

© 2020 г. Н.В. ДЕРЕНДЯЕВ, д-р физ.-мат. наук (derendyaevnic@rambler.ru)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ РОТОРНЫХ СИСТЕМ С ЖИДКОСТЬЮ¹

Изложен новый метод исследования устойчивости, в котором, в отличие от традиционного метода D-разбиения, знание характеристического уравнения не требуется. Метод эффективен в широком классе задач динамики тел с полостями, содержащими жидкость.

Ключевые слова: роторная система, полость, содержащая вязкую жидкость, режим стационарного вращения, устойчивость и автоколебания.

DOI: 10.31857/S0005231020080085

1. Введение

И.А. Вышнеградский (1871–1876) обратился к задаче об устойчивости режима работы паровой машины, снабженной регулятором Уатта. В знаменитой работе 1876 г. И.А. Вышнеградский впервые установил условия устойчивости движения паровой машины, а также получил необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей корней алгебраического уравнения (полинома) третьей степени и дал геометрическую интерпретацию этих условий в виде диаграмм Вышнеградского. Д.К. Максвелл в задаче, близкой к той, которой занимался И.А. Вышнеградский, пришел к тем же математическим требованиям отрицательности действительных частей корней характеристического полинома (1868), но не сделал отчетливых инженерных выводов. Критерий отрицательности действительных частей всех корней полинома n -й степени получил Раус (1877). А.М. Ляпунов в своей диссертации (1892) дал математическое обоснование исследованиям устойчивости при помощи линеаризованных уравнений. А. Стодола (1893) распространил линеаризованную теорию И.А. Вышнеградского на не прямое регулирование и, не зная о работах Д.К. Максвелла и Рауса, предложил А. Гурвицу задачу о нахождении критерия отрицательности действительных частей всех корней полинома n -й степени с действительными коэффициентами. А. Гурвиц нашел решение этой задачи в изящной форме детерминантных неравенств (1895). Заметим, что из условий Рауса–Гурвица следует положительность всех коэффициентов полинома, корни которого располагаются в левой полуплоскости. Но тогда, как было показано Лъенаром и Шипаром (1914), количество детерминантных неравенств сокращается почти вдвое, т.е. необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей всех корней полинома степени n с положительными коэффициентами записываются в виде

¹ Работа выполнена в порядке личной инициативы.

детерминантных неравенств

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \dots,$$

где Δ_k , $k = \overline{1, n}$ — определители из условий Гурвица [1].

В дальнейшем руководящим стимулом стало стремление дать в руки прикладников практически пригодные приемы исследования устойчивости. На практике обычно речь идет не столько о том, что устойчива или неустойчива данная система, сколько о таком подборе параметров системы, чтобы система удовлетворяла ряду технических требований, оставаясь при этом устойчивой. Фактически задача сводится к разбиению пространства параметров системы на области устойчивости и неустойчивости. Существенным шагом в решении этой задачи стало появление частотных критериев Найквиста (1932) и Михайлова (1938), новая трактовка критерия Найквиста и метод D-разбиения Ю.И. Неймарка (1949) [2]. В методе D-разбиения рассматривается плоское сечение пространства комплексных полиномов, точками которого являются полиномы степени n , а их коэффициенты зависят либо от одного комплексного, либо от двух действительных параметров; значения параметров, таким образом, принадлежат плоскости параметров. Поскольку корни полиномов непрерывно зависят от их коэффициентов, то кривая на плоскости параметров (D-кривая), точкам которой соответствуют полиномы, имеющие хотя бы один корень на мнимой оси, разбивает, в общем случае, плоскость параметров на области с различной степенью неустойчивости, т.е. с различным числом корней справа от мнимой оси. D-кривая, по сути, является отображением мнимой оси плоскости корней полиномов на плоское сечение пространства полиномов. Метод D-разбиения был обобщен на квазиполиномы и другие целые функции, что позволило применять его к исследованию устойчивости некоторых распределенных систем.

Идея построения отображения мнимой оси плоскости характеристических чисел на плоское сечение пространства параметров оказалась очень плодотворной. Удалось построить области устойчивости в случае таких систем, для которых само выписывание конечного уравнения для характеристических чисел часто оказывается проблематичным. При этом оказалось, что рассмотрение всевозможных возмущенных движений излишне, а достаточно лишь рассмотреть условия осуществимости возмущенных движений определенного типа. Далее речь пойдет об устойчивости режимов стационарного вращения роторных систем, содержащих жидкость. Именно для них при исследовании устойчивости в линейном приближении удалось развить эффективный метод [3, 4], в котором, в отличие от метода D-разбиения, знание характеристического уравнения не требуется. В то же время исследование возмущенных движений типа круговой прецессии позволяет с минимальными затратами построить D-кривую и выделить области устойчивости.

Проиллюстрируем оригинальный метод исследования устойчивости на примере задачи об устойчивости (в линейном приближении) стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. Отличительная особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что скорость вращения тела, содержащего жидкость, поддерживается постоянной за счет внешнего источника энергии, вследствие чего кинетическая энергия

содержащейся в полости жидкости может возрастать во времени благодаря взаимодействию со стенками полости. Для таких задач представляет большую трудность использование методов, связанных с построением функции Ляпунова.

2. Постановка задачи

Пусть круговой цилиндр радиуса a совершает стационарное вращение вокруг своей оси (совпадающей с осью Oz неподвижной прямоугольной системы координат $Oxyz$), которая находится в вязкоупругом осесимметричном закреплении. Вязкая несжимаемая жидкость, частично заполняющая цилиндр, при стационарном вращении расположена в слое постоянной толщины h на боковой поверхности цилиндра и вращается вместе с ним как твердое тело. Ограничимся рассмотрением задачи об устойчивости в линейном приближении и в рамках плоской модели, т.е. в предположении, что точки цилиндра могут перемещаться лишь параллельно плоскости Oxy , а поле скоростей жидкости имеет лишь x - и y -компоненты, которые, как и давление жидкости, не зависят от z . Плоская модель применима, если осевые перемещения цилиндра и угловое перемещение его оси пренебрежимо малы (например, ось цилиндра в подшипниках), а сам цилиндр достаточно длинный (концевые эффекты несущественны). Система линеаризованных уравнений плоской модели и граничных условий к ним, используемая в данной работе, содержит:

1. Уравнения поступательного движения цилиндра параллельно плоскости Oxy , линеаризованные вблизи состояния цилиндра при стационарном вращении

$$(1) \quad \begin{aligned} M\ddot{x}_0 + H\dot{x}_0 + Kx_0 &= F_x, \\ M\ddot{y}_0 + H\dot{y}_0 + Ky_0 &= F_y, \end{aligned}$$

где x_0, y_0 — координаты точки пересечения оси цилиндра с плоскостью Oxy ; F_x, F_y — компоненты силы, с которой жидкость действует на единицу длины цилиндра; M — масса единицы длины цилиндра; H, K — соответственно коэффициенты демпфирования и жесткости закрепления оси цилиндра, деленные на его длину;

2. Условие постоянства абсолютной угловой скорости вращения цилиндра вокруг оси Oz : $\Omega = \text{const}$;

3. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоскости Oxy , линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси Oz :

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k^0 \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + v_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma} v_j^0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \Delta v_j, \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0; \quad v_1^0 = -\Omega x_2; \quad v_2^0 = \Omega x_1; \end{aligned}$$

4. Условие прилипания жидкости к поверхности цилиндра, условие непрерывности напряжений и кинематическое условие на свободной поверхности, перенесенные в линейном приближении по отклонениям от состояния стацио-

нарного вращения на поверхности $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 = (a - h)^2$ соответственно:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \dot{x}_1^0 + \Omega \dot{x}_2^0; & v_2 &= \dot{x}_2^0 - \Omega \dot{x}_1^0, \\
 x_1^2 + x_2^2 &= a^2, \\
 \sigma'_{ik} n_k^0 &= -\rho \Omega^2 b S n_i^0, \\
 \sigma'_{ik} &= -p' \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \\
 (3) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \Omega \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) S &= v_j n_j^0; & x_1^2 + x_2^2 &= b^2,
 \end{aligned}$$

здесь n_j^0 — внешняя нормаль к поверхности жидкости, S — отклонение свободной поверхности жидкости от невозмущенной поверхности $x^2 + y^2 = b^2$ в направлении нормали к ней;

5. Формулы, определяющие F_x, F_y через отклонения давления и компонент поля скоростей жидкости от соответствующих величин при стационарном квазитвердом вращении:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad F_j &= - \int \sigma'_{ik} n_k dl + \rho \frac{\Omega^2 a^2}{2} x_j^0, \\
 x_1^2 + x_2^2 &= a^2.
 \end{aligned}$$

Интеграл вычисляется по окружности $x^2 + y^2 = a^2$, dl — элемент длины дуги.

3. Свойства симметрии и круговая прецессия

Перечисленные уравнения и граничные условия линейны и однородны относительно отклонений от состояния стационарного вращения цилиндра и частично заполняющей его жидкости и обладают двумя очевидными свойствами симметрии: а) инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени, т.е. преобразования $t' = t - t_0$; б) инвариантны относительно поворота системы координат вокруг Oz на угол $\frac{\pi}{2}$, т.е. преобразования $x' = y, y' = -x, z' = z$. В силу свойства симметрии а) система уравнений (1)–(4) допускает частные решения, пропорциональные $e^{\lambda t}$, где λ — характеристическое число. Будем считать стационарное вращение цилиндра с жидкостью устойчивым в малом, если все λ имеют отрицательные действительные части, и неустойчивым, если хотя бы одно λ имеет положительную действительную часть. Если характеристические числа λ непрерывно зависят от параметров задачи, то изменение степени неустойчивости в системе происходит при появлении мнимого $\lambda = i\omega$. При этом наряду с решением уравнений (1)–(4)

$$\left(x^* \mathbf{e}_x + y^* \mathbf{e}_y, v_x^*(x, y) \mathbf{e}_x + v_y^*(x, y) \mathbf{e}_y, p^*(x, y) \right) e^{i\omega t}.$$

В силу свойства симметрии б) существует также решение

$$\left(-y^* \mathbf{e}_x + x^* \mathbf{e}_y, -v_y^*(y, -x) \mathbf{e}_x + v_x^*(y, -x) \mathbf{e}_y, p^*(y, -x) \right) e^{i\omega t},$$

где x^* , y^* — комплексные амплитуды компонент радиуса-вектора точки пересечения оси цилиндра с плоскостью Oxy ; v_x^* , v_y^* , p^* — комплексные амплитуды отклонений компонент поля скоростей и давления жидкости от соответствующих величин при стационарном квазитвердом вращении; e_x , e_y — орты координатных осей. Умножая первое из этих решений на i и складывая со вторым, получим в силу линейности уравнений (1)–(4) частное решение, описывающее так называемую круговую прецессию цилиндра с жидкостью, т.е. такое движение, в котором точка пересечения оси цилиндра с плоскостью Oxy описывает окружность, а отклонения гидродинамических элементов от стационарных значений изменяются во времени $\sim e^{i\omega t}$. Обратно: если при некоторых значениях параметров уравнения (1)–(4) допускают решение типа круговой прецессии, то существует мнимое характеристическое число λ . Таким образом, значения параметров, при которых происходит изменение степени неустойчивости в системе (существует хотя бы одно мнимое характеристическое число), могут быть найдены из условия существования круговой прецессии цилиндра с жидкостью. Приведенное соображение определяет ход решения задачи в данной статье. Именно сначала рассматривается гидродинамическая задача о движении вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей вращающийся цилиндр, совершающий круговую прецессию. Затем вычисляется сила, с которой жидкость действует на вращающийся цилиндр в случае круговой прецессии. Далее, на основании полученных выражений для гидродинамической силы из уравнений поступательного движения цилиндра (1) находятся условия, при которых возможна круговая прецессия. Эти условия в соответствии со сказанным выше определяют границы областей с различной степенью неустойчивости в пространстве параметров задачи.

4. Гидродинамическая задача

Пусть бесконечно длинный круговой цилиндр с внутренним радиусом ε вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0 и прецессирует с частотой ω таким образом, что его ось описывает цилиндрическую поверхность радиуса ε (рис. 1). Абсолютная угловая скорость цилиндра Ω складывается из угловой скорости собственного вращения цилиндра ω_0 и скорости прецессии ω ($\Omega = \omega_0 + \omega$).

Выберем неинерциальную систему отсчета $O\xi\eta$ (см. рис. 1), жестко связанную с так называемой линией центров, проходящей через центр прецессии O_1 и центр сечения цилиндра O . Эта система поступательно движется по окружности радиуса ε со скоростью $\omega\varepsilon$ и вращается вокруг оси цилиндра с угловой скоростью ω . В пространстве отсчета $O\xi\eta$ введем полярную систему координат r , φ с центром в точке O . В этой системе компоненты поля сил инерции, действующих в пространстве отсчета $O\xi\eta$ на частицу единичной массы, имеют вид:

$$(5) \quad \begin{aligned} f_r &= \omega^2 r + 2\omega v + \omega^2 \varepsilon \cos \phi, \\ f_\phi &= -2\omega u - \omega^2 \varepsilon \sin \phi. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу о плоском движении вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей вращающийся цилиндр, в случае круговой прецес-

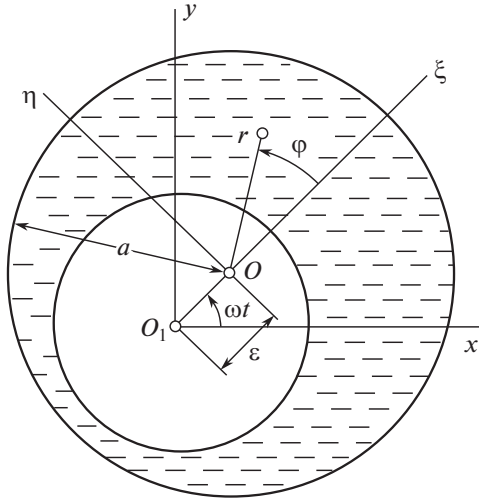


Рис. 1. Неинерциальная система отсчета $O\xi\eta$.

сии с малым радиусом ε , при которой отклонения гидродинамических элементов от стационарных значений малы и в неподвижной системе отсчета изменяются во времени $\sim e^{i\omega t}$. Используя закон изменения энергии вязкой жидкости, можно показать, что в случае круговой прецессии с малым радиусом движение жидкости относительно системы отсчета $O\xi\eta$ установившееся, т.е. не зависит от времени. Уравнения установившегося движения жидкости относительно системы $O\xi\eta$ и граничные условия, линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси цилиндра

$$(6) \quad u = 0, \quad v = \omega_0 r$$

записываются в виде:

$$(7) \quad \begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial u'}{\partial \varphi} &= \Omega^2 r + \omega^2 \varepsilon \cos \varphi + 2\Omega v' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \nu \left(\Delta u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \varphi} \right), \\ \omega_0 \frac{\partial v'}{\partial \varphi} &= -\omega^2 \varepsilon \sin \varphi - 2\Omega u' - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left(\Delta v' - \frac{v'}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

$$(8) \quad \frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \varphi} = 0,$$

$$u' = 0, \quad v' = 0, \quad r = a,$$

$$-p - \rho \Omega^2 r \eta + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial r} = -p_0,$$

$$(9) \quad i \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \varphi} - \frac{v'}{r} = 0,$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = u'; \quad r = a - h.$$

Здесь u' , v' — малые отклонения компонент поля скоростей от (6), p — давление, ρ — плотность, ν, μ — кинематическая и динамическая вязкость жидкости, $r = a - h + \eta(\varphi)$ — уравнение свободной поверхности жидкости, p_0 — давление на свободной поверхности. Введем потенциалы Ламба θ , ψ и функцию χ

$$u' = \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi},$$

$$v' = \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$\chi = \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 + \omega^2 \varepsilon r \cos \varphi - 2\Omega \psi + \text{const}$$

и запишем систему (7) в виде:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} F + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} G = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} F - \frac{\partial}{\partial r} G = 0, \quad \Delta \theta = 0, \\ F = \chi - \frac{p}{\rho} - \omega_0 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \quad G = \nu \Delta \psi + 2\Omega \theta - \omega_0 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Неоднозначностью в выборе потенциалов Ламба (калибровкой потенциалов) можно распорядиться так, что (10) сведется к системе:

$$(11) \quad F = 0, \quad G = 0, \quad \Delta \theta = 0.$$

Граничные условия (8) и (9) после введения потенциалов Ламба принимают вид:

$$(12) \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad r = a,$$

$$2\nu \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \varphi} \right) - \frac{p}{\rho} - \Omega^2 r \eta = -\frac{p_0}{\rho},$$

$$(13) \quad r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - r \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0,$$

$$\omega_0 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad r = a - h.$$

Уравнения (11) с граничными условиями (12), (13) содержат лишь следующие размерные параметры: ω_0 , Ω , ν , a , $a - h$, ε (параметр p_0 несуществен, так как жидкость несжимаема). В силу линейности сформулированной краевой задачи параметр ε войдет в решение в первой степени. Этим параметром определяется лишь масштаб скорости движения жидкости, вызванного прецессией цилиндра. Оставшиеся пять параметров образуют всего три незави-

симые безразмерные комбинации:

$$(14) \quad \frac{\omega}{\Omega}, \quad \frac{a-h}{a}, \quad \frac{\nu}{\Omega a^2},$$

которые и будут критериями подобия в рассматриваемой задаче.

5. Вычисление гидродинамической силы

Перейдем к решению краевой задачи (11)–(13). Будем искать решение системы (11) в виде:

$$\theta = 2\text{Re} \left[\Theta(r)e^{i\phi} \right], \quad \psi = 2\text{Re} \left[\Psi(r)e^{i\phi} \right], \quad i^2 = -1.$$

Из третьего уравнения системы (11) найдем

$$(15) \quad \theta = 2\text{Re} \left[\left(c_1 r + \frac{c_2}{r} \right) e^{i\phi} \right],$$

после чего второе уравнение сведется к виду

$$(16) \quad \frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} - \left(\frac{i\omega_0}{\nu} + \frac{1}{r^2} \right) \Psi = -\frac{2\Omega}{\nu} \left(c_1 r + \frac{c_2}{r} \right).$$

Интегрируя (16), получим

$$(17) \quad \psi = 2\text{Re} \left(\left[-\frac{2\Omega}{\omega_0} i \left(c_1 r + \frac{c_2}{r} \right) + c_3 L_1(kr) + c_4 M_1(kr) \right] e^{i\phi} \right),$$

$$L_1 = e^{-\kappa a} H_1^{(2)}(kr), \quad M_1 = e^{\kappa b} H_1^{(1)}(kr),$$

$$k = \kappa \left(-\frac{\omega_0}{|\omega_0|} + i \right), \quad \kappa = \sqrt{\frac{|\omega_0|}{2\nu}}, \quad b = a - h.$$

где $H_n^{(1,2)}(kr)$ — функции Ганкеля.

Выражение для давления найдем из первого уравнения (11):

$$(18) \quad \frac{p}{\rho} = 2\text{Re} \left(\left[-i\omega_0 \left(c_1 r + \frac{c_2}{r} \right) + \frac{\omega^2 \varepsilon r}{2} \right] e^{i\phi} \right) - 2\Omega\psi + \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C.$$

Радиальное отклонение свободной поверхности жидкости $\eta(\phi)$ ищем в виде

$$(19) \quad \eta(\phi) = 2\text{Re} (\eta^* e^{i\phi}).$$

Подставляя (15), (17)–(19) в граничные условия (12), (13), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных

c_1, c_2, c_3, c_4 , выражения для η^* и аддитивной постоянной в (18):

$$\begin{aligned}
 & \frac{3-\tau}{1-\tau}c_1 + \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{c_2}{a^2} + \frac{i}{a}Z_1(ka) = 0, \\
 & \frac{3-\tau}{1-\tau}ic_1 - \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{ic_2}{a^2} - kZ_0(ka) + \frac{1}{a}Z_1(ka) = 0, \\
 (20) \quad & \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{4i}{b^3}c_2 + \frac{2k}{b}Z_0(kb) + \left(k^2 - \frac{4}{b^2}\right)Z_1(kb) = 0, \\
 & -\frac{\tau^2(3-\tau)}{(1-\tau)^2}ibc_1 + \frac{i}{b}(1+\tau)\left[\frac{2-4\tau+\tau^2}{(1-\tau)^2} - \frac{4}{k^2b^2}\right]c_2 - \\
 & -2\frac{1-\tau}{kb}Z_0(kb) + \left(\frac{2\tau-1}{1-\tau} + 4\frac{1-\tau}{k^2b^2}\right)Z_1(kb) = -\frac{1}{2}\tau^2\Omega\epsilon b, \\
 & i\omega_0\eta^* = \frac{3-\tau}{1-\tau}c_1 + \frac{1+\tau}{1-\tau}\frac{c_2}{b^2} + \frac{i}{b}Z_1(kb), \quad C = \frac{p_0}{\rho} - \frac{\Omega^2b^2}{2},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \tau = \frac{\omega}{\Omega}, \quad Z_n(kr) = c_3L_n(kr) + c_4M_n(kr), \\
 & L_n(kr) = e^{-\kappa a}H_n^{(2)}(kr), \quad M_n(kr) = e^{\kappa b}H_n^{(1)}(kr).
 \end{aligned}$$

При выводе (20) были использованы известные формулы для производных от цилиндрических функций [5]. В ряде интересных случаев значение kr ($b \leq r \leq a$) очень велико, что позволяет также использовать в (20) асимптотические разложения для этих функций. Применение перенормированных функций Ганкеля $L_n(kr)$ и $M_n(kr)$ оказывается при этом очень удобным. После того как найдены постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 , краевая задача (11)–(13), в принципе, решена. Обратимся к вычислению силы, с которой жидкость действует на цилиндр. Интегрируя напряжения, приложенные к внутренней поверхности цилиндра, получим для компонент силы, действующей на единицу его длины:

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & F_\xi = 2\pi a \rho \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2}\omega^2\epsilon a + 2i(\Omega + \omega)\frac{c_2}{a} \right], \\
 & F_\eta = -4\pi\rho(\Omega + \omega)\operatorname{Re} c_2.
 \end{aligned}$$

В случае когда частота прецессии $\omega \rightarrow \Omega$, можно сравнительно просто выразить c_2 из (20), воспользовавшись асимптотическими разложениями для цилиндрических функций при малых значениях аргумента [5], и записать (22) в виде:

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & F_\xi = \pi\rho\Omega^2a^2\epsilon + O(\omega_0), \\
 & F_\eta = \frac{8\pi\epsilon\mu\omega_0(\delta^4 + 1)}{\delta^4 - 1 - 2(\delta^4 + 1)\ln\delta} + O\left(\omega_0^2\ln|ka|\right), \quad \delta = \frac{b}{a}.
 \end{aligned}$$

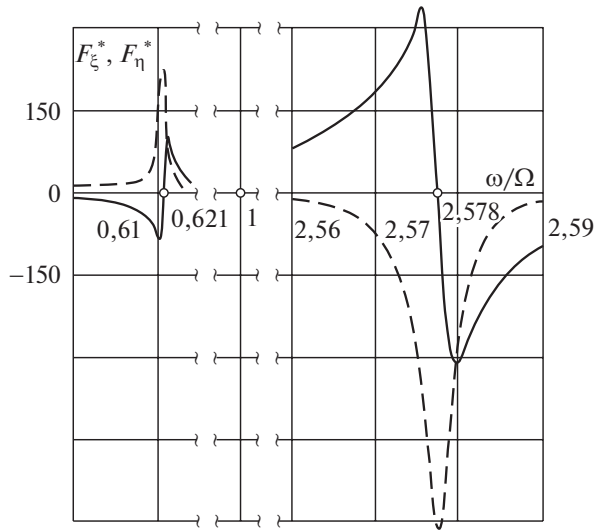


Рис. 2. Зависимости безразмерных компонент гидродинамической силы от параметра τ .

Из выражений (23) видно, что в окрестности резонанса $\omega = \Omega$ проекция силы на линию центров $F_\xi > 0$, т.е. гидродинамическая сила стремится увести ось цилиндра от оси прецессии (на рис. 1 точка пересечения оси прецессии плоскостью рисунка — центр прецессии O_1). Далее, компонента силы F_η может быть отлична от нуля только в случае вязкой жидкости. Знаменатель в выражении для F_η при $0 < \delta < 1$ положителен, следовательно, при $\omega < \Omega$ имеем $F_\eta > 0$, т.е. гидродинамическая сила стремится увеличить угловую скорость прецессии цилиндра, а при $\omega > \Omega$ получаем, что $F_\eta < 0$ и эффект действия силы обратный. Эти выводы согласуются с так называемой концепцией вращающегося трения [6], распространенной в прикладных исследованиях. Отметим также, что момент гидродинамической силы (23) относительно оси цилиндра равен нулю. На рис. 2 изображены в качестве примера зависимости безразмерных компонент гидродинамической силы $F_{\xi*} = F_\xi/F^0$ (сплошные линии) и $F_{\eta*} = F_\eta/F^0$ (штриховые линии) от ω/Ω , полученные в соответствии с (20), (22) в случае $\delta = 0,5$; $\nu/(\Omega a^2) = 10^{-5}$. Масштаб силы $F^0 = m\omega^2\varepsilon$, где $m = \pi\rho(a^2 - b^2)$ — масса жидкости, приходящаяся на единицу длины цилиндра. Зависимость силы от отношения частот имеет четко выраженный резонансный характер, что обусловлено резонансным возбуждением волн, распространяющихся по свободной поверхности вращающейся жидкости, заполняющей цилиндр.

Сравнение результатов вычисления гидродинамической силы с силой, полученной в рамках консервативной модели ($\mu = 0$), показывает хорошее количественное совпадение ξ -компонент вне окрестностей резонансных значений ω/Ω . Вместе с этим в окрестностях резонансов, в отличие от того, что дает консервативная модель, ξ -компонента гидродинамической силы конечна и сравнима по величине с η -компонентой. Важно также отметить, что в окрестностях резонансов, даже при весьма малых значениях параметра $\nu/(\Omega a^2)$ вол-

новое движение, вызванное прецессией цилиндра, всюду в жидкости сильно отличается от того движения, которое дает консервативная модель.

6. Построение области устойчивости стационарного вращения в плоскости параметров закрепления оси цилиндра

Подставим вычисленную гидродинамическую силу, действующую на единицу длины цилиндра, в уравнения движения цилиндра, положив в правых частях (1):

$$\begin{aligned} F_x &= F_\xi \cos(\omega t) - F_\eta \sin(\omega t), \\ F_y &= F_\xi \sin(\omega t) + F_\eta \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Положив затем в (1) $x_0 = \varepsilon \cos \omega t$; $y_0 = \varepsilon \sin \omega t$, что соответствует круговой прецессии с частотой ω и радиусом ε , получим соотношения, связывающие ω и параметры задачи в случае круговой прецессии:

$$(24) \quad K^* - \frac{M}{m} \tau^2 = F_\xi^* \tau^2, \quad H^* \tau = F_\eta^* \tau^2, \quad K^* = \frac{K}{m\Omega^2}, \quad H^* = \frac{H}{m\Omega},$$

где K^* , H^* — соответственно, безразмерные коэффициенты жесткости и демпфирования закрепления оси цилиндра. Безразмерные компоненты силы F_ξ^* , F_η^* зависят только от параметров (14). При фиксированных значениях этих параметров соотношения (24) задают в плоскости H^* , K^* кривую, точкам которой соответствуют такие значения параметров, при которых возможна круговая прецессия цилиндра. Эта кривая в соответствии со сделанными выше замечаниями разбивает плоскость параметров закрепления оси цилиндра H^* , K^* на области с различной степенью неустойчивости. Следуя [2], будем называть ее D-кривой. На рис. 3 приведено разбиение плоскости H^* , K^* , осуществляемое D-кривой, в случае $\delta = 0,9$, $\nu/(\Omega a^2) = 10^{-6}$,

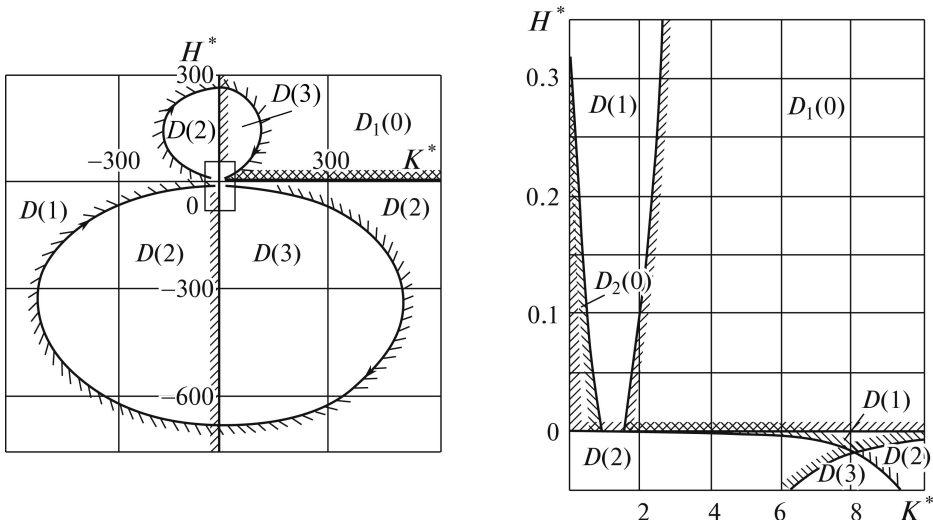


Рис. 3. D-кривая.

$M/m = 1,68$. Стрелкой вдоль D-кривой указано направление возрастания параметра τ . D-кривая на рис. 3 образована регулярной ветвью, вдоль которой параметр τ изменяется в интервале $(-\infty, +\infty)$, и каждому значению параметра τ соответствует одна точка кривой и особой прямой $K^* = 0$, соответствующей $\tau = 0$. Наличие особой прямой вызвано тем, что при $\tau = 0$ компоненты гидродинамической силы обращаются в нуль.

D-кривую принято штриховать так, что переход в плоскости параметров со штрихованной стороны кривой на нештрихованную соответствует увеличению степени неустойчивости. Штриховка может переходить с одной стороны D-кривой на другую в тех точках, где нарушается однозначность отображения мнимой оси плоскости λ в точки D-кривой [2]. В рассматриваемой здесь задаче штриховка D-кривой меняется в точке регулярной ветви, соответствующей значению $\tau = 0$, поскольку при этом значении τ нарушается однозначность вышеназванного отображения (точке $\tau = 0$ на мнимой оси плоскости λ соответствует особая прямая в плоскости параметров закрепления оси цилиндра).

Область устойчивости всегда должна содержать точку, соответствующую достаточно большим положительным значениям коэффициента демпфирования H^* . Исходя из этого, на рис. 3 указана область с нулевой степенью неустойчивости $D_1(0)$. Указаны также области $D(n)$ со степенью неустойчивости n . Интересно отметить, что наряду с $D_1(0)$ существует еще одна область устойчивости — $D_2(0)$ — в окрестности нулевых значений H^* , K^* (разбиение этой окрестности приведено в правой части рис. 3). Отметим также, что при $H^* = 0$ точке на границе области устойчивости соответствует $\tau = 1$, что согласуется с известным результатом, установленным в [6] путем феноменологического введения сил внутреннего трения во вращающемся роторе.

7. Заключение

Предложенный метод исследования устойчивости был успешно применен при решении ряда задач об устойчивости вращения роторных систем, содержащих жидкость [7–12]. При этом одни задачи ставились впервые, а решение других было, по сути дела, получено заново. Исследование поведения режима стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, вблизи границы области устойчивости в пространстве параметров проведено в [13] впервые. Показано, что при переходе через эту границу происходит бифуркация Андронова–Хопфа — от режима стационарного вращения рождается периодическое движение типа круговой прецессии. В предложенном методе, в отличие от традиционного метода D-разбиения, знание характеристического уравнения вообще не требуется. Более того, при исследовании устойчивости достаточно ограничиться рассмотрением лишь возмущений специального вида — типа круговой прецессии. Последнее связано с учетом свойств симметрии уравнений движения рассматриваемой системы.

Выражаю благодарность Д.Н. Дерендяеву за помощь в оформлении статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
2. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.
3. *Дерендяев Н.В., Сандалов В.М.* Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 578–586.
4. *Дерендяев Н.В., Сеняткин В.А.* Условия устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного слоисто-неоднородной вязкой несжимаемой жидкостью // ПМТФ. 1984. № 1. С. 34–44.
5. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
6. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
7. *Дерендяев Н.В., Сандалов В.М.* Устойчивость стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Машиноведение. 1986. № 1. С. 19–26.
8. *Сандалов В.М.* Динамическая неустойчивость турбомашин, обусловленная радиальными зазорами в подшипниках скольжения и жидкостным наполнением полостей роторов // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Горький, 1983.
9. *Сеняткин В.А.* Неустойчивость роторных систем, обусловленная содержащейся в них вязкой жидкостью // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Горький, 1985.
10. *Солдатов И.Н.* Устойчивость и автоколебания роторных систем, содержащих проводящую вязкую жидкость в магнитном поле // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 1994.
11. *Derendyaev N.V., Vostrukhov A.V., Soldatov I.N.* Stability and Andronov-Hopf Bifurcation of Steady-State Motion of Rotor System Partly Filled with Liquid: Continuous and Discrete Models // ASME. J. Appl. Mech. 2006. V. 73. No. 4. P. 580–589.
12. *Дерендяев Н.В.* Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. Нижний Новгород.: Изд-во Нижегород. гос ун-та, 2014.
13. *Дерендяев Н.В., Сандалов В.М., Солдатов И.Н.* О рождении периодического движения в задаче об устойчивости стационарного вращения вертикального ротора на гидродинамических подшипниках // Машиноведение. 1988. № 4. С. 98–103.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 16.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020