

© 2020 г. Д.С. ХОРЬКИН (dmitryhorkin@gmail.com),

М.И. БОЛОТОВ (maksim.bolotov@itmm.unn.ru)

(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),

Л.А. СМІРНОВ, канд. физ.-мат. наук (smirnov_lev@appl.sci-nnov.ru)

(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского;

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород),

Г.В. ОСИПОВ, д-р физ.-мат. наук (osipov@vmk.unn.ru)

(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

ФАЗОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СВЯЗАННЫХ РОТАТОРОВ¹

Исследована динамика вращательных движений в системе двух несимметрично связанных систем маятникового типа. Изучены механизмы потери устойчивости синфазного вращательного движения. Проанализирован сценарий возникновения хаотической динамики в зависимости от значений управляющих параметров.

Ключевые слова: ротатор, фазовое управление, синхронизация, вращательный режим, хаос.

DOI: 10.31857/S0005231020080127

1. Введение

Исследование коллективного поведения в сетях связанных элементов является одной из привлекательных и важных областей нелинейной динамики, актуальных с точки зрения теории и приложений [1–4]. Известно, что даже при слабой связи элементы ансамблей могут стремиться к достижению общего ритма функционирования, т.е. к синхронизации [1]. Достаточно широкий класс объектов, рассматриваемых в физике, радиотехнике, электронике и других областях естествознания, могут быть описаны с помощью моделей систем связанных маятников [5]. Несмотря на простоту этих моделей, они используются не только для описания механических объектов [6], но и для разнообразных процессов в молекулярной биологии [7–9], полупроводниковых структурах [10] и т.д. Данная модель также может рассматриваться как базовая при теоретических исследованиях связанных джозефсоновских контактов [11–13], а также систем фазовой синхронизации [3, 4, 14, 15].

2. Описание модели

В данной работе рассмотрено поведение ансамбля двух парциальных систем фазовой синхронизации, соединенных параллельно через сигналы фазовых рассогласований [3, 4]. Структурная схема ансамбля представлена на рис. 1. Математическую модель системы двух таких объектов можно представить в виде системы уравнений маятникового типа:

$$(1) \quad \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \lambda \dot{\varphi}_1 + \sin \varphi_1 &= \gamma + \kappa_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 + \lambda \dot{\varphi}_2 + \sin \varphi_2 &= \gamma + \kappa_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 19-12-00367.

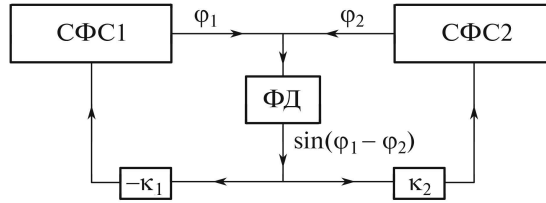


Рис. 1. Структурная схема пары систем фазовой синхронизации (СФС1 и СФС2), связанных параллельно через сигналы фазовых рассогласований (ФД — фазовый детектор).

Здесь λ — коэффициент затухания сигнала, γ — отношение начальной к максимальной расстройке частот, κ_1, κ_2 — параметры усиления сигнала, характеризующие силу связи между системами.

Ансамбль двух симметрично связанных идентичных маятников был рассмотрен в [16]. Динамика неидентичных маятников (с различными величинами γ) исследована в [17]. Заметим, что с помощью системы (1) возможно описание поведения ансамбля глобально связанных ротаторов, в котором образуются два кластера с различным числом взаимно синхронных элементов (N_1 и N_2) [18]. В силу различных N_1 и N_2 связь между кластерами естественным образом является асимметричной.

Исследуем зависимость поведения системы (1) от степени асимметричности связи. Для этого представим систему (1) в виде

$$(2) \quad \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \lambda \dot{\varphi}_1 + \sin \varphi_1 &= \gamma + K \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 + \lambda \dot{\varphi}_2 + \sin \varphi_2 &= \gamma + \beta K \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

где теперь K — параметр связи, β — параметр, характеризующий степень асимметричности связи. Такой вид связи является дополнительным средством управления динамическими режимами, в том числе синхронными режимами в различного рода технических устройствах, например в системах фазовой синхронизации [3, 4]. Как будет показано ниже, при определенном выборе управляющих параметров в такой системе могут устанавливаться как синфазные, так и несинфазные вращательные режимы.

3. Синфазный режим и его устойчивость

В системе (2) существует синфазное периодическое движение: координаты совпадают друг с другом, т.е. $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \phi_s(t)$. При этом $\phi_s(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\phi}_s + \lambda \dot{\phi}_s + \sin \phi_s = \gamma.$$

Определим, при каких значениях управляющих параметров синфазный вращательный режим системы (2) теряет устойчивость. Для этого линеаризуем систему (2) относительно синфазного вращательного движения ϕ_s . Представим фазы ротаторов в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \phi_s + \delta\varphi_1, \\ \varphi_2 &= \phi_s + \delta\varphi_2, \end{aligned}$$

получим систему уравнений в вариациях

$$\begin{aligned}\delta\ddot{\varphi}_1 + \lambda\delta\dot{\varphi}_1 + \cos(\phi_s)\delta\varphi_1 &= K(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1), \\ \delta\ddot{\varphi}_2 + \lambda\delta\dot{\varphi}_2 + \cos(\phi_s)\delta\varphi_2 &= \beta K(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2).\end{aligned}$$

Введем новую величину $\eta = \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1$, представляющую собой расстройку приращений фаз в окрестности ϕ_s , и получим относительно η дифференциальное уравнение

$$(3) \quad \ddot{\eta} + \lambda\dot{\eta} + (\cos\phi_s + (1 + \beta)K)\eta = 0.$$

Подробный анализ уравнения (3) представлен в [16, 19], где показано, что существует диапазон значений параметра K ($K_1 < K < K_2$), в котором имеет место неустойчивость синфазного вращательного движения. Значения K_1, K_2 в рассматриваемом случае определяются выражением

$$(4) \quad K_{1,2} = \frac{1}{1 + \beta} \left[\frac{\gamma^2}{\lambda^2} \pm 2\sqrt{1 - \gamma^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \right] + O\left(\frac{\lambda^4}{\gamma^4}\right).$$

Внутри интервала $\Delta K = K_2 - K_1$ возможно существование асинхронных периодических (разного периода) и хаотических движений. Из (4) следует, что увеличение асимметрии связи приводит к уменьшению области неустойчивости синфазного режима. При этом интервал неустойчивости ΔK смещается в область малых коэффициентов связи K .

4. Поиск регулярных вращательных режимов

Приведем описание численных методов, используемых для поиска регулярных вращательных движений, существующих в базовой модели (2), и определения их линейной устойчивости. Для начала отметим, что излагаемая ниже процедура является фактически модификацией схемы нахождения замкнутых предельных циклов в нелинейных динамических системах и использует методы, изложенные в [20]. Введем обозначение $\{\varphi_n(t)\}$ — здесь и далее вектор-строка, где $n = 1, 2$. Основная идея этого метода заключается в следующем. Любой представитель $\{\varphi_n(t)\}$, искомого класса траекторий характеризуется прежде всего своим периодом T (который, неизвестен и должен быть найден в конце вычислительной процедуры) и числом k , определяющим то, сколько раз каждая составляющая из набора циклических координат $\{\varphi_n(t)\}$ изменится на 2π за промежуток времени T . Основываясь на этом, рассмотрим отображение $\{\varphi_n(0), \dot{\varphi}_n(0)\} \rightarrow \{\varphi_n(T), \dot{\varphi}_n(T)\}$ и сконструируем следующий вектор:

$$p(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}) = \{\varphi_n(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}) - \varphi_{0n} - 2\pi k, \dot{\varphi}_n(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}) - \dot{\varphi}_{0n}\},$$

где $\{\varphi_n(t), \dot{\varphi}_n(t)\}$ — решение системы (2) с начальными условиями $\{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}$, т.е. $\{\varphi_n(0), \dot{\varphi}_n(0)\} = \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}$.

Используя определенную подобным путем многомерную функцию $p(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\})$, можно сформулировать условие, дающее возможность найти $\{\varphi_n(t)\}$ и T . Оно состоит в равенстве нулю всех компонент вектора $p(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\})$. В итоге приходим к тому, что необходимо подобрать такие

значения T и $\{\varphi_n(t)\}$, которые позволят удовлетворить требованию

$$(5) \quad p(T, \{\varphi_{0n}, \dot{\varphi}_{0n}\}) = 0.$$

Другими словами можно сказать, что задача теперь состоит в поиске неподвижной точки отображения $\{\varphi_n(0), \dot{\varphi}_n(0)\} \rightarrow \{\varphi_n(T), \dot{\varphi}_n(T)\}$ с учетом цикличности $\{\varphi_n(t)\}$ [20]. В силу инвариантности системы (2) относительно трансляции во времени одну из величин $\{\varphi_{0n}\}$ можно приравнять нулю без потери общности и сделать тем самым количество неизвестных и число соотношений в (3) одинаковым. Для отыскания корней совокупности уравнений (3) целесообразно использовать метод Ньютона, так как он обладает высокой эффективностью. Продолжая эти решения по параметру β в интервале неустойчивости синфазного режима, можно проследить все семейство нетривиальных периодических движений и проанализировать их бифуркации.

Для изучения линейной устойчивости произвольных (2π -, 4π -, 8π - и т.д.) периодических вращательных движений (с учетом цикличности) динамической системы (2) введем малые возмущения $\delta\varphi_n(t)$: $\{\varphi_n(t) = \phi_n(t) + \delta\varphi_n(t)\}$, где $\phi_n(t)$ — рассматриваемое периодическое движение. В результате процедуры линеаризации получим следующие уравнения для возмущений $\{\delta\varphi_n(t)\}$:

$$\begin{aligned} \delta\ddot{\varphi}_1 + \lambda\delta\dot{\varphi}_1 + \cos(\phi_1)\delta\varphi_1 &= K \cos(\phi_2 - \phi_1)(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1), \\ \delta\ddot{\varphi}_2 + \lambda\delta\dot{\varphi}_2 + \cos(\phi_2)\delta\varphi_2 &= \beta K \cos(\phi_1 - \phi_2)(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2). \end{aligned}$$

Дальнейший анализ может быть проведен в рамках теории Флоке. Устойчивость рассматриваемых движений определяется спектром собственных значений матрицы монодромии (оператора Флоке) $M(T)$, которая задается выражением

$$\{\delta\varphi_n(T), \delta\dot{\varphi}_n(T)\}^T = M \{\delta\varphi_n(0), \delta\dot{\varphi}_n(0)\}^T.$$

Собственные значения μ_m (здесь и далее $m = \overline{1, 4}$) матрицы $M(T)$ являются мультипликаторами Флоке, которые связаны с показателями Флоке q_m периодического решения $\{\phi_n(t)\}$ соотношениями $m = \exp(iq_m)$. Таким образом, для определения устойчивости каждого обсуждаемого движения достаточно вычислить μ_m . Если $|\mu_m| \leq 1$ для всех m , тогда вращательный режим линейно устойчив. Стоит отметить, что одно из собственных значений μ_m всегда должно быть строго равным единице, так как $\{\dot{\varphi}_n(t)\}$ принадлежит семейству периодических движений (с учетом цикличности). Следовательно, появляется дополнительная возможность проверки того, что найденное с помощью описанной выше процедуры решение $\{\phi_n(t)\}$ принадлежит обсуждаемому классу предельных вращений. Если хотя бы один из мультипликаторов Флоке μ_m расположен на комплексной плоскости за пределами единичной окружности, то вращательный режим является линейно неустойчивым.

5. Несинфазные регулярные и хаотические вращательные режимы

В результате численного моделирования в области параметров, где нет устойчивости синфазного вращательного движения (см. выражение (4)), были исследованы устанавливающиеся вращательные движения и их бифуркации.

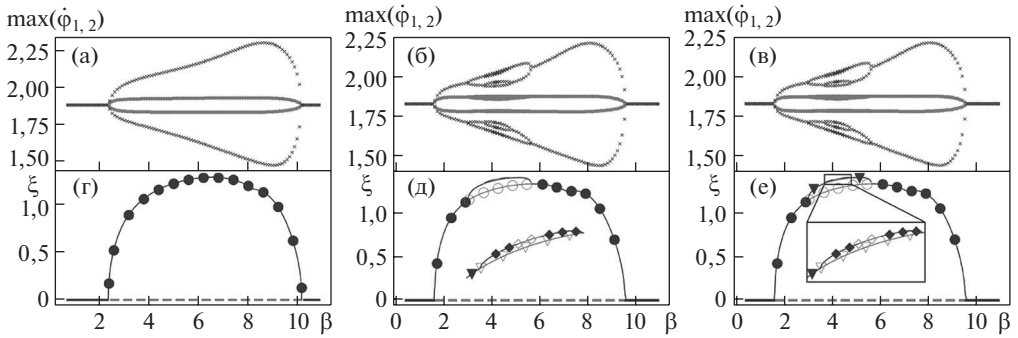


Рис. 2. *a, б, в* — Локальные максимумы $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. *г, д, е* — Бифуркационные диаграммы вращательных режимов.

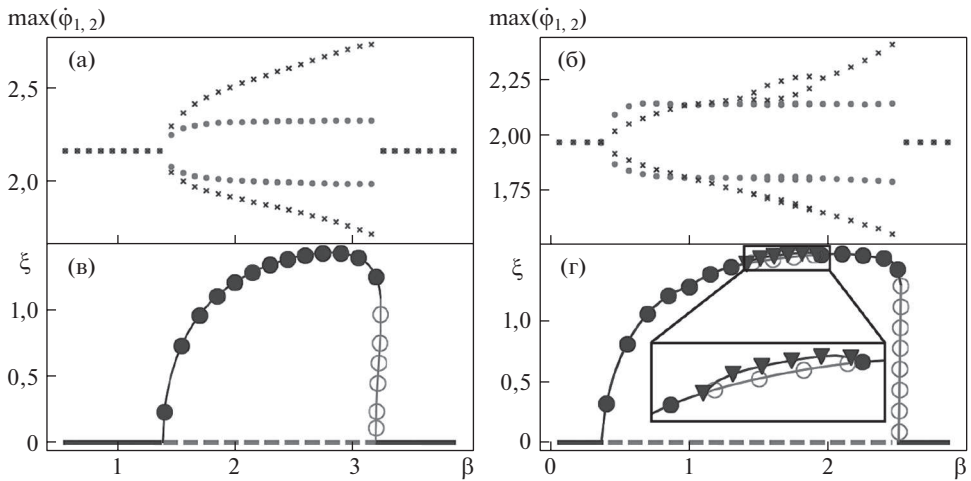


Рис. 3. *a, б* — Локальные максимумы $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. *в, г* — Бифуркационные диаграммы вращательных режимов.

Для того чтобы характеризовать степень отклонения от синфазного режима, введем величину $\xi = \max_{0 < t < T} |\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)|$, где T — период вращательных движений. Здесь и далее параметр внешнего воздействия выберем равным $\gamma = 0,97$.

На рис. 2, *a–2, в* и рис. 3, *a, 3, б* изображены локальные максимумы мгновенных частот осцилляторов $\dot{\varphi}_1(t)$ и $\dot{\varphi}_2(t)$. Круглыми маркерами отмечены значения $\max(\dot{\varphi}_1(t))$, крестообразными маркерами отмечены $\max(\dot{\varphi}_2(t))$. На рис. 2, *г–2, е* и рис. 3, *в, 3, г* изображены зависимости параметра ξ от параметра β . Закрашенные маркеры соответствуют устойчивым вращательным движениям, полые маркеры — неустойчивым. При этом круговыми, треугольными и четырехугольными маркерами показаны 4π -, 8π -, 16π -периодические вращательные режимы соответственно. Линия без маркеров соответствует синфазному 2π -периодическому вращательному режиму, сплошная — устойчивому, пунктирная — неустойчивому. Для $K = 0,06$, $\lambda = 0,77$ (рис. 2, *a, 2, г*) при увеличении параметра β синфазное периодическое вращательное движение

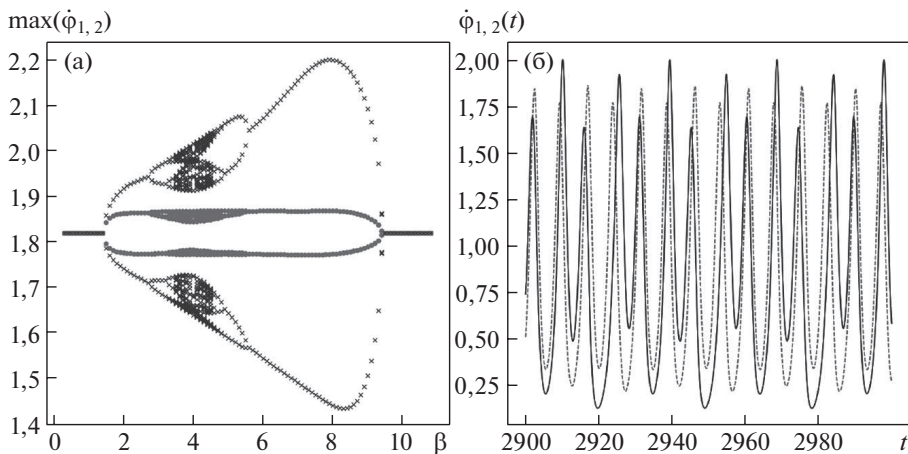


Рис. 4. *a* — Локальные максимумы $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. *б* — Режим динамического хаоса при $\beta = 3,977$.

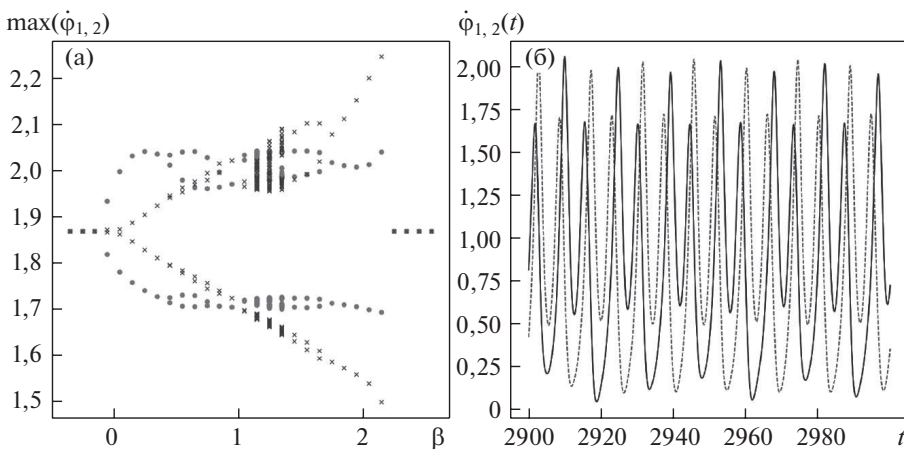


Рис. 5. *a* — Локальные максимумы $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. *б* — Режим динамического хаоса при $\beta = 1,25$.

ние претерпевает бифуркацию удвоения периода при $\beta \approx 2,3$. При этом из устойчивого синфазного 2π -периодического движения рождается устойчивое 4π -периодическое движение, а 2π -периодическое движение теряет свою устойчивость. Затем при $\beta \approx 10,2$ в результате обратной бифуркации удвоения устойчивое 4π -периодическое движение сливается с неустойчивым синфазным 2π -периодическим движением, синфазное вращательное движение вновь становится устойчивым. При $\lambda = 0,8$ (рис. 2,б, 2,д) теперь уже несинфазное 4π -периодическое движение претерпевает бифуркацию удвоения периода, при этом рождается 8π -периодическое вращательное движение, а 4π -периодическое движение теряет свою устойчивость. Далее при большем значении параметра диссипации $\lambda = 0,81$ (рис. 2,в, 2,е) при увеличении параметра β система претерпевает несколько бифуркаций удвоения периода, в результате которых увеличивается количество неустойчивых вращательных движе-

ний. На рис. 4, 5 изображены локальные максимумы мгновенных частот $\dot{\varphi}_1(t)$, $\dot{\varphi}_2(t)$. Круглыми (крестообразными) маркерами отмечены значения $\max(\dot{\varphi}_1(t))$ ($\max(\dot{\varphi}_2(t))$) (рис. 4,а, 5,а) и временные реализации $\dot{\varphi}_1(t)$, $\dot{\varphi}_2(t)$ (рис. 4,б, 5,б). Пунктирная линия — $\dot{\varphi}_1(t)$, сплошная линия — $\dot{\varphi}_2(t)$. При $\lambda = 0,816$ (рис. 4) наблюдаем, что в результате каскада бифуркаций удвоения периода появляется диапазон значений параметра β ($3,53 < \beta < 4,53$), внутри которого в системе наблюдается режим динамического хаоса [21]. Теперь рассмотрим случай, когда $K = 0,21$ и $\lambda = 0,6$ (рис. 3,а, 3,в). В результате бифуркации удвоения периода синфазное вращательное движение здесь также теряет устойчивость при $\beta \approx 1,39$. При этом рождается устойчивое 4π -периодическое движение, отличие которого от синфазного режима возрастает с увеличением параметра β . Однако при $\beta > 3,22$ система (2) вновь возвращается к той ситуации, когда устанавливается состояние $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. На бифуркационной диаграмме (рис. 3,в) видно, что такое изменение в поведении модели (2) происходит резким образом при переходе через точку с $\beta = 3,22$. Данный эффект жесткого исчезновения обусловлен существованием неустойчивого вращательного движения в интервале $3,199 < \beta < 3,24$.

Чтобы проанализировать происходящие смены режимов, рассмотрим зависимость параметра ξ от параметра β (рис. 3,а, 3,в). Видно, что кроме устойчивых периодических движений, существует также неустойчивое несинфазное 4π -периодическое движение, которое рождается из синфазного неустойчивого 2π -периодического движения в результате субкритической бифуркации удвоения периода ($\beta \approx 3,199$), при этом синфазное 2π -периодическое движение вновь становится устойчивым. Далее при увеличении параметра β устойчивое и неустойчивое 4π -периодические вращательные движения сливаются и исчезают в результате седлоузловой бифуркации. При дальнейшем увеличении параметра β в системе (2) возможен только синфазный вращательный режим. Таким образом, в системе наблюдается эффект бистабильности вращательных режимов. При $\lambda = 0,71$ (рис. 3,б, 3,г) ситуация аналогична предыдущему случаю: существует 4π -периодическое движение и происходит бифуркация удвоения периода ($\beta \approx 1,38$), в результате которой рождается устойчивое 8π -периодическое движение, при этом 4π -периодическое движение теряет свою устойчивость. При $\lambda = 0,779$ (рис. 5) в результате каскада бифуркаций удвоения периода появляется диапазон значений параметра β ($1,15 < \beta < 1,35$), при которых в системе наблюдается режим динамического хаоса.

На рис. 6 изображены карты вращательных режимов, показывающие тип установившегося вращательного движения, реализующегося в системе в зависимости от параметров K и β . Рассмотрим случай $\lambda = 0,67$ (рис. 6,а), при этом помимо синфазного вращательного движения в рассматриваемой области параметров существует только устойчивый несинфазный 4π -периодический вращательный режим. При увеличении λ до значения 0,73 (рис. 6,б) кроме устойчивого 4π -вращательного режима, при некоторых K и β наблюдается 8π -периодический несинфазный вращательный режим, при этом 4π -вращательное движение теряет устойчивость. При $\lambda = 0,82$ (рис. 6,в) в системе может наблюдаться режим динамического хаоса, возникающий в результате каскада бифуркаций удвоения периода.

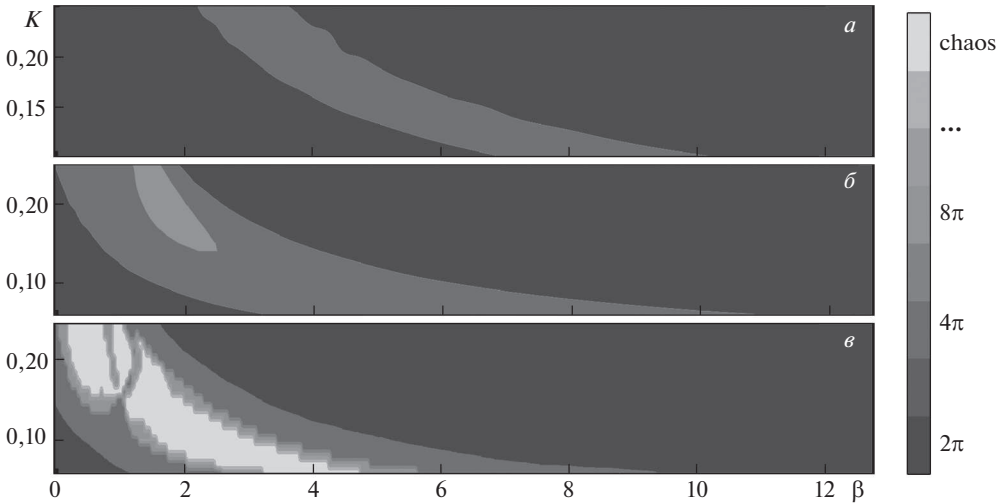


Рис. 6. Тип вращательных периодических режимов в зависимости от значений параметров K , β при $\gamma = 0,97$. $a - \lambda = 0,67$, $б - \lambda = 0,73$, $в - \lambda = 0,82$.

Заметим, что при малых значениях параметра связи K неустойчивость синфазного режима возникает при большем значении параметра асимметрии связи β .

6. Заключение

В работе рассмотрена вращательная динамика в связанных системах фазовой синхронизации. Показано, что в системе с асимметричной связью существует область значений параметров, в которой синфазное вращательное движение является неустойчивым, при этом реализуются несинфазные периодические и хаотические вращения. Аналитически получено, что увеличение асимметрии связи приводит к уменьшению области неустойчивости синфазного режима $\Delta K = K_2 - K_1$. При этом интервал неустойчивости ΔK смещается в область малых коэффициентов связи K . Для возникновения неустойчивости при малых значениях параметра связи необходима большая степень ее асимметрии.

Потеря устойчивости происходит в результате бифуркации удвоения периода (прямой и обратной). При обратной бифуркации удвоения периода в системе наблюдается жесткий переход к несинфазному режиму. В случае больших значений параметра затухания в результате каскада бифуркаций удвоения периода возникают хаотические вращения.

Описаны численные методы, позволяющие находить и определять линейную устойчивость регулярных вращательных режимов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. England: Cambridge Univer. Press, 2001.
2. *Osipov G.V., Kurths J., Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Germany: Springer Verlag, 2007.

3. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Sci., 1994.
4. *Шалфеев В.Д., Матросов В.В.* Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Монография. Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. госуниверситета, 2013.
5. *Неймарк Ю.И.* Математическое моделирование как наука и искусство. Учебник. – 2-е изд., испр. и доп. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010.
6. *Kecik K., Warminski J.* Dynamics of an Autoparametric Pendulum-Like System with a Nonlinear Semiactive Suspension // *Math. Probl. Engineer.* 2011. V. 2011. No. 451047. P. 1–15.
7. *Yakushevich L. V.* Nonlinear Physics of DNA. Germany: Wiley-VCH., 2004.
8. *Homma S., Takeno S.* A Coupled Base-Rotator Model for Structure and Dynamics of DNA: Local Fluctuations in Helical Twist Angles and Topological Solitons // *Progr. Theoret. Physics.* 1984. V. 72. No. 4. P. 679–693.
9. *Takeno S., Homma S.* Kinks and Breathers Associated with Collective Sugar Puckering in DNA // *Progr. Theoret. Physics.* 1987. V. 77. No. 3. P. 548–562.
10. *Barone A., Paterno G.* Physics and Applications of the Josephson Effect. United States: John Wiley and Sons Inc., 1982.
11. *Ryu S., Yu W., Stroud D.* Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladder // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 53. No. 3. P. 2190–2195.
12. *Qian M., Wang J.-Z.* Transitions in two sinusoidally coupled Josephson junction rotators // *Ann. Physics.* 2008. V. 323. No. 8. P. 1956–1962.
13. *Zheng Z., Hu B., Hu G.* Spatiotemporal dynamics of discrete sine-Gordon lattices with sinusoidal couplings // *Phys. Rev.* 1998. V. 57. No. 1. P. 1139–1144.
14. *Линдсей В.* Системы синхронизации в связи и управлении / Под ред. Ю.Н. Бакаева, М.В. Капранова. М: Сов. радио, 1978.
15. Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной. М: Радио и связь, 1982.
16. *Smirnov L.A., Kryukov A.K., Osipov G.V., Kurths J.* Bistability of rotational modes in a system of coupled pendulums // *Regul. Chaotic Dyn.* 2016. V. 21. No. 7–8. P. 849–861.
17. *Хрисанфова С.О., Кадина Е.Ю., Губина Е.В., Коган Л.В., Осипов Г.В.* Динамика системы двух нелинейно связанных маятников // *Прикладная нелинейная динамика.* 2016. № 3. С. 4–20.
18. *Kemeth F.P., Haugland S.W., Krischer K.* Cluster singularity: The unfolding of clustering behavior in globally coupled Stuart-Landau oscillators // *Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Sci.* 2019. V. 29. No. 2. P. 023107.
19. *Bolotov M.I., Munyaev V.O., Kryukov A.K., et al.* Variety of rotation modes in a small chain of coupled pendulums // *Chaos: An Interdisciplinary J. Nonlinear Sci.* 2019. V. 29. No. 3. P. 033109.
20. *Неймарк Ю.И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М: Наука, 1972.
21. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М: Наука, 1987.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 23.07.2019

После доработки 18.10.2019

Принята к публикации 30.01.2020