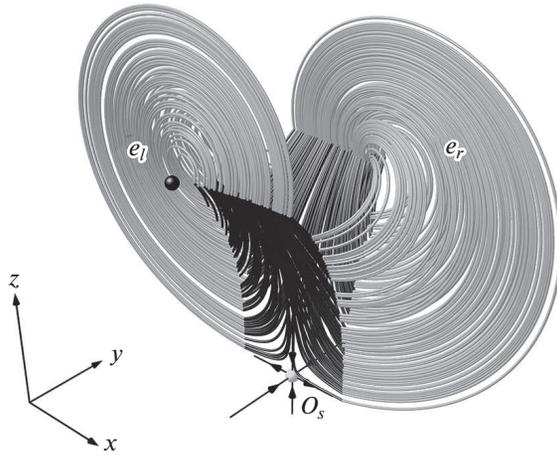


Рис. 2. Аттрактор лоренцевского типа, существующий в системе (1) при значениях параметров  $b = 3,8$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\nu = 0,75$ ,  $\delta = 0,588$ ,  $\omega = 2$  и  $\lambda = 0,294$  из области (9). Траектории аттрактора склеены из траекторий седловой системы  $A_s$  (изображены черным) и траекторий фокусных систем  $A_{l,r}$  (изображены серым).

*Теорема 1* [16]. 1. В области параметров

$$b_{het} = \gamma_{het} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \leq b < \nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega},$$

где  $\gamma_{het}(\nu)$  – обратная функция функции  $\nu = 1 + \frac{\ln 2 - \ln \gamma}{\ln(\gamma - 1)}$ , существует странный хаотический аттрактор лоренцевского типа, родившийся в результате гетероклинической бифуркации при  $b = b_{het}$  и сосуществующий с двумя устойчивыми фокусами  $e_l$  и  $e_r$ ;

2. Поверхность

$$b_{AH} = \nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega}$$

соответствует бифуркации Андронова–Хопфа, при которой два симметричных седловых цикла влипают в устойчивые состояния равновесия  $e_l$  и  $e_r$ ;

3. В области параметров

$$(9) \quad b_{AH} \leq b \leq b_{cr}$$

странный сингулярно-гиперболический аттрактор является единственным аттрактором системы (1) (см. рис. 2).

## 5. Аттракторы, содержащие скользящие движения

При  $b > b_{cr}$  траектории аттрактора системы (1) могут попадать на поверхности скользящих движений. При этом любая периодическая орбита, содержащая участок скользящих движений, становится устойчивой. Дело в том, что неустойчивость периодических движений системы определена направлением оси  $x$  (см. систему  $A_s$  в (1)). Ось  $x$  перпендикулярна плоскости скользящих движений, вдоль которой траектории попадают на них не

асимптотически. Тем самым неустойчивость вдоль седловых орбит компенсируется суперустойчивостью скользящих плоскостей. Если же траектории неблуждающего множества системы не попадают на поверхности скользящих движений, то они продолжают оставаться седловыми, такими же, как и при  $b < b_{cr}$  в случае гиперболического аттрактора. Возможность существования аттракторов, содержащих как устойчивые траектории со скользящими движениями, так и седловые траектории, усложняет решение задачи о разрушении странного аттрактора и приводит к необходимости использования качественно-численных методов. При численном исследовании системы (1), проводимом далее, обращаем внимание на следующие возможные эффекты.

1. Стабилизация седловых траекторий, попадающих на плоскости скользящих движений, т.е. эффект появления устойчивых орбит. При малом отклонении параметра  $b$  от критического значения  $\mu = 1 - b_{cr}/b > 0$ ,  $\mu \ll 1$ , устойчивые орбиты имеют большие периоды, а их области притяжения (basins) малы настолько, что их сложно найти при численном моделировании. Таким образом, при малых  $\mu > 0$  аттрактор перестает быть гиперболическим и становится так называемым квазистранным аттрактором [23].

2. Бифуркация рождения устойчивого цикла из гомоклинической орбиты седла с положительной седловой величиной. Этот эффект является неожиданным, поскольку в случае гладких или даже кусочно-гладких непрерывных систем цикл должен рождаться неустойчивым.

3. Возможность  $C$ -бифуркации [11], при которой из устойчивого предельного цикла рождаются два симметричных устойчивых цикла того же периода, а сам цикл, покидая поверхность скользящих движений, становится седловым. В гладких системах аналогом такой бифуркации является бифуркация раздвоения коразмерности два (pitchfork bifurcation), происходящая в симметричных системах, при которой из предельного цикла, теряющего устойчивость через мультипликатор  $m = +1$ , рождаются два устойчивых цикла того же периода. Далее для простоты такую  $C$ -бифуркацию в системе (1) будем называть бифуркацией раздвоения.

### 5.1. Бифуркации аттракторов, содержащих скользящие движения

Последовательность бифуркаций в области параметров  $b > b_{cr}$ , для точек которой аттрактор содержит скользящие движения, удобнее рассматривать при уменьшении параметра  $b$ , начиная с больших значений  $b \approx 300$ .

На рис. 3 изображена бифуркационная диаграмма системы (1). При каждом фиксированном значении параметра  $b$  по оси ординат указаны точки пересечения установившихся движений системы с секущей плоскостью  $D$ . Горизонтальные линии вблизи линий  $x = \pm 1$  являются крайним следом предельных циклов.

На рис. 3,а бифуркационная диаграмма построена для всего интервала значений параметра  $b \in [0, 300]$ . При  $b > 283$  на диаграмме существуют только следы двухобходного глобально устойчивого предельного цикла (см. рис. 4,а).

Вертикальная штриховая линия в точке  $b = 283$  соответствует первой  $C$ -бифуркации раздвоения цикла. В этой точке от крайних следов отходят

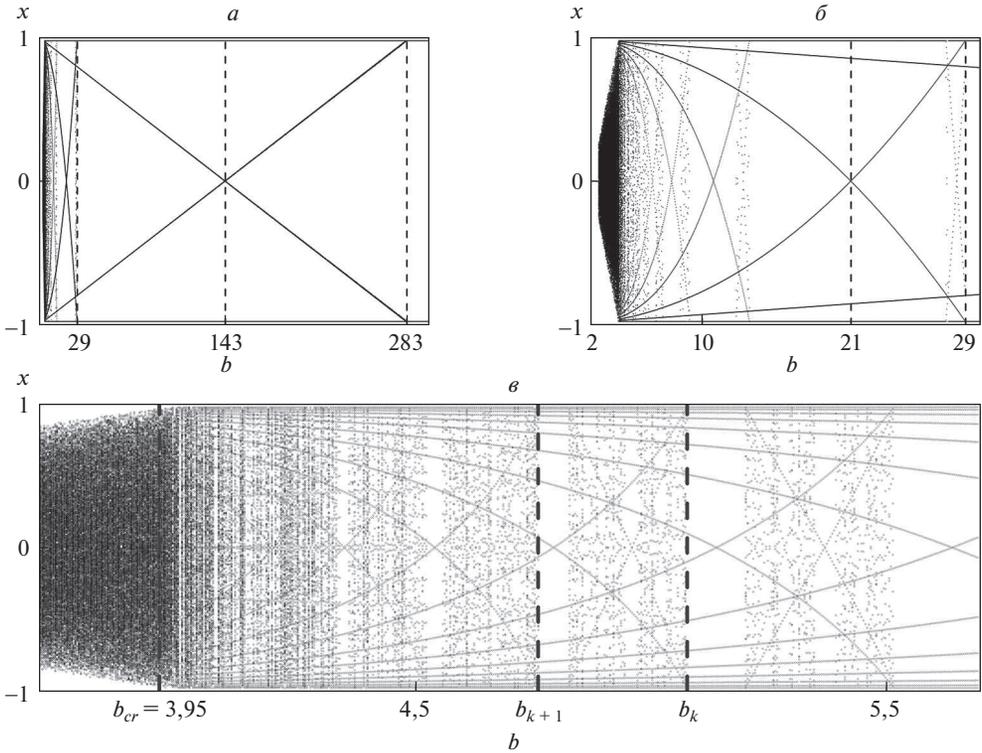


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма системы (1) при  $\alpha = 2$ ,  $\omega = 2$ ,  $\delta = 0,588$ ,  $\lambda = 0,294$ . По оси ординат изображены точки пересечения установившихся движений системы (1) с секущей плоскостью  $D$ .

две кривые. Вместе с горизонтальными линиями они соответствуют следам двух устойчивых предельных циклов, родившихся в результате бифуркации раздвоения (см. рис. 4,б).

Вертикальной штриховой линией в точке  $b = 143$  отмечена первая гомоклиническая бифуркация, при которой два устойчивых цикла сливаются, попадая в линию  $(x = 0, |y| < 1, z = b)$  на устойчивом многообразии седла  $W^s$ , и образуют гомоклиническую бабочку (см. рис. 4,в). Этому соответствует пересечение кривых в точке  $(b = 143, x = 0)$ .

При дальнейшем уменьшении  $b$  гомоклиническая бабочка разрушается и рождается глобально устойчивый предельный цикл удвоенного периода (см. рис. 4,г). Все четыре кривые бифуркационной диаграммы на интервале  $b \in (29, 143)$  являются следом этого цикла до следующей бифуркации раздвоения, наступающей при  $b = 29$ .

Рисунки 3,б и 3,в являются увеличенными фрагментами рис. 3,а. На рис. 3,б изображена вторая пара бифуркаций “раздвоение ( $b = 29$ ) – бифуркация гомоклинической бабочки ( $b = 21$ )”.

При дальнейшем уменьшении параметра  $b$  пары бифуркаций “раздвоение-гомоклиническая бабочка” повторяются, удваивая период (обходность) устой-

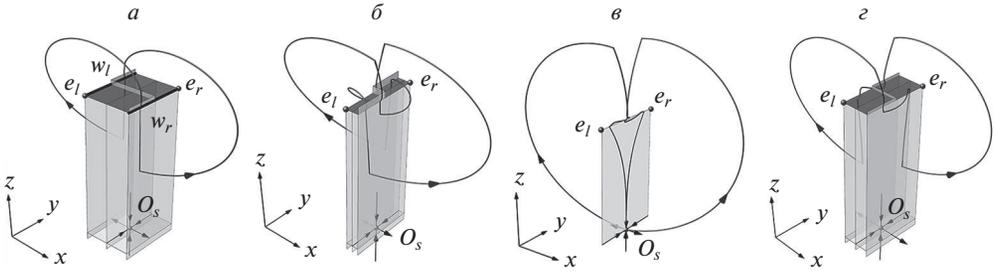


Рис. 4. Первая последовательность смены фазовых картин системы (1) при уменьшении параметра  $b$ . *a* — При  $b = 300$  в системе существует двухобходный глобально устойчивый предельный цикл, огибающий устойчивые одномерные многообразия  $w_{l,r}$  фокусов  $e_{l,r}$  по одному разу. *б* — При  $b = 270$  существуют два устойчивых предельных цикла того же периода. *в* — При  $b = 143,07$  эти предельные циклы влипают в гомоклиническую бабочку и при дальнейшем уменьшении параметра образуют глобально устойчивый предельный цикл удвоенного периода. *г* — Фазовый портрет этого четырехобходного цикла при  $b = 40$ . Траектория цикла огибает каждое из многообразий  $w_{l,r}$  по два раза. Остальные параметры:  $\alpha = 2$ ,  $\omega = 2$ ,  $\delta = 0,588$ ,  $\lambda = 0,294$ .

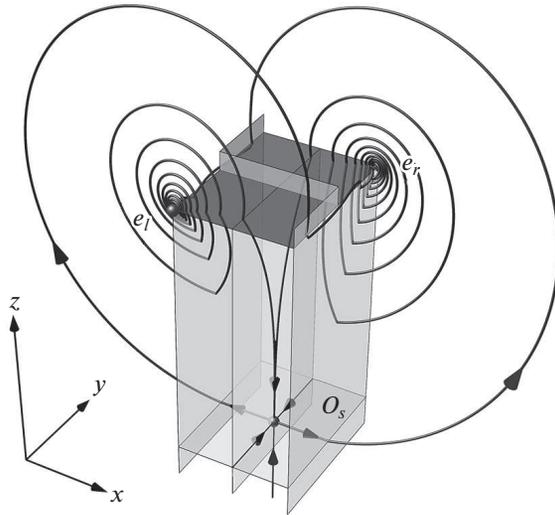


Рис. 5. Пример гомоклинической бабочки, образованной двумя симметричными многообходными гомоклиническими орбитами при  $b = 4,075$ . Остальные параметры:  $\alpha = 2$ ,  $\omega = 2$ ,  $\delta = 0,588$ ,  $\lambda = 0,294$ .

чивых циклов (см. рис. 5). Эти пары накапливаются при  $b \rightarrow b_{cr}$ , образуя последовательность, которая служит скелетом бифуркационного множества. Из рис. 3,в, видно, что каждый интервал  $(b_{k+1}, b_k)$ , где  $b_k$  — предыдущая, а  $b_{k+1}$  — последующая бифуркации раздвоения, содержит хаотическое окно. Бифуркационное множество в хаотических окнах усложняется с увеличением  $k$ . По-видимому, это связано с тем, что участки скользящих движений на неблуждающих траекториях уменьшаются с ростом  $k$ , т.е. при приближении к области существования странного аттрактора.

Область слева от вертикальной штриховой линии  $b_{cr} = 3,95$  на рис. 3,6 соответствует сингулярно-гиперболическому аттрактору.

Следует отметить, что по известному сценарию перехода к хаосу для лоренцеподобных гладких потоков с отрицательной седловой величиной [24, 25] при увеличении бифуркационного параметра происходит удвоение периода устойчивых предельных циклов через каскад бифуркаций гомоклинических орбит.

Существенное отличие сценария, полученного в настоящей статье, состоит в том, что у системы (1) седловая величина положительна. Однако циклы, рождающиеся из гомоклинических орбит, в отличие от случая гладких систем [26] устойчивы из-за наличия скользящих движений. Кроме того, в рассматриваемом случае присутствуют окна хаотических движений наряду с окнами устойчивых периодических орбит.

## 6. Заключение

В статье проведено качественно-численное исследование сложного бифуркационного множества, соответствующего разрушению сингулярно-гиперболического аттрактора в кусочно-линейной системе, являющейся аналогом известной системы Лоренца. Это разрушение связано с тем, что в структуре аттрактора появляются скользящие движения. Бифуркационное множество представляет собой последовательность паттернов, сходящуюся к критическому значению параметра, соответствующему началу разрушения странного аттрактора. Основу бифуркационных паттернов составляют  $C$ -бифуркации, при которых происходят раздвоения многообходных предельных циклов, и бифуркации многообходных гомоклинических орбит, приводящих к рождению устойчивых предельных циклов с удвоенным периодом. Эти паттерны содержат хаотические окна, структура которых усложняется вдоль последовательности. Нетривиальная задача строгого анализа, кратко описанного в работе сложного бифуркационного перехода от устойчивого предельного цикла к странному аттрактору, требует построения точечных отображений, учитывающих скользящие движения, и выходит за рамки настоящей статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuznetsov Y.* Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer, 2004.
2. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.
3. *Неймарк Ю.И.* О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования // АиТ. 1957. № 1. С. 27–33.
4. *Champneys A.R., di Bernardo M.* Piecewise Smooth Dynamical Systems // Scholarpedia. 2008. V. 3. No. 9. P. 4041.
5. *di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P.* Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer, 2008.
6. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E.* Theory of Oscillations. М.: Fizmatgiz, 1959.
7. *Zhusubaliyev Z.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.

8. Luo A.C.J., Chen L. Periodic Motions and Grazing in a Harmonically Forced, Piecewise, Linear Oscillator with Impacts // Chaos Soliton. Fract. 2005. V. 24. No. 2. P. 567–578.
9. Gubar' N.A. Investigation of a Piecewise Linear Dynamical System with Three Parameters // J. Appl. Math. Mech. 1961. V. 25. No. 6. P. 1011–1023.
10. Matsumoto T., Chua L.O., Komoro M. Birth and Death of the Double Scroll // Physica D. 1987. V. 24. No. 1–3. P. 97–124.
11. di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. Local Analysis of C-Bifurcations in n-Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems // Chaos Soliton. Fract. 1999. V. 10. No. 11. P. 1881–1908.
12. Simpson D.J.W., Hogan S.J., Kuske R. Stochastic Regular Grazing Bifurcations // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2013. V. 12. No. 2. P. 533–559.
13. Belykh I., Jeter R., Belykh V. Foot Force Models of Crowd Dynamics on a Wobbly Bridge // Sci. Adv. 2017. V. 3. No. 11. P. e1701512.
14. Macdonald J.H.G. Lateral Excitation of Bridges by Balancing Pedestrians // Proc. Royal Society of London. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2008. V. 465. No. 1. P. 1055–1073.
15. Belykh I.V., Jeter R., Belykh V.N. Bistable Gaits and Wobbling Induced by Pedestrian-Bridge Interactions // Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Sci. 2016. V. 26. No. 11. P. 116314.
16. Belykh V.N., Barabash N.V., Belykh I.V. A Lorenz-type Attractor in a Piecewise-Smooth System: Rigorous Results // Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Sci. 2019. V. 29. No. 10. P. 103108.
17. Lorenz E. Deterministic Nonperiodic Flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. No. 2. P. 130–141.
18. Sparrow C. The Lorenz Equations; Bifurcations, Chaos and Strange Attractors. N.Y.: Springer, 1982.
19. Bykov V.V., Shilnikov A.L. On Boundaries of the Region of Existence of the Lorenz Attractor // Selecta Math. Sovietica. 1992. V. 11. No. 4. P. 375–382.
20. Doedel E.J., Krauskopf B., Osinga H.M. Global Bifurcations of the Lorenz Manifold // Nonlinearity. 2006. V. 19. No. 12. P. 2947.
21. Creaser J.L., Krauskopf B., Osinga H.M. Finding First Foliation Tangencies in the Lorenz System // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2017. V. 16. No. 4. P. 2127–2164.
22. Filippov A.F. Differential Equations with Discontinuous Righthand sides. Dordrecht: Kluwier Acad. Press, 1988.
23. Бельх В.Н. Странный аттрактор // Большая российская энциклопедия. 2016. Т. 31. С. 285–286.
24. Arneodo A., Couillet P., Tresser C. A Possible New Mechanism for the Onset of Turbulence // Physics Lett. A. Elsevier Publ. 1981. V. 81. No. 4. P. 197–201.
25. Lyubimov D.V., Zaks M.A. Two Mechanisms of the Transition to Chaos in Finite-Dimensional Models of Convection // Physica D Nonlinear Phenomena. 1983. V. 8. No. 1–2. P. 52–64.
26. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Институт компьютерных исследований, 2009.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.*

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 18.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020