

© 2020 г. Р.С. БИРЮКОВ, канд. физ.-мат. наук (biryukovrs@gmail.com)  
(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет)

## ОБОБЩЕННОЕ $\mathcal{H}_2$ -УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫМ ОБЪЕКТОМ НА КОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ<sup>1</sup>

На конечном горизонте рассматривается линейный непрерывно-дискретный нестационарный объект, описываемый совокупностью дифференциальных и разностных уравнений. Вводится понятие обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы непрерывно-дискретного объекта как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного рассматриваемой системой. Получена ее характеристика как в терминах разностных уравнений Ляпунова, так и в терминах рекуррентных линейных матричных неравенств. Синтезированы дискретные нестационарные оптимальные законы управления, в том числе и многокритериальные, при которых обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма замкнутой системы принимает минимальное значение.

*Ключевые слова:* линейная нестационарная гибридная система, обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма, оптимальное управление, многокритериальная задача.

DOI: 10.31857/S0005231020080048

### 1. Введение

Современные системы управления, как правило, реализуются в цифровом виде, в то время как реальные объекты функционируют в непрерывном времени. Подобное разделение приводит к тому, что регулятор использует значения непрерывного сигнала, поступающего с объекта, лишь в дискретные моменты времени. По этой причине становится важной задача синтеза дискретного регулятора, максимально полно учитывающего поведение объекта в моменты времени между измерениями. Одним из показателей качества функционирования системы управления является максимальное отклонение целевого выхода системы от некоторого номинального значения по отношению к внешнему возмущению.

В [10] для непрерывных систем, а в [5] для дискретных, было введено понятие обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы, как максимальное отношение максимального по времени значения евклидовой нормы выхода к  $L_2$ -норме неопределенного внешнего возмущения системы. В [1, 9, 11] были получены условия существования оптимального регулятора по выходу на бесконечном горизонте как в терминах уравнения Риккати, так и в терминах линейных матричных неравенств. В работах [2–4] для непрерывных и дискретных систем было введено

---

<sup>1</sup> Работа выполнена по теме государственного задания (№ 0729-2020-0055) при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-41-520002, 19-01-00289) и научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего”.

понятие максимального уклонения как естественное расширение обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы на системы с ненулевым начальным состоянием.

Для непрерывно-дискретных систем на бесконечном горизонте, описываемых совокупностью дифференциальных и разностных уравнений, в [6–8] были получены оценки обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы и синтезированы законы управления, минимизирующие верхнюю оценку нормы, в терминах линейных матричных неравенств [7, 8] и в терминах дифференциальных уравнений Риккати [6].

В данной статье рассматривается непрерывно-дискретный объект с дискретным целевым выходом на конечном горизонте при ненулевых начальных условиях. Следуя работам [2–4, 10] вводится понятие обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного рассматриваемой системой. Подобно тому как это делалось в работах [3, 10], получена ее характеристика как в терминах разностных уравнений Ляпунова, так и в терминах рекуррентных линейных матричных неравенств, что позволяет синтезировать оптимальные законы управления.

## 2. Обобщенная $\mathcal{H}_2$ -норма непрерывно-дискретного объекта

Рассмотрим линейный непрерывно-дискретный нестационарный объект, описываемый совокупностью дифференциальных и разностных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_c(t)x + \Delta_c(t)\xi_k + B_c(t)v, & t_k \leq t < t_{k+1}, & \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \\ \xi_{k+1} &= A_{d,k}\xi_k + \Delta_{d,k}x(t_k) + B_{d,k}w_k, \\ z_k &= C_{c,k}x(t_k) + C_{d,k}\xi_k, \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  и  $\xi_k \in \mathbb{R}^{n_\xi}$  — векторы состояния непрерывной и дискретной частей системы соответственно,  $v(t) \in \mathbb{R}^{n_v}$  — непрерывное внешнее возмущение — кусочно-непрерывная справа вектор-функция,  $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$  — дискретное внешнее возмущение и  $z_k \in \mathbb{R}^{n_z}$  — целевой выход. Будем считать, что

$$v \in L_2([t_0, t_N], \mathbb{R}^{n_v}), \quad w = \{w_k\} \in l_2([0, N-1], \mathbb{R}^{n_w}), \quad z = \{z_k\} \in l_\infty([0, N], \mathbb{R}^{n_z}),$$

нормы в соответствующих пространствах определяются стандартным образом:

$$(2) \quad \|v\|_{L_2}^2 = \int_{t_0}^{t_N} |v(t)|_2^2 dt, \quad \|w\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|_2^2, \quad \|z\|_\infty = \max_{k=0, \dots, N} |z_k|_2,$$

здесь через  $|\cdot|_2$  обозначена евклидова норма вектора. Кроме этого предположим, что начальные условия  $x(t_0) = x_0$  и  $\xi_0$  в общем случае ненулевые и неизвестны, а их влияние на поведение объекта интерпретируется как начальное возмущение. Матричные функции  $A_c(t)$ ,  $B_c(t)$  и  $\Delta_c(t)$  таковы, что при выбранных начальных условиях и возмущениях решение системы на рассматриваемом отрезке существует и единственно.

Система (1) порождает линейный оператор  $\mathcal{S}$  вида

$$(3) \quad \mathcal{S} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_\xi} \times L_2([t_0, t_N], \mathbb{R}^{n_v}) \times l_2([0, N-1], \mathbb{R}^{n_w}) \rightarrow l_\infty([0, N], \mathbb{R}^{n_z}),$$

отображающий начальные состояния  $x_0$ ,  $\xi_0$  и внешние возмущения  $v$ ,  $w$  в целевой выход  $z$ . Определим норму элемента  $(x_0, \xi_0, v, w)$  формулой

$$(4) \quad \|(x_0, \xi_0, v, w)\|_{(R,2)} \triangleq \sqrt{x_0^\top R_x^{-1} x_0 + \xi_0^\top R_\xi^{-1} \xi_0 + \|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2},$$

где  $R_x = R_x^\top > 0$  и  $R_\xi = R_\xi^\top > 0$  – весовые матрицы, отражающие относительную важность учета неопределенностей начальных условий и внешних возмущений.

*Определение.* Обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормой непрерывно-дискретного объекта (1) назовем индуцированную норму оператора  $\mathcal{S}$ , то есть

$$(5) \quad \|\mathcal{S}\|_{\infty/(R,2)} = \sup \left\{ \frac{\|z\|_\infty}{\|(x_0, \xi_0, v, w)\|_{(R,2)}} : \|(x_0, \xi_0, v, w)\|_{(R,2)} \neq 0 \right\}.$$

Перепишем соотношение (5) в развернутом виде:

$$(6) \quad \|\mathcal{S}\|_{\infty/(R,2)} = \sup_{(x_0, \xi_0, v, w)} \frac{\max_{n=0, \dots, N} |z_n|_2}{\left( x_0^\top R_x^{-1} x_0 + \xi_0^\top R_\xi^{-1} \xi_0 + \int_{t_0}^{t_N} |v(t)|_2^2 dt + \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|_2^2 \right)^{1/2}},$$

где точная верхняя грань берется по всем таким наборам  $(x_0, \xi_0, v, w)$  для которых знаменатель не обращается в ноль. Поскольку величина  $|z_n|_2$  для каждого  $n = 0, \dots, N$  зависит от внешних возмущений, определенных на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_n$ , то соотношение (6) можно переписать как

$$(7) \quad \begin{aligned} & \|\mathcal{S}\|_{\infty/(R,2)} = \\ & = \max_{n=0, \dots, N} \sup_{(x_0, \xi_0, v, w)} \frac{|z_n|_2}{\left( x_0^\top R_x^{-1} x_0 + \xi_0^\top R_\xi^{-1} \xi_0 + \int_{t_0}^{t_n} |v(t)|_2^2 dt + \sum_{k=0}^{n-1} |w_k|_2^2 \right)^{1/2}}, \end{aligned}$$

здесь точная верхняя грань берется, фактически, только по всем возмущениям из отрезка  $t_0 \leq t \leq t_n$ . Таким образом, обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма объекта (1) представляет собой максимум из максимальных относительных значений модуля целевого выхода. Заметим, что в частном случае, когда в системе (1) отсутствует непрерывная часть, то есть когда  $x(t) \equiv 0$  и  $v(t) \equiv 0$ , то введенная таким образом обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма совпадает с определенным в [3] максимальным отклонением выхода дискретной системы.

Обозначим через  $\Phi(t, s)$  фундаментальную матрицу Коши системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, s) = A_c(t) \Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = I,$$

и определим матрицы

$$A_{c,k} = \Phi(t_{k+1}, t_k), \quad \Delta_{c,k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) \Delta_c(s) ds,$$

$$Q_{c,k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) B_c(s) B_c^\top(s) \Phi^\top(t_{k+1}, s) ds.$$

Справедливо утверждение.

*Теорема 1. Обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма для непрерывно-дискретного объекта (1) на заданном горизонте  $[t_0, t_N]$  находится как*

$$(8) \quad \|\mathcal{S}\|_{\infty/(R,2)} = \max_{k=0,\dots,N} \lambda_{\max}^{1/2}(\widehat{C}_k P_k \widehat{C}_k^\top), \quad \widehat{C}_k = (C_{c,k}, C_{d,k}),$$

где через  $\lambda_{\max}(\cdot)$  обозначено максимальное собственное значение соответствующей матрицы, а  $P_k = P_k^\top \geq 0$  — решение разностного уравнения Ляпунова

$$(9) \quad P_{k+1} = \widehat{A}_k P_k \widehat{A}_k^\top + \widehat{Q}_k, \quad \widehat{A}_k = \begin{bmatrix} A_{c,k} & \Delta_{c,k} \\ \Delta_{d,k} & A_{d,k} \end{bmatrix}, \quad \widehat{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_{c,k} & 0 \\ 0 & B_{d,k} B_{d,k}^\top \end{bmatrix},$$

с начальными условиями  $P_0 = R = \text{diag}(R_x, R_\xi)$ .

Доказательства этого и последующих утверждений содержатся в Приложении. Отметим, что в частном случае, когда начальные состояния объекта (1) нулевые, для вычисления обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы в рекуррентных уравнениях (9) необходимо взять в качестве начальных условий  $P_0 = 0$ . В другом частном случае, когда внешние возмущения отсутствуют, а начальные состояния неизвестны, обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма определяется соотношениями (8) и (9), в которых следует положить  $\widehat{Q}_k = 0$ .

Следующая теорема позволяет ответить на вопрос о наихудших начальных условиях  $x_0^*$ ,  $\xi_0^*$  и внешних возмущениях  $v^*$ ,  $w^*$  для которых достигается (5). Сразу отметим, что поскольку система (1) линейна, а обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма представляет собой однородный функционал, то наихудшие начальные состояния и внешние возмущения определяются неоднозначно, с точностью до постоянного множителя.

*Теорема 2. Если для непрерывно-дискретного объекта (1) на заданном горизонте  $[t_0, t_N]$  обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма равна  $\gamma^*$  и это значение достигается при  $k = k^*$ , то наихудшие начальные состояния и внешние возмущения определяются как*

$$(10) \quad \begin{bmatrix} x_0^* \\ \xi_0^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma^*} R^{-1} \Psi_{k^*,0}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top e,$$

$$\begin{bmatrix} v^*(t) \\ w_k^* \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma^*} \begin{bmatrix} B_c^\top(t) \Phi^\top(t_{k+1}, t) x \\ B_{d,k}^\top \xi \end{bmatrix} \Psi_{k^*,k+1}^\top \widehat{C}_{k^*}^\top e,$$

здесь через  $e = e_{\max}(\widehat{C}_{k^*} Y_{k^*} \widehat{C}_{k^*}^\top)$  обозначен нормированный собственный вектор матрицы  $\widehat{C}_{k^*} Y_{k^*} \widehat{C}_{k^*}^\top$ , соответствующий ее максимальному собственному числу, а через  $\Psi_{i,j}$  — переходная матрица дискретной системы  $\zeta_k = \widehat{A}_k \zeta_k$ , то есть

$$\Psi_{0,0} = I, \quad \Psi_{i,j} = \widehat{A}_{i-1} \widehat{A}_{i-2} \dots \widehat{A}_j, \quad i \geq j + 1.$$

Из теоремы 2 следует, что обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма на горизонте  $[t_0, t_N]$  зависит от значений, принимаемых возмущениями  $v^*$ ,  $w^*$  на отрезке  $t_0 \leq t \leq t_{k^*}$ , и не зависит от значений вне этого отрезка.

Переформулируем теорему 1 в терминах линейных матричных неравенств, символом  $*$  обозначен соответствующий симметрический блок.

**Теорема 3.** *Обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма для непрерывно-дискретного объекта (1) на заданном горизонте  $[t_0, t_N]$  находится из решения задачи  $\|\mathcal{S}\|_{\infty,2}^2 = \inf \gamma^2$ , при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:*

$$(11) \quad \begin{bmatrix} Y_k & * \\ \widehat{A}_k Y_k & Y_{k+1} - \widehat{Q}_k \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Y_l & * \\ \widehat{C}_l Y_l & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad Y_0 \geq R, \quad \begin{matrix} k = 0, \dots, N-1, \\ l = 0, \dots, N, \end{matrix}$$

точная нижняя грань берется по переменной  $\gamma$  и симметрическим неотрицательно определенным матрицам  $Y_0, \dots, Y_N$ .

Доказательство теоремы 3 в настоящей работе опущено, поскольку дословно повторяет основные шаги доказательства теоремы 2.2 из [3]. Также сделаем замечания, аналогичные тем, что были сделаны к теореме 1. В случае, если начальные состояния объекта (1) нулевые, для вычисления обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы в неравенствах (11) необходимо положить  $Y_0 \geq 0$ , а в случае, когда внешние возмущения отсутствуют, а начальные состояния неизвестны, в неравенствах (11) следует положить  $\widehat{Q}_k = 0$ .

### 3. Синтез обобщенного $\mathcal{H}_2$ -управления

Рассмотрим линейный непрерывно-дискретный нестационарный объект с управлением, описываемый совокупностью дифференциальных и разностных уравнений

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_c(t)x + \Delta_c(t)\xi_k + B_c(t)v + H_c(t)u(t), \\ \xi_{k+1} &= A_{d,k}\xi_k + \Delta_{d,k}x(t_k) + B_{d,k}w_k + H_{d,k}u(t_k), \\ z_k &= C_{c,k}x(t_k) + C_{d,k}\xi_k + D_k u(t_k), \\ t_k &\leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  — управление, а остальные переменные имеют тот же смысл, что и ранее. Поставим задачу синтеза на конечном интервале времени  $[t_0, t_N]$  управления в виде нестационарной линейной обратной связи по состоянию

$$(13) \quad u(t) = u_k = \Theta_{c,k}x(t_k) + \Theta_{d,k}\xi_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

обеспечивающего минимальное значение обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы замкнутой системы.

Справедливо следующее утверждение.

*Теорема 4. Параметры оптимального обобщенного  $\mathcal{H}_2$ -регулятора вида (13) для непрерывно-дискретного объекта (12) находятся как  $\hat{\Theta}_k = (\Theta_{c,k}, \Theta_{d,k}) = Z_k Y_k^{-1}$ , где матрицы  $Y_k = Y_k^\top \geq 0$  и  $Z_k$  являются решением задачи  $\inf \gamma^2$  при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:*

$$(14) \quad \begin{bmatrix} Y_k & & * \\ \hat{A}_k Y_k + \hat{H}_k Z_k & Y_{k+1} - \hat{Q}_k & \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Y_l & & * \\ \hat{C}_l Y_l + D_l Z_l & \gamma^2 I & \end{bmatrix} \geq 0, \quad Y_0 \geq R,$$

в которых  $k = 0, \dots, N-1$ ,  $l = 0, \dots, N$  и матрицы  $\hat{H}_k$  определены соотношениями

$$\hat{H}_k = \begin{bmatrix} H_{c,k} \\ H_{d,k} \end{bmatrix}, \quad H_{c,k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) H_c(s) ds.$$

Предположим теперь, что объект управления имеет несколько целевых выходов

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_c(t)x + \Delta_c(t)\xi_k + B_c(t)v + H_c(t)u(t), \\ \xi_{k+1} &= A_{d,k}\xi_k + \Delta_{d,k}x(t_k) + B_{d,k}w_k + H_{d,k}u(t_k), \\ z_k^{(j)} &= C_{c,k}^{(j)}x(t_k) + C_{d,k}^{(j)}\xi_k + D_k^{(j)}u(t_k), \quad j = 1, \dots, m, \\ t_k &\leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

и требуется синтезировать управление вида (13) при котором значения обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы по каждому целевому выходу замкнутой системы будут минимальными. В общем случае указанные критерии являются противоречивыми, поэтому оптимальность следует понимать в смысле Парето. Обозначим через  $\Theta = \{\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_{N-1}\}$  матрицы обратной связи, а через  $\gamma_j(\Theta)$  значение обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы  $j$ -го целевого выхода системы (15), замкнутой регулятором  $\Theta$ . Скажем, что регулятор  $\Theta^*$  является оптимальным в смысле Парето, если не существует другого регулятора  $\Theta$  такого, что справедливы неравенства  $\gamma_j(\Theta) \leq \gamma_j(\Theta^*)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , в которых по крайней мере одно выполняется строго. Необходимые условия оптимальности по Парето формулируются следующим образом [1].

*Теорема 5. Пусть  $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  — оптимальная по Парето точка в пространстве критериев и  $\Theta_\alpha$  — минимум свертки Гермейера, скалярной функции вида*

$$(16) \quad G(\Theta) = \max_{j=1, \dots, m} \frac{\gamma_j(\Theta)}{\alpha_j}, \quad \alpha_j = \frac{\gamma_j}{\max_{j=1, \dots, m} \gamma_j}.$$

Тогда точка  $\Theta_\alpha$  принадлежит множеству Парето и  $\gamma_j(\Theta_\alpha) = \gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

В соответствии с теоремой 5, оптимальные по Парето решения в рассматриваемой многокритериальной задаче следует искать среди оптимальных решений для свертки Гермейера. Применим теорему 3 к выражению (16), тогда:

$$(17) \quad G(\Theta) = \max_{j=1, \dots, m} \max_{k=0, \dots, N} \alpha_j^{-1} \lambda_{\max}^{1/2}(\widehat{C}_k^{(j)} Y_k \widehat{C}_k^{(j)\top}),$$

здесь  $Y_k = Y_k^\top \geq 0$  – решения уравнения (9) для замкнутой системы. Представление (17) позволяет свести поиск оптимального решения для свертки Гермейера к решению задачи выпуклого полуопределенного программирования.

*Теорема 6. Параметры оптимальных по Парето обобщенных  $\mathcal{H}_2$ -регуляторов вида (13) для непрерывно-дискретного объекта (15) находятся как  $\widehat{\Theta}_{\alpha, k} = Z_k Y_k^{-1}$ , где матрицы  $Y_k = Y_k^\top \geq 0$  и  $Z_k$  являются решением задачи  $\inf \gamma^2$  при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами:*

$$(18) \quad \begin{bmatrix} Y_k & \star \\ \widehat{A}_k Y_k + \widehat{H}_k Z_k & Y_{k+1} - \widehat{Q}_k \end{bmatrix} \geq 0, \\ \begin{bmatrix} Y_l & \star \\ \widehat{C}_l^{(j)} Y_l + D_l^{(j)} Z_l & \alpha_j^2 \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad Y_0 \geq R,$$

в которых  $k = 0, \dots, N-1$ ,  $l = 0, \dots, N$  и  $j = 1, \dots, m$ .

#### 4. Пример

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, состоящую из основания «1» и объекта «2», связанного с основанием через виброизолятор (рис. 1). Математическая модель изоляции объекта от основания, совершающего поступательное движение, описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$(19) \quad \ddot{x} = u + v + \sum_{k=0}^{N-1} w_k \delta(t - t_k), \quad x(0) = x_{10}, \quad \dot{x}(0) = x_{20},$$

где  $x$  – координата защищаемого объекта,  $u$  – управляющее силовое воздействие, порождаемое виброизолятором,  $v$  – непрерывное внешнее воздействие, с точностью до знака совпадающее с ускорением основания, и  $w_k$  – дискретное внешнее возмущение, представляющее собой импульсы, приложенные к основанию. Моменты времени  $t_k$ ,  $k = 0, \dots, N-1$ , в которые происходят удары по основанию, считаются заданными и образуют монотонно возрастающую последовательность.

Перепишем уравнение (19) в матрично-векторном виде (12). Для этого определим переменную  $x_2$  формулой

$$x_2 = \dot{x} - \sum_{k=0}^{N-1} w_k \eta(t - t_k),$$

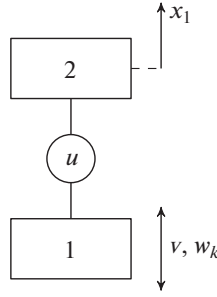


Рис. 1. Схематическое изображение модели защиты от ударов и вибрации.

где через  $\eta(t)$  обозначена функция Хевисайда. Полагая теперь  $x = x_1$  и вводя дискретную переменную  $\xi_k$ , равную суммарному импульсу, сообщенному основанию за время  $t_{k+1}$ , приходим к системе

$$(20) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \xi_k, & t_k \leq t < t_{k+1}, \\ \dot{x}_2 &= u + v, \\ \xi_{k+1} &= \xi_k + w_k, \end{aligned}$$

с начальными условиями  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = x_{20}$  и  $\xi_0 = 0$ .

Введем в рассмотрение два функционала, характеризующих качество виброизоляции:

$$(21) \quad \begin{aligned} J_1(u) &= \sup \frac{\max_{k=0, \dots, N} |x_1(t_k)|}{\sqrt{\zeta_0^T R \zeta_0 + \|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2}}, \\ J_2(u) &= \sup \frac{\max_{k=0, \dots, N} |u(t_k)|}{\sqrt{\zeta_0^T R \zeta_0 + \|v\|_{L_2}^2 + \|w\|_{l_2}^2}}. \end{aligned}$$

здесь  $\zeta_0 = \text{column}(x_{10}, x_{20}, \xi_0)$  и точная верхняя грань берется по всем начальным условиям  $\zeta_0$  и внешним возмущениям  $v, w$  при которых знаменатель не обращается в ноль. Нетрудно видеть, что функционал  $J_1$  характеризует максимальные смещения защищаемого тела относительно основания, а функционал  $J_2$  определяет максимальное управляющее усилие. Введенные критерии являются противоречивыми в том смысле, что чем меньше первый функционал, то есть чем меньше смещается тело, тем большее управляющее воздействие порождается изолятором, что соответствует большему значению второго функционала, и наоборот. Требуется синтезировать кусочно-постоянное управление вида  $u_k = u(t_k) = \theta_{1,k}x_1(t_k) + \theta_{2,k}x_2(t_k) + \theta_{3,k}\xi_k$  при  $t_k \leq t < t_{k+1}$ , минимизирующее в смысле Парето оба критерия  $J_1$  и  $J_2$ .

Для численного решения указанной задачи, положим  $R_x = 10I$ ,  $R_\xi = 1$ ,  $N = 5$  и рассмотрим два множества моментов времени, в которые происходят удары по основанию:  $\mathfrak{S}_1 = \{0; 2; 4; \dots; 20\}$  и  $\mathfrak{S}_2 = \{0,5; 1,5; 2,0; 6,0; 10,0; 14,0; 18,0; 18,5; 19,5; 20,0\}$ . Используя теорему 6 были синтезированы оптимальные в смысле Парето регуляторы  $\hat{\Theta}_{\alpha,k}$  и вычислены соответствующие им опти-



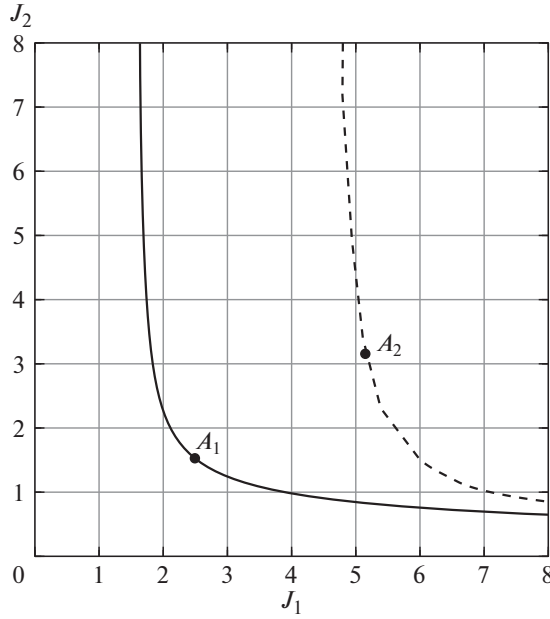


Рис. 2. Парето-фронт.

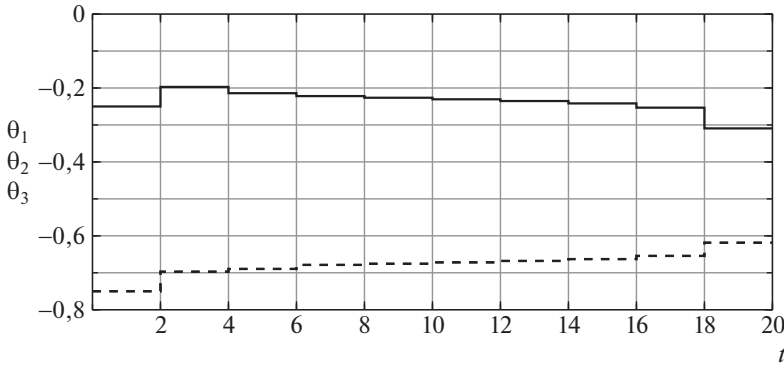


Рис. 3. Графики зависимостей от времени оптимальных по Парето коэффициентов обратной связи.

мальные значения функционалов. На рис. 2 на плоскости критериев  $(J_1, J_2)$  сплошной кривой изображен Парето-фронт для множества  $\mathfrak{S}_1$ , а пунктирной — для множества  $\mathfrak{S}_2$ . Точки  $A_1(2,493; 1,528)$  и  $A_2(5,148; 3,156)$  соответствуют параметру свертки  $\alpha = 0,62$ . Для сравнения приведем значение первого функционала в случае отсутствия управления: для множества  $\mathfrak{S}_1$  получается  $J_1 = 65,167$ , а для  $\mathfrak{S}_2$  —  $J_1 = 67,021$ . Отметим следующую особенность, замеченную при численных экспериментах: чем сильнее моменты времени  $t_k$  «отличаются» от равномерной сетки, тем сильнее Парето-фронт сдвигается вправо. На рис. 3 приведены графики зависимости от времени оптимальных по Парето коэффициентов обратной связи  $\hat{\Theta}_{\alpha,k}$ , соответствующих точке  $A_1$ :

сплошная кривая соответствует коэффициенту  $\theta_{1,k}$ , штриховая — коэффициентам  $\theta_{2,k}$  и  $\theta_{3,k}$ , которые, как оказалось при численных расчетах, совпадают.

## 5. Заключение

В работе для линейного непрерывно-дискретного нестационарного объекта с дискретным целевым выходом вводится понятие обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы, как индуцированной нормы линейного оператора, порожденного этим объектом. Показано, что эта характеристика есть максимальное отношения максимального по времени значения евклидовой нормы выхода к смешанной норме неизвестных начальных условий и внешних возмущений. Установлено, что вычисление обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы сводится к решению задачи выпуклого полуопределенного программирования, это позволяет решить задачу синтеза оптимальных законов управления, обеспечивающих минимально возможное значение обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы замкнутой системы одного или нескольких выходов. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована результатами численных экспериментов, проведенных для задачи активной виброзащиты.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Рассмотрим оператор  $\mathcal{S}^*$ , двойственный к оператору (3)

$$(II.1) \quad \mathcal{S}^* : \{z_k\} \mapsto (x_0, \xi_0, v(t), \{w_k\}),$$

здесь

$$z \in l_1([0, N], \mathbb{R}^n), (x_0, \xi_0, v, w) \in \mathbb{R}_2^{n_x} \times \mathbb{R}_2^{n_\xi} \times L_2([t_0, t_N], \mathbb{R}^{n_v}) \times l_2([0, N-1], \mathbb{R}^{n_w}).$$

Норма оператора  $\mathcal{S}^*$  задается выражением

$$\|\mathcal{S}^*\|_{(R,2)/1} = \sup \left\{ \|(x_0, \xi_0, v, w)\|_{(R,2)} : \|z\|_{l_1} \leq 1 \right\}$$

и, согласно двойственности, справедливо следующее свойство:

$$(II.2) \quad \|\mathcal{S}\|_{\infty/(E,2)} = \|\mathcal{S}^*\|_{(E,2)/1}.$$

Таким образом, вместо вычисления нормы оператора  $\mathcal{S}$  можно вычислять норму двойственного оператора  $\mathcal{S}^*$ , что, как будет видно позднее, существенно проще.

Для определения выражения оператора  $\mathcal{S}^*$ , рассмотрим элемент  $z \in l_1([0, N], \mathbb{R}^n)$ , тогда

$$(II.3) \quad \langle z, \mathcal{S}y \rangle = \langle \mathcal{S}^*z, y \rangle_{(R,2)},$$

где  $y = (x_0, \xi_0, v, w)$  и скалярное произведение, стоящее в левой части, определяется выражением:

$$\langle z, \zeta \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} z_k^\top \zeta_k.$$

Скалярное произведение, стоящее в правой части, имеет вид

$$\langle y_1, y_2 \rangle_{(R,2)} = x_{0,1}^\top R_x^{-1} x_{0,2} + \xi_{0,1}^\top R_\xi^{-1} \xi_{0,2} + \sum_{k=0}^{N-1} w_{1,k}^\top w_{2,k} + \int_{t_0}^{t_N} v_1^\top(\tau) v_2(\tau) d\tau,$$

и согласуется с определением нормы (4).

Перепишем систему (1) в полудискретной форме, последнее означает дискретизацию только непрерывной переменной  $x$ , в то время как непрерывное внешнее возмущение  $v$  остается неизменным, то есть

$$(II.4) \quad \begin{aligned} \zeta_{k+1} &= \widehat{A}_k \zeta_k + \mathcal{B}_k \omega_k, \\ z_k &= \widehat{C}_k \zeta_k, \end{aligned}$$

где  $\omega_k = \text{column}(v(t), w_k)$  и

$$(II.5) \quad \mathcal{B}_k : L_2([t_k, t_{k+1}], \mathbb{R}^{n_v}) \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x + n_\xi}$$

$$: \begin{bmatrix} v(t) \\ w_k \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) B_c(\tau) v(\tau) d\tau \\ B_{d,k} w_k \end{bmatrix}.$$

Теперь, запишем замкнутое выражение, связывающее векторы  $\tilde{y} = \text{column}(\zeta_0, \omega_0, \dots, \omega_{N-1})$  и  $\tilde{z} = \text{column}(z_0, \dots, z_N)$ . Для этого воспользуемся соотношением (II.4), тогда

$$(II.6) \quad \tilde{z} = \tilde{C} \tilde{A} \tilde{B} \tilde{y},$$

здесь

$$\tilde{C} = \text{diag}(\widehat{C}_0, \widehat{C}_1, \dots, \widehat{C}_N), \quad \tilde{B} = \text{diag}(I, \mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{N-1}),$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \widehat{A}_0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \widehat{A}_1 \widehat{A}_0 & \widehat{A}_1 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{A}_{N-1} \dots \widehat{A}_0 & \widehat{A}_{N-1} \dots \widehat{A}_1 & \widehat{A}_{N-1} \dots \widehat{A}_2 & \dots & I \end{bmatrix}.$$

Таким образом, оператор  $\mathcal{S}$  может быть представлен в виде  $\mathcal{S} = \tilde{C} \tilde{A} \tilde{B}$ . Используя выражение (II.3), легко увидеть, что двойственный оператор  $\mathcal{S}^*$  может быть записан как

$$(II.7) \quad \mathcal{S}^* = \tilde{B}^* \tilde{A}^\top \tilde{C}^\top,$$

где  $\tilde{B}^* = \text{diag}(R^{-1}, \mathcal{B}_0^*, \dots, \mathcal{B}_{N-1}^*)$  и

$$\mathcal{B}_k^* : \mathbb{R}^{n_x + n_\xi} \rightarrow L_2([t_k, t_{k+1}], \mathbb{R}^{n_v}) \times \mathbb{R}_2^{n_w} : \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} B_c^\top(t) \Phi^\top(t_{k+1}, t) x \\ B_{d,k}^\top \xi \end{bmatrix}.$$

Далее, с помощью представления (П.7), нетрудно проверить справедливость следующего выражения

$$\|\mathcal{S}^* z\|_{(R,2)}^2 = \|\mathcal{S}^* \tilde{z}\|_{(R,2)}^2 = \tilde{z}^\top \tilde{C} W \tilde{C}^\top \tilde{z},$$

где

$$W = \tilde{A} \tilde{Q} \tilde{A}^\top, \quad \tilde{Q} = \text{diag} (R^{-1}, \hat{Q}_0, \dots, \hat{Q}_{N-1}).$$

Поскольку матрица  $\tilde{C}$  является блочно-диагональной, рассмотрим вспомогательную блочно-диагональную матрицу  $\tilde{Y} = \text{diag} (Y_0, \dots, Y_N)$ , имеющую те же самые блоки на главной диагонали, что и матрица  $W$ . Блоки  $Y_k$  удовлетворяют линейному рекуррентному уравнению

$$Y_0 = R^{-1}, \quad Y_{k+1} = \hat{A}_k Y_k \hat{A}_k^\top + \hat{Q}_k,$$

совпадающему с уравнением (9) и, кроме того, справедливы следующие преобразования

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}^*\|_{(R,2)/1}^2 &= \sup \left\{ \|\mathcal{S}^* z\|_{(R,2)}^2 : \|z\|_{l_1} \leq 1 \right\} = \\ (П.8) \quad &= \sup \left\{ \tilde{z}^\top \tilde{C} W \tilde{C}^\top \tilde{z} : \|z\|_{l_1} \leq 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \tilde{z}^\top \tilde{C} \tilde{Y} \tilde{C}^\top \tilde{z} : \|z\|_{l_1} \leq 1 \right\} = \max_{k=0, \dots, N} \lambda_{\max} (\hat{C}_k Y_k \hat{C}_k^\top). \end{aligned}$$

Последнее выражение совпадает с (8), что и завершает доказательство теоремы

*Доказательство теоремы 2.* Для доказательства выражения (10), предположим, что значение обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы равно  $\gamma^*$  и достигается на шаге  $k = k^*$ . В этом случае существует элемент

$$\tilde{z}^* = \text{column} (0, \dots, 0, z_{k^*}, 0, \dots, 0), \quad \|\tilde{z}^*\|_{l_1} = 1$$

такой, что

$$\gamma^* = \|\mathcal{S}^* \tilde{z}^*\|_{(R,2)}.$$

Равенство  $\|\tilde{z}^*\|_{l_1} = 1$  означает, что  $z_{k^*} = e_{\max} (\hat{C}_{k^*} Y_{k^*} \hat{C}_{k^*}^\top)$ , здесь  $\tilde{y}^* = \mathcal{S}^* \tilde{z}^* = \text{column} (\zeta^*, \omega_0^*, \dots, \omega_{N-1}^*)$  это вектор, составленный из наихудших начальных условий и внешних возмущений, кроме этого,  $\|\tilde{y}^*\|_{(R,2)} = \gamma^*$ . Заметим, что для вычисления  $\tilde{y}^*$  следует выбрать  $k^*$  столбец из матричного представления оператора  $\mathcal{S}^*$ :

$$\tilde{y}^* = \begin{bmatrix} \zeta^* \\ \omega_0^* \\ \vdots \\ \omega_{k^*}^* \\ \vdots \\ \omega_{N-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1} \hat{A}_0^\top \dots \hat{A}_{k^*}^\top \hat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ B_0 \hat{A}_1^\top \dots \hat{A}_{k^*}^\top \hat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \vdots \\ B_{k^*} \hat{A}_{k^*}^\top \hat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1} \Psi_{k^*,0}^\top \hat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ B_0 \Psi_{k^*,1}^\top \hat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \vdots \\ B_{k^*} \Psi_{k^*,k^*}^\top \hat{C}_{k^*}^\top z_{k^*} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, чтобы получить выражение (10), нужно умножить вектор  $\tilde{y}^*$  на  $1/\gamma^*$ , поскольку в определении обобщенной  $\mathcal{H}_2$ -нормы (5) вектор наилучших начальных условий и внешних возмущений удовлетворяет условию  $\|\tilde{y}^*\|_{(R,2)} = 1$ . Теорема 2 доказана.

*Доказательство теоремы 4.* Запишем уравнение системы (12), замкнутой обратной связью вида (13), тогда:

$$(II.9) \quad \begin{aligned} \zeta_{k+1} &= (\hat{A}_k + \hat{H}_k \hat{\Theta}_k) \zeta_k + \mathcal{B}_k \omega_k, \\ z_k &= (\hat{C}_k + D_k \hat{\Theta}_k) \zeta_k. \end{aligned}$$

Согласно теореме 3, обобщенная  $\mathcal{H}_2$ -норма системы (II.9) может быть вычислена как решение задачи (11), в которой матрицы  $\hat{A}_k$  и  $\hat{C}_k$  следует заменить на  $\hat{A}_k + \hat{H}_k \hat{\Theta}_k$  и  $\hat{C}_k + D_k \hat{\Theta}_k$  соответственно. Вводя новые переменные  $Z_k = \hat{\Theta}_k Y_k$ , приходим к неравенствам (14). Теорема 4 доказана.

*Доказательство теоремы 6.* Для доказательства теоремы заметим, что равенство (17) может быть записано как

$$\begin{aligned} G(\Theta) &= \max_{j=1,\dots,m} \max_{k=0,\dots,N} \alpha_j^{-1} \lambda_{\max}^{1/2} (\hat{C}_k^{(j)} Y_k \hat{C}_k^{(j)\top}) = \\ &= \max_{j=1,\dots,m} \max_{k=0,\dots,N} \lambda_{\max}^{1/2} (\alpha_j^{-2} \hat{C}_k^{(j)} Y_k \hat{C}_k^{(j)\top}), \end{aligned}$$

следовательно, в неравенствах (14) достаточно заменить матрицы  $\hat{C}_k$  и  $\hat{D}_k$  на  $\alpha_j^{-1} \hat{C}_k^{(j)}$  и  $\alpha_j^{-1} \hat{D}_k$ , после чего получим неравенства (18). Теорема 6 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное  $\mathcal{H}_2$ -управление и задачи виброзащиты // *АиТ*. 2017. № 8. С. 76–90.  
*Balandin D. V., Kogan M. M. Pareto Optimal Generalized  $\mathcal{H}_2$ -Control and Vibration Protection Problems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1417–1429.*
2. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Оптимальное управление максимальными отклонениями выходов линейной нестационарной системы на конечном интервале времени // *АиТ*. 2019. № 10. С. 37–61.  
*Balandin D. V., Biryukov R. S., Kogan M. M. Optimal Control of Maximum Output Deviations of a Linear Time-Varying System on a Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1783–1802.*
3. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Оптимальное управление максимальными отклонениями выходов линейной дискретной нестационарной системы // *АиТ*. 2019. № 12. С. 3–23.  
*Balandin D. V., Biryukov R. S., Kogan M. M. Minimax Control of Deviations for the Outputs of a Linear Discrete Time-Varying System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 12. P. 2091–2107.*
4. Баландин Д.В., Бирюков Р.С., Коган М.М. Finite-Horizon Multi-Objective Generalized  $\mathcal{H}_2$  Control with Transients // *Automatica*. 2019. V. 106. No. 8. P. 27–34.
5. Chellaboina V., Haddad W.M., Bernstein D.S., Wilson D.A. Induced convolution operator norms for discrete-time linear systems // *Proc. 38th IEEE Conference on Decision and Control*. 1999. P. 487–492.

6. *Khargonekar P.P., Sivashankar N.*  $\mathcal{H}_2$  optimal control for sampled-data systems // Systems Control Lett. 1991. V. 17. No. 6. P. 425–436.
7. *Kim J.H., Hagiwara T.* Extensive theoretical/numerical comparative studies on  $\mathcal{H}_2$  and generalized  $\mathcal{H}_2$  norms in sampled-data systems // Int. J. Control. 2017. V. 90. No. 11. P. 2538–2553.
8. *Kim J.H., Hagiwara T.* Upper/lower bounds of generalized  $\mathcal{H}_2$  norms in sampled-data systems with convergence rate analysis and discretization viewpoint // Systems Control Letters. 2017. V. 107. P. 28–35.
9. *Rotea M.A.* The generalized  $\mathcal{H}_2$  control problem // Automatica. 1993. V. 29. No. 2. P. 373–385.
10. *Wilson D.A.* Convolution and Hankel Operator Norms for Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. P. 94–97.
11. *Wilson D.A., Nekoui M.A., Halikias G.D.* An LQR weight selection approach to the discrete generalized  $\mathcal{H}_2$  control problem // Int. J. Control. 1998. V. 71. No. 1. P. 93–101.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.*

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 05.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020