© 2020 г. **А. ЭРНАНДЕС (capricornale_1415@hotmail.com),**
А.С. ПОЗНЯК, д-р техн. наук (apoznyak@ctrl.cinvestav.mx)
(Исследовательский центр CINVESTAV, Мехико, Мексика)

НЕЛИНЕЙНОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ: ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ КАК ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ[1]

В данной статье представлены две численные процедуры идентификации параметров гамильтоновых систем непрерывного времени. Предложенный подход использует свойства первых интегралов и их характеристики, позволяя рассматривать процесс параметрической идентификации как стабилизацию производных первых интегралов. Эта идея реализуется с помощью двух численных процедур, использующих дифференциатор типа "супер-твист" для оценки производных обобщенных координат и импульсов в реальном времени. Показана сходимость указанных процедур идентификации и их применение для скалярного и векторного случаев. Численные примеры демонстрируют хорошую работоспособность предложенных методов.

Ключевые слова: функция Гамильтона, первые интегралы, идентификация, стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231020090020

1. Введение

Идентификация систем — это совокупность методов определения характеристик математической модели системы по измерениям ее входов и выходов. Методы оценки параметров нелинейных систем зависят от структуры модели и основаны либо на линейных, либо на нелинейных (по параметрам) моделях. Выбор между этими двумя подходами часто диктуется исследуемым процессом. Если известна структура дифференциального уравнения, описывающего процесс, то алгоритмы оценивания параметров могут быть применены непосредственно для оценки неизвестных параметров. Когда априорной информации не достаточно, и процесс рассматривается как черный ящик, то стандартным подходом является описание оператора входа/выхода с помощью подходящей модели представления, которая обычно выбирается нелинейной во входных и выходных переменных, но линейной по оцениваемым параметрам. В этом случае для оценивания параметров обычно применяются различные варианты методов наименьших квадратов (МНК).

Применение МНК требует выполнения так называемого "условия постоянного возбуждения". Если неизвестные параметры, подлежащие оценке, участвуют в описании модели в нелинейной форме, прямое применение такого

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке CONACYT-Mexico (грант № CB 2015-251552-Y).

подхода приводит к глобальной многоэкстремальной оптимизационной задаче, решение которой может быть получено с помощью МНК или любого другого градиентного метода (см. [1, 2]). Последние достижения в этой области включают в себя комбинированный алгоритм сглаживания и оценивания параметров [3, 5], который компенсирует неопределенную структуру модели и внешние возмущения путем введения в модель изменяющихся во времени параметров, и рекурсивный алгоритм, предполагающий повторное использование данных [6].

Гамильтоновы системы представляют собой особый класс консервативных нелинейных систем [7, 17], в которых отсутствует "потеря энергии", а некоторые функции координат и обобщенных импульсов поддерживаются неизменными (первые интегралы) [8]. Эти консервативные свойства предоставляют новые возможности для успешной параметрической идентификации неизвестных параметров, участвующих нелинейно в описании модели. В данной работе реализован такой подход, предусматривающий использование двух новых процедур идентификации в непрерывном времени. Доказана сходимость этих процедур, два численных примера иллюстрируют хорошую работоспособность предлагаемого подхода.

1.1. Основные допущения и ограничения

Существует множество работ, посвященных идентификации линейных параметров, но которые не могут быть реализованы для моделей, содержащих нелинейные параметры. Как было уже отмечено выше, эта ситуация имеет место из-за того, что многие модели систем основаны на динамике особого вида: нелинейность параметров может спровоцировать сингулярность и многоэкстремальность соответствующих оптимизационных задач. Основные допущения, которые ограничивают класс гамильтоновых систем, рассматриваемых в данной работе, могут быть сформулированы в следующем виде:

— доступная (измеряемая в реальном времени) информация представляет собой обобщенные координаты $(q_1, \ldots, q_n)$ и импульсы $(p_1, \ldots, p_n)$, но не их производные;

— специальное условие принадлежности "конусу", о котором будет говориться ниже, требуется для обеспечения работоспособности двух предложенных процедур идентификации; оно основано на так называемом условии *σ-стабилизации* (локальной выпуклости).

1.2. Основные результаты

Основные результаты данной статьи состоят в следующем:

— переформулирована задача параметрической идентификация для широкого класса гамильтоновых систем как задача стабилизации специальных функций (первых интегралов), остающихся постоянными на траекториях систем; их число не обязательно должно соответствовать полной системе независимых первых интегралов и может варьироваться от 1 до $2n$;

— применен наблюдатель типа "супер-твист" [9] для оценки соответствующих производных состояний и обобщенных импульсов в реальном времени;

— предложены две численные процедуры для реализации процедуры идентификации: одинарная и двойная “сигнум-коррекция”;

— проанализирована сходимость (асимптотическая и на конечном горизонте) этих процедур;

— приведены два численных примера, иллюстрирующие работоспособность предложенного подхода, где функции Гамильтона содержат неизвестные параметры в нелинейном виде.

1.3. Структура работы

Структура работы выглядит следующим образом. Вторая часть, следующая за Введением, представляет собой краткое описание лагранжева и гамильтонова формализма. В следующей части (третьей) дано определение первых интегралов и приведены их возможные структуры. В четвертой части представлена постановка задачи и кратко описан подход к решению проблемы. В пятой части задача идентификации рассмотрена как стабилизация с использованием методов оптимизации. Затем обсуждаются две предложенные численные процедуры и их сходимость. Наконец, два примера численного моделирования, реализованных в MATLAB/SIMULINK®, показывают эффективность предложенных методов.

2. Гамильтонов формализм и постановка задачи

2.1. Лагранжев формализм

Описание динамических моделей для широкого класса электромеханических систем задается классическим уравнением Лагранжа вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L\left(q,\dot{q},t\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}L\left(q,\dot{q},t\right)=Q_{i,non-potential}\left(q,\dot{q},t\right),\quad i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

где $q=(q_1,\ldots,q_n)^{\intercal}$ и $\dot{q}=(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)^{\intercal}$ — вектора обобщенных координат и скоростей, $L(q,\dot{q},t)$ — гладкая функция Лагранжа $2n+1$ переменных, заданная в форме

$$L\left(q,\dot{q},t\right):=T\left(q,\dot{q},t\right)-V\left(q,t\right). \tag{2}$$

Для “натуральных” механических систем $T(q,\dot{q},t)$ — кинетическая энергия рассматриваемой системы, а $V(q,t)$ — потенциальная энергия, $Q_{i,non-potential}(q,\dot{q},t)$ — обобщенная непотенциальная сила, действующая на i-ую координату $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Ниже будет рассмотрен только класс *консервативных систем*, в которых непотенциальные силы отсутствуют, т.е. для всех $i=\overline{1,n}$ и всех $t\geqslant 0$

$$Q_{i,non-potential}\left(q,\dot{q},t\right)=0,$$

что обеспечивает выполнение равенства

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}L\left(q,\dot{q},t\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}L\left(q,\dot{q},t\right)=0,\quad i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Говоря о траектории системы, используем обозначения $q(t) = (q_1(t), \ldots$ $\ldots, q_n(t))^\intercal$ и $\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t))^\intercal$ — векторы обобщенных координат и скоростей как функции времени $t \geqslant 0$.

2.2. Гамильтонов формализм

В соответствии с гамильтоновым подходом определим обобщенные импульсы

$$p_i := \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \dot{q}, t\right), \quad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

и функцию Гамильтона (преобразование Лежандра)

$$H\left(q, p, t\right) := \Big[p^\intercal \dot{q} - L\left(q, \dot{q}, t\right)\Big]_{\dot{q} = \dot{q}(q,p,t)}, \tag{5}$$

где вектор $\dot{q}$ получен из условия (4) в предположении разрешимости этой системы. Таким образом, $\dot{q} = \dot{q}\left(q, p, t\right)$. Из уравнений (3) и (4) напрямую следует, что обобщенные координаты и импульсы удовлетворяют *каноническим уравнениям Гамильтона*

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial}{\partial p_i} H\left(q, p, t\right), \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial}{\partial q_i} H\left(q, p, t\right), \quad i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{6}$$

2.3. Неизвестные параметры динамических уравнений

Предположим, что и кинетическая энергия $T\left(q, \dot{q}, t\right)$, и, вообще говоря, потенциальная $V\left(q, t\right)$ зависят от вектора неизвестных параметров $\alpha^* \in \mathbb{R}^r$, а именно

$$T = T\left(q, \dot{q}, t | \alpha^*\right), \quad V = V\left(q, t | \alpha^*\right),$$

причем подразумевается, что функция Лагранжа $L\left(q, \dot{q}, t\right)$ (2) и соответствующая функция Гамильтона $H\left(q, p, t\right)$ (5) становятся зависящими также от α^*, т.е.

$$L = L\left(q, \dot{q}, t | \alpha^*\right), \quad H = H\left(q, p, t | \alpha^*\right).$$

Отметим, что на траектории системы переменные состояния, обобщенные координаты и импульсы (и их производные), также зависят от этого неизвестного параметра:

$$q = q\left(t | \alpha^*\right), \quad \dot{q} = \dot{q}\left(t | \alpha^*\right), \quad p = p\left(t | \alpha^*\right), \quad \dot{p} = \dot{p}\left(t | \alpha^*\right),$$

а уравнения (6) переходят в равенства

$$\begin{cases} \dot{q}_i\left(t | \alpha^*\right) = \dfrac{\partial}{\partial p_i} H\left(q\left(t | \alpha^*\right), p\left(t | \alpha^*\right), t | \alpha^*\right), \\ \dot{p}_i\left(t | \alpha^*\right) = -\dfrac{\partial}{\partial q_i} H\left(q\left(t | \alpha^*\right), p\left(t | \alpha^*\right), t | \alpha^*\right). \end{cases} \tag{7}$$

Замечание 1. Отметим, что ввиду равенства (4) могут возникнуть два различных случая:

Случай 1: когда для всех $i = \overline{1, n}$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^* \partial \dot{q}_i} L\left(q\left(t|\alpha^*\right), \dot{q}\left(t|\alpha^*\right), t|\alpha^*\right) = 0, \tag{8}$$

что влечет за собой независимость импульса p от α^* и возможность оценить его напрямую из (4), используя измерения $q = q\left(t|\alpha^*\right)$ и оценки производной $\widehat{\dot{q}}\left(t|\alpha^*\right)$.

Случай 2: когда по крайней мере для одного $i = i_0$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^* \partial \dot{q}_{i_0}} L\left(q\left(t|\alpha^*\right), \dot{q}\left(t|\alpha^*\right), t|\alpha^*\right) \neq 0, \tag{9}$$

что требует использования специальной процедуры, которая в дальнейшем будет названа *p-адаптивным оцениванием*.

2.4. Постановка задачи

Задача 1. Основываясь на онлайн-измерении координат $q\left(t|\alpha^*\right)$ (предположим, что эти измерения точны, т.е. не содержат никакого шума в измерениях), получить оценку векторного параметра $\alpha\left(t\right) \in \mathbb{R}^r$, которая является *асимптотически состоятельной*, а именно, удовлетворяет

$$\alpha\left(t\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \alpha^*. \tag{10}$$

Для успешного решения поставленной задачи, нужно получить онлайн-оценки $\dot{q}\left(t|\alpha^*\right)$, $p\left(t|\alpha^*\right)$ и $\dot{p}\left(t|\alpha^*\right)$, которые будут обозначены ниже как $\widehat{\dot{q}}\left(t\right)$, $\widehat{p}\left(t\right)$ и $\widehat{\dot{p}}\left(t\right)$. Это можно сделать путем применения так называемого точного дифференциатора, реализованного по схеме “супер-твист” [9].

Заметим, что вектор α^* неизвестных параметров может участвовать в канонических уравнениях (7) нелинейным образом. Таким образом, во многих случаях прямое применение метода наименьших квадратов (или его модификации) невозможно, что порождает новые задачи для исследователей и инженеров: требуется разработать конкретные методы (численные процедуры) для успешной идентификации неизвестного векторного параметра α^*.

3. Первые интегралы

3.1. Определение первых интегралов

Напомним, что функция $f(t, q, p)$, которая принимает постоянное значение на траекториях гамильтоновой системы (6), называется *первым интегралом* системы. Класс первых интегралов характеризует следующее свойство [10].

Лемма 1. Функция $f(t, q, p)$ является первым интегралом гамильтоновой системы (6) *с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial f(t, q, p)}{\partial t} + [f, H] = 0, \tag{11}$$

где $[f, H]$ *называют* ***скобками Пуассона*** *и задают с помощью выражения*

$$[f, H] := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \tag{12}$$

3.2. Характеристика первых интегралов путем исследования гамильтоновой структуры

Проверяя выполнение свойства (11) (подставляя функции H в (11)), несложно убедиться, что следующие функции являются первыми интегралами:

1) если

$$\frac{\partial H\,(q,p)}{\partial t} = 0, \quad \text{то} \quad H = \underset{t}{\text{const}}, \tag{13}$$

2) если

$$\begin{gathered} H = H(f(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m), q_{m+1}, p_{m+1}, \ldots, q_n, p_n, t), \\ \text{то } f(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m) = \underset{t}{\text{const}}, \end{gathered} \tag{14}$$

3) если

$$\begin{gathered} H = H(\varphi_1(q_1, p_1), \ldots, \varphi_n(q_n, p_n), t), \\ \text{то } \varphi_i(q_i, p_i) = \underset{t}{\text{const}}, \quad i = \overline{1, n}\,, \end{gathered} \tag{15}$$

4) если

$$\begin{gathered} H = H(\varphi_j(\ldots \varphi_2(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2) \ldots), q_{j+1}, p_{j+1}, \ldots, q_n, p_n, t), \\ \text{то } \varphi_k(\ldots \varphi_2(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2) \ldots, q_k, p_k) = \underset{t}{\text{const}}, \quad k = \overline{1, j}\,, \end{gathered} \tag{16}$$

5) если

$$\begin{gathered} H = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(q_i, p_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(q_i, p_i)}, \\ \text{то } f_i(q_i, p_i) - H\varphi_i(q_i, p_i) = \underset{t}{\text{const}}, \quad i = \overline{1, n}, \end{gathered} \tag{17}$$

6) если

$$H = \phi(t) \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(q_i, p_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i f_i(q_i, p_i)}, \quad \text{то} \quad f_i(q_i, p_i) = \underset{t}{\text{const}}, \quad i = \overline{1, n}\,. \tag{18}$$

4. Задача идентификации как задача стабилизации

4.1. Производная первого интеграла

Неизвестные параметры, вообще говоря, входят аналитически в каждый первый интеграл $f(t,q,p|\alpha)$, поэтому нужно помнить, что измеренные или оцененные траектории зависят от реальных значений неизвестного α^*, т.е. $q = q\left(t|\alpha^*\right)$ и $p = p\left(t|\alpha^*\right)$. Это означает, что

$$f(t, q\left(t|\alpha^*\right), p\left(t|\alpha^*\right)|\alpha) = \underset{t}{\text{const}}, \quad \text{если} \quad \alpha = \alpha^*. \tag{19}$$

Другими словами, для идентификации неизвестного параметра $\alpha \in \mathbb{R}^r$ придется использовать свойство (19), рассматривая параметр α как управляющее (корректирующее) воздействие, которое будет выбрано для стабилизации функции $f(t, q\left(t|\alpha^*\right), p\left(t|\alpha^*\right)|\alpha)$.

Это требование можно выразить в виде

$$\sigma\left(t,\alpha\right) := \frac{d}{dt} f(t, q\left(t|\alpha^*\right), p\left(t|\alpha^*\right)|\alpha) \equiv 0, \quad \text{если} \quad \alpha = \alpha^*. \tag{20}$$

Таким образом, выполнение условия стабилизации (19) можно интерпретировать как построение управляющего воздействия $u \in \mathbb{R}^r$, обеспечивающего *σ-стабилизацию*

$$\sigma\left(t,u\right) = 0 \tag{21}$$

для любого $t \geqslant 0$.

4.2. Мотивирующий пример

Для иллюстрации свойства (20) рассмотрим стандартный маятник, динамика которого описана уравнением

$$\dot{q} = \frac{p}{\alpha^{*2}}, \quad \dot{p} = -mg\alpha^* \sin(q) + (\nu\alpha^*)^2 \sin(q)\cos(q), \quad \alpha^* > 0 \tag{22}$$

$(r = n = 1)$ с гамильтонианом

$$H(q,p|\alpha^*) = \frac{p^2}{2\alpha^{*2}} + mg\alpha^*(1-\cos(q)) - \frac{1}{2}(\nu\alpha^*)^2 \sin^2(q). \tag{23}$$

Отметим, что неизвестный параметр α^* входит в это уравнение нелинейно. Следуя (20) и обозначая для простоты $q^* = q\left(t|\alpha^*\right)$ и $p^* = p\left(t|\alpha^*\right)$, определим

$$\begin{aligned}
\sigma\left(t,u\right) &= \frac{p^*}{u^2}\dot{p}^* + \left[mgu\sin\left(q^*\right) - (\nu u)^2 \sin\left(q^*\right)\cos\left(q^*\right)\right]\dot{q}^* = \\
&= -\frac{p^*}{u^2}\frac{\partial H}{\partial q} + \left[mgu\sin\left(q^*\right) - (\nu u)^2 \sin\left(q^*\right)\cos(q^*)\right]\frac{\partial H}{\partial p} = \\
&= -\frac{p^*}{u^2}\left[mgu\sin\left(q^*\right) - \left(\nu u^2\right)\sin\left(q^*\right)\cos\left(q^*\right)\right] +
\end{aligned}$$

$$+\left[mgu\sin\left(q^*\right)-(\nu u)^2\sin\left(q^*\right)\cos\left(q^*\right)\right]\frac{p^*}{u^2}=$$

$$=p^*\left(\frac{u^2-\alpha^{*2}}{\alpha^{*2}u^2}\right)\left[mg\sin\left(q^*\right)\left(\alpha^*+u\right)-\left(\alpha^{*2}+u^2\right)\nu^2\sin\left(q^*\right)\cos\left(q^*\right)\right].$$

Когда $u=\alpha^*$, имеем $\sigma\left(t,\alpha^*\right)=0$. Для иллюстрации зависимости $\sigma(t,u)$ от u для различных $t\geqslant 0$ рассмотрим ситуацию, когда $\alpha^*=0{,}5$, $m=1$, $g=9{,}82$ и $\nu=1$. График соответствующей функции $\sigma(t,u)$ показан на рис. 1 для различных значений $t=t_k$ $(k=1,2,\ldots)$.

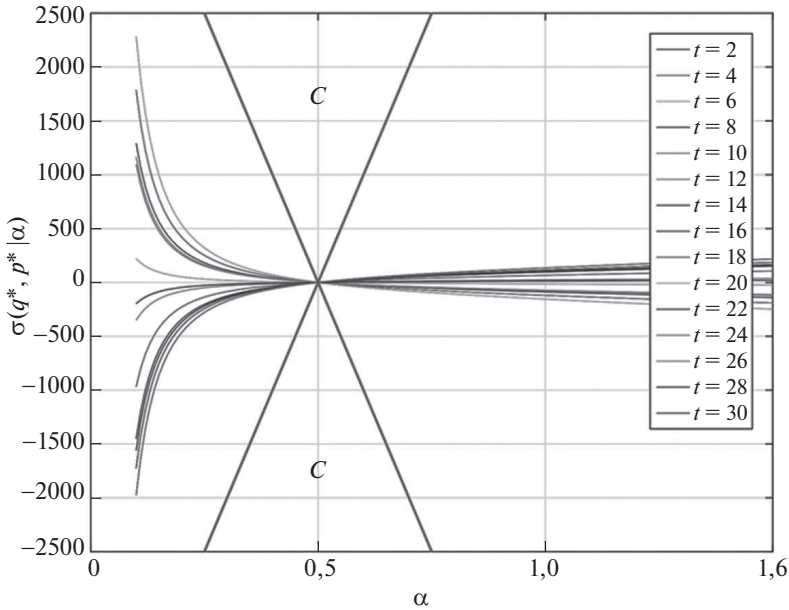

Рис. 1. График $\sigma(t,u)$.

Отметим, что все кривые на рисунке лежат за пределами конуса C.

5. Задача идентификации как задача оптимизации

5.1. Дифференциальные оптимизаторы

Условие (21), которое нужно реализовать, также может быть представлено в виде следующей задачи оптимизации:

$$|\sigma\left(t,\alpha\right)|\to\min_{\alpha} \tag{24}$$

для всех $t\geqslant 0$ или, другими словами,

$$0=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left|\sigma\left(t,\alpha\right)\right|=\operatorname{sign}\left(\sigma\left(t,\alpha\right)\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}\sigma\left(t,\alpha\right).$$

Рассмотрим следующие численные дифференциальные процедуры (оптимизаторы) [15, 16]:

1) Процедура 1 (использование одной сигнум-функции):

$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma(t)\,\mathrm{sign}\left(\sigma(t,\alpha(t))\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}\sigma(t,\alpha(t))\,; \tag{25}$$

2) Процедура 2 (использование двух сигнум-функций):

$$\dot{\alpha}(t) = -\gamma(t)\,\mathrm{sign}\left(\sigma(t,\alpha(t))\right)\mathrm{sign}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\sigma(t,\alpha(t))\right). \tag{26}$$

В обеих процедурах функция усиления $\gamma(t)$ удовлетворяет предположению

$$\gamma(t) \geqslant 0, \quad \int\limits_{t=0}^{\infty}\gamma(t)\,dt = \infty. \tag{27}$$

5.2. Наблюдатель типа "супер-твист" для оценивания $\dot{q}(t|\alpha^*)$ и $\dot{p}(t|\alpha^*)$

Сначала отметим, что, если $\partial f/\partial t \equiv 0$ в (20), то

$$\sigma(t,\alpha(t)) = \left[\frac{\partial}{\partial q}f(t,\alpha(t))\right]^{\mathsf{T}}\dot{q}(t|\alpha^*) + \left[\frac{\partial}{\partial p}f(t,\alpha(t))\right]^{\mathsf{T}}\dot{p}(t|\alpha^*)\,,$$

в результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\sigma(t,\alpha(t)) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial q}f(t,\alpha(t))\right]^{\mathsf{T}}\dot{q}(t|\alpha^*) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial p}f(t,\alpha(t))\right]^{\mathsf{T}}\dot{p}(t|\alpha^*)\,.$$

Несложно заметить, что получена функция $\frac{\partial}{\partial\alpha}\sigma(t,\alpha(t))$, которая используется в обеих процедурах (25) и (26). Для нахождения ее значения необходимо знать вектор-функции $\dot{q}(t|\alpha^*)$ и $\dot{p}(t|\alpha^*)$, или, если первое невозможно, использовать их онлайн-оценки $\widehat{\dot{q}}(t)$ и $\widehat{\dot{p}}(t)$. Эти оценки можно получать в реальном времени, применяя следующий "супер-твист" алгоритм [9, 11]:

— для случая 1 (8):

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \widehat{\dot{q}}(t|\alpha^*) \end{pmatrix} = \begin{cases} q(t|\alpha^*) - \beta\mathrm{sign}(\widehat{q}(t) - q(t|\alpha^*)), \\ x_2(t) - \theta||q(t|\alpha^*) - \widehat{q}(t)||^{1/2}\mathrm{sign}(\widehat{q}(t) - q(t|\alpha^*)), \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \widehat{\dot{p}}(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} p(t) - \beta\mathrm{sign}(\widehat{p}(t) - p(t)), \\ x_2(t) - \theta||p(t) - \widehat{p}(t)||^{1/2}\mathrm{sign}(\widehat{p}(t) - p(t)), \end{cases} \tag{29}$$

— для случая 2 (9) p-адаптивная оценка:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \widehat{\dot{q}}(t|\alpha^*) \end{pmatrix} = \begin{cases} q(t|\alpha^*) - \beta\mathrm{sign}(\widehat{q}(t) - q(t|\alpha^*)), \\ x_2(t) - \theta||q(t|\alpha^*) - \widehat{q}(t)||^{1/2}\mathrm{sign}(\widehat{q}(t) - q(t|\alpha^*)), \end{cases} \tag{30}$$

$$(31)\quad \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ \widehat{\dot{p}}(t|\alpha(t)) \end{pmatrix} = \begin{cases} p(t|\alpha(t)) - \beta \operatorname{sign}(\widehat{p}(t|\alpha(t)) - p(t|\alpha(t))), \\ x_2(t) - \theta ||p(t|\alpha(t)) - \widehat{p}(t|\alpha(t))||^{1/2} \operatorname{sign}(\widehat{p}(t|\alpha(t)) - p(t|\alpha(t))), \end{cases}$$

где параметры дифференциаторов θ и β удовлетворяют условиям [28, 29, 30, 31]

$$\beta > 5L, \quad \theta^2 \in \{32L, 8[\beta - L]\},$$
$$\max\left\{\sup_t |\dot{q}(t|\alpha^*)|; \sup_t |\dot{p}(t|\alpha^*)|\right\} \leqslant L,$$

если производные обобщенных координат и импульсов ограничены на всей числовой оси времени.

Замечание 2. Заметим, что оценки $\widehat{\dot{q}}(t)$ и $\widehat{\dot{p}}(t)$ сходятся за конечное время к реальным значениям $\dot{q}(t|\alpha^*)$ и $\dot{p}(t|\alpha^*)$, если в онлайн-измерениях $q(t|\alpha^*)$ и $p(t|\alpha^*)$ нет шума и возмущений.

5.3. Анализ сходимости процедуры оптимизации

Следующая теорема представляет собой достаточные условия работоспособности предлагаемых процедур идентификации (25)–(26). Зададим функцию Ляпунова $V(\alpha)$ в виде

$$(32)\qquad V(\alpha) := \frac{1}{2}\|\alpha - \alpha^*\|^2.$$

Теорема 1. Предположим, что

1. *Условие* (27) *выполнено при ограниченных* $\gamma(t)$.
2. *Для всех* $t \geqslant 0$ *и всех* $\alpha \in \mathbb{R}^r$ *специальное условие принадлежности "конусу" выполнено*

$$\operatorname{sign}(\sigma(t,\alpha))(\alpha - \alpha^*)^{\intercal} \frac{\partial}{\partial \alpha}[\sigma(t,\alpha)] \geqslant \rho V^{\varkappa}(\alpha), \quad \rho > 0,$$

где $\varkappa \in (0, 1]$.

Тогда

— *процедура* (25) *обеспечивает асимптотическую сходимость*

$$\alpha(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \alpha^*,$$

— *процедура* (26) *при* $\gamma(t) = \mathrm{const} > 0$ *и* $\varkappa = 0{,}5$ *обеспечивает сходимость за конечное время, а именно, для всех* $t > t_{reach}$ $\alpha(t) = \alpha^*$, *где*

$$(33)\qquad t_{reach} := \sqrt{2}\,\frac{||\alpha(0) - \alpha^*||}{\gamma\rho}.$$

Доказательство. Из (32) следует, что

$$\dot{V}(\alpha(t)) = (\alpha(t) - \alpha^*)^{\intercal} \dot{\alpha}(t) =$$
$$= -\gamma(t)\,\mathrm{sign}\,(\sigma(t, \alpha(t)))\,(\alpha(t) - \alpha^*)^{\intercal} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\sigma(t, \alpha(t))\right].$$

По условиям этой теоремы

$$\dot{V}(\alpha(t)) \leqslant -\gamma(t)\,\rho V^{\varkappa}(\alpha(t)). \tag{34}$$

Принимая $\varkappa = 1$ для процедуры (25) и учитывая предположение (27), получаем

$$V(\alpha(t)) \leqslant V(\alpha(0)) \exp\left(-\rho \int\limits_{\tau=0}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что влечет за собой $\alpha(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \alpha^*$. Если же $\varkappa = 0{,}5$ и $\gamma = \mathrm{const} > 0$, то для процедуры (26) имеем

$$\dot{V}(\alpha(t)) \leqslant -\gamma\rho\sqrt{V(\alpha(t))}, \tag{35}$$

что влечет

$$0 \leqslant \sqrt{V(\alpha(t))} = \frac{||\alpha(t) - \alpha^*||}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{V(\alpha(0))} - \frac{1}{2}\gamma\rho t$$

и

$$||\alpha(t) - \alpha^*|| \leqslant ||\alpha(0) - \alpha^*|| - \frac{\gamma\rho}{\sqrt{2}} t$$

и приводит к выполнению условия (33).

6. Численное моделирование

Пример 1 (наклонная плоскость). Рассмотрим простую механическую систему, представленную на рис. 2.

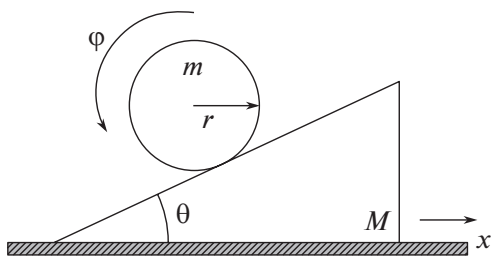

Рис. 2. Наклонная плоскость.

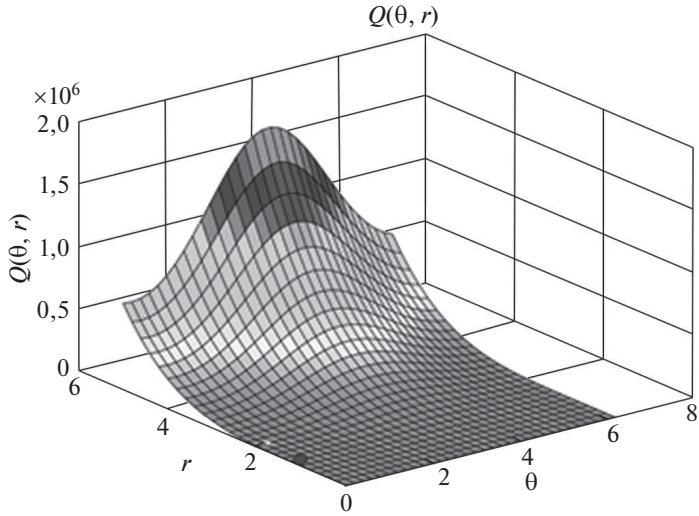

Рис. 3. Функция $Q(\theta, r)$.

Кинетическая энергия этой системы задана в виде

$$T(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - mr\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\theta) + \frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2,$$

а потенциальная энергия равна

$$V(x, \varphi, t) = -gm\varphi r\sin(\theta).$$

Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - mr\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\theta) + \frac{3}{4}mr^2\dot{\varphi}^2 + gm\varphi r\sin(\theta),$$

а уравнения Эйлера–Лагранжа заданы как

$$f_1(\theta, r, t) := (M+m)\ddot{x}\,(t) - mr\ddot{\varphi}\,(t)\cos(\theta) = 0,$$
$$f_2(\theta, r, t) := -mr\ddot{x}\,(t)\cos(\theta) + \frac{3}{2}mr^2\ddot{\varphi}\,(t) - gmr\sin(\theta) = 0.$$

Для численного моделирования выберем $M = 0{,}1$, $m = 1$ и $g = 9{,}81$. Для применения МНК для оценки двух параметров θ и r, зададим функцию затрат в виде

$$Q(\theta, r) = \int\limits_{t=0}^{T=50} \left[f_1^2(\theta, r, t) + f_2^2(\theta, r, t)\right] dt. \tag{36}$$

График этой функции $Q(\theta, r)$ приведен на рис. 3, где каждый может увидеть разные локальные экстремумы. Соответствующий гамильтониан задан в виде

$$H(q(t), p(t)) = \frac{2(m+M)p_\varphi^2 + 3mp_x^2r^2 + 4mp_\varphi p_x r\cos(\theta)}{2mr^2(m + 3M + 2m\sin^2(\theta))} - gm\varphi r\sin(\theta), \tag{37}$$

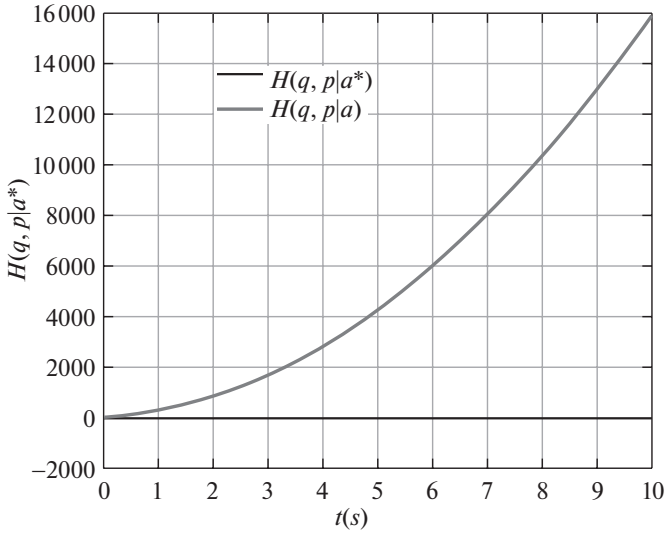

Рис. 4. $H(q,p|\alpha^*)$ и $H(q,p|\alpha)$.

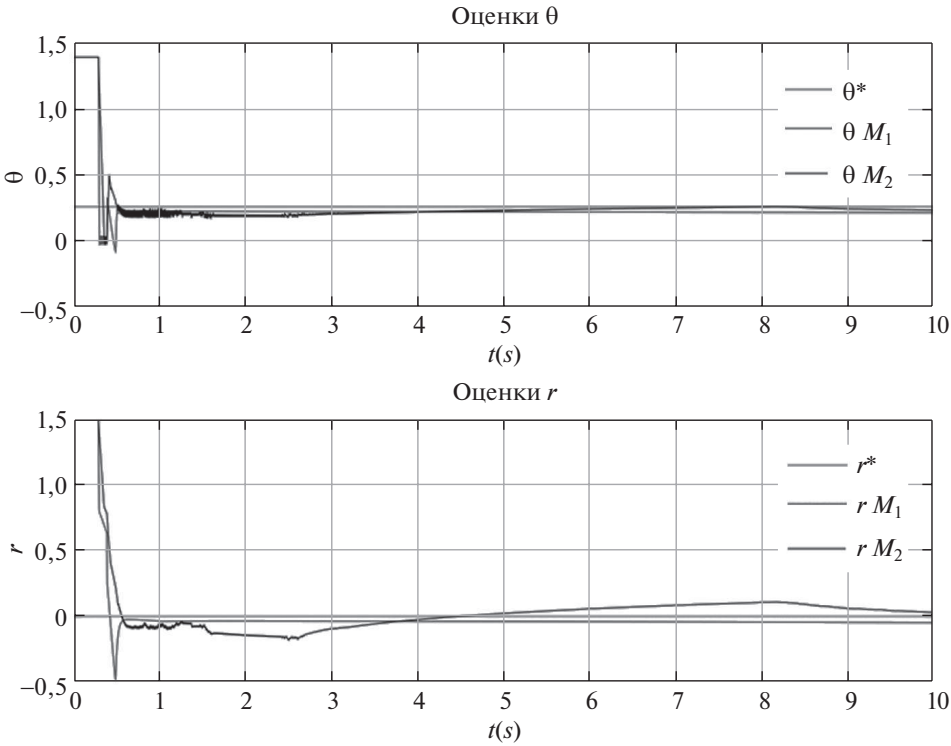

Рис. 5. $\alpha-$сходимость.

который получен с учетом первого интеграла и $\alpha^* = \begin{bmatrix} \theta & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{12} & 2 \end{bmatrix}$. Как видно на рис. 4, $H(q(t),p(t)|\alpha^*) = \underset{t}{\text{const}}$, а $H(q(t),p(t)|\alpha)$ с “неправильным” $\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & 5 \end{bmatrix}$ осциллирует по времени. Этот результат подтверждает тот факт, что стабилизация $H(q(t),p(t)|\alpha)$ имеет смысл и соответствует идентификации

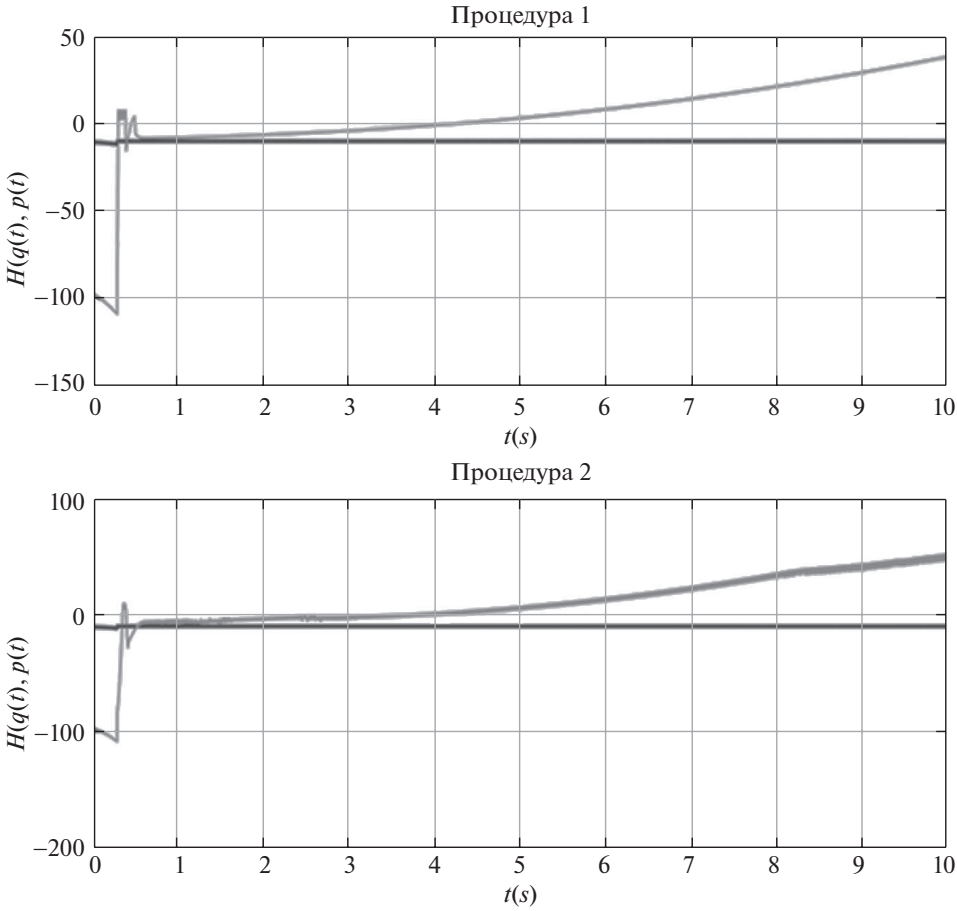

Рис. 6. Гамильтониан.

точного значения параметра α^*. Используя процедуры (25)–(26), получим процесс идентификации, представленный на рис. 5.

В данных экспериментах $\gamma(t)$ была задана в виде

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma/\eta, & \text{если} \quad t \in [0, t_0)\,, \\ \dfrac{\gamma}{\eta(t - t_0 + 1)}, & \text{если} \quad t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{38}$$

Для процедуры (25) были использованы $\gamma = 1$, $\gamma = 15$ и $\eta = 1000$, а для процедуры (26) были взяты значения $\gamma = 20$ и $\eta = 1$. Динамика изменения гамильтониана (23) показана на рис. 6.

Пример 2 (электрическая цепь). Рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис. 7. Кинетическая энергия задана в виде

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{\dot{q}_1^2 L_1}{2} + \frac{\dot{q}_2^2 L_2}{2},$$

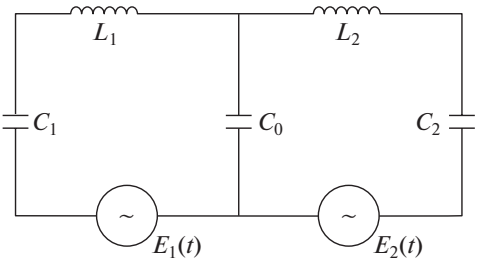

Рис. 7. Электрическая цепь.

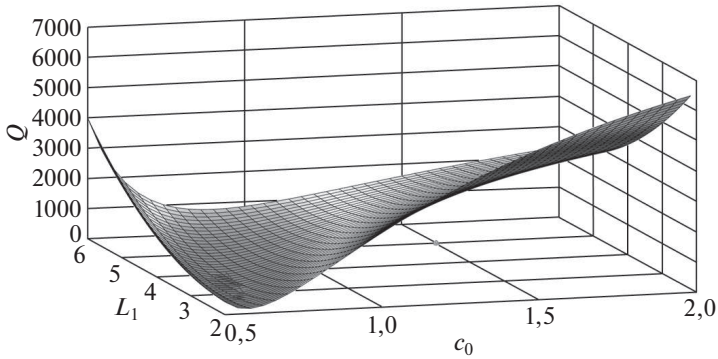

Рис. 8. Функция $Q(c_0, L_1)$.

а потенциальная энергия – выражением

$$V(q,t) = \frac{(c_0+c_1)q_1^2}{2c_0c_1} + \frac{(c_0+c_2)q_2^2}{2c_0c_2} - e_1q_1 - e_2q_2 - \frac{q_1q_2}{c_0}.$$

Тогда, получим следующую функцию Лагранжа $L = T - V$:

$$L(q,\dot{q},t) = e_1q_1 + e_2q_2 + \frac{\dot{q}_1^2L_1}{2} + \frac{\dot{q}_2^2L_2}{2} + \frac{q_1q_2}{c_0} - \frac{(c_0+c_1)q_1^2}{2c_0c_1} - \frac{(c_0+c_2)q_2^2}{2c_0c_2}.$$

Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$f_1(c_0, L_1, t) := \ddot{q}_1L_1 - e_1 + \frac{q_1}{c_0} + \frac{q_1}{c_1} - \frac{q_2}{c_0} = 0,$$
$$f_2(c_0, t) := \ddot{q}_2L_2 - e_2 + \frac{q_2}{c_0} + \frac{q_2}{c_2} - \frac{q_1}{c_0} = 0.$$

Для проведения численного моделирования были выбраны следующие значения: $L_2 = 7$, $c_1 = 0{,}5$ и $c_2 = 2{,}2$. Для использования МНК снова зададим функцию затрат вида (36), которая будет минимизирована с помощью подходящего выбора двух параметров c_0, L_1. График функции $Q(c_0, L_1)$ показан на рис. 8, видно, что функция имеет несколько экстремумов.

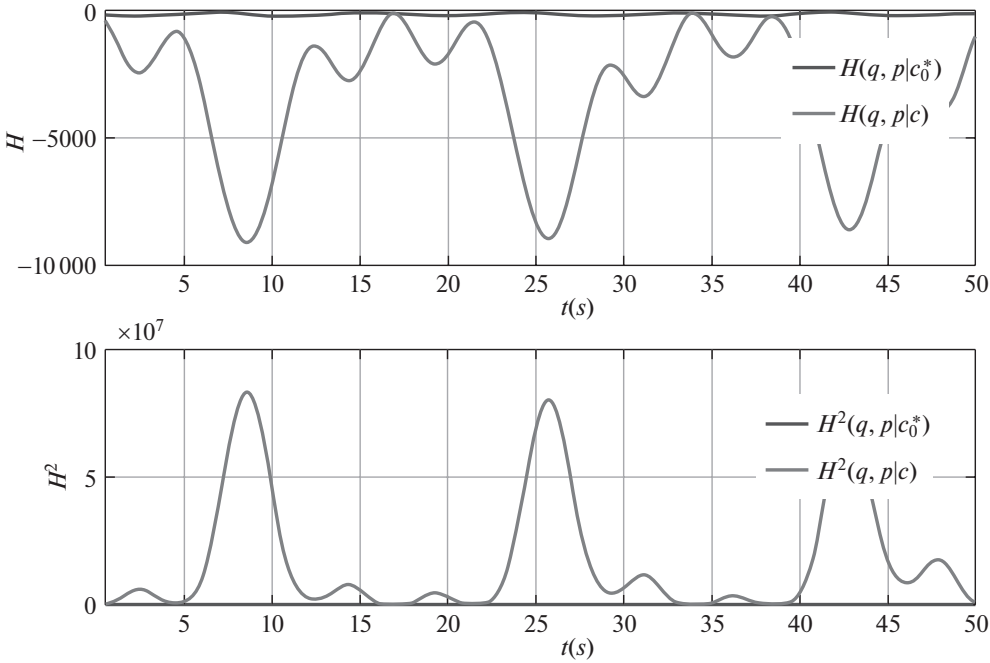

Рис. 9. $H(q,p|\alpha^*)$ и $H(q,p|\alpha)$.

Соответствующий гамильтониан представлен в виде

$$H(q(t),p(t),t) = \frac{p_1}{2L_1} + \frac{p_2}{2L_2} + \frac{(c_0+c_1)q_1^2}{2c_0c_1} + \\ + \frac{(c_0+c_2)q_2^2}{2c_0c_2} - e_1q_1 - e_2q_2 - \frac{q_1q_2}{c_0}. \tag{39}$$

Фактически он совпадает с первым интегралом при реальных значениях $\alpha = \alpha^* = \left[\begin{array}{cc} c_0 & L_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1{,}5 & 5 \end{array}\right]$. Как видно, на рис. 9 $H(q(t),p(t)|\alpha^*) = \underset{t}{\mathrm{const}}$, а $H(q(t),p(t)|\alpha)$ при $\alpha = \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \end{array}\right]$ осциллирует со временем, что подтверждает предположение о необходимости идентификации неизвестного вектора α^* путем решения задачи стабилизации $H(q(t),p(t)|\alpha)$.

В этом случае имеем дело со случаем 2, когда обобщенный импульс зависит от неизвестного параметра. т.е. $p = p(t,\alpha^*)$. Таким образом, используя *p-адаптивную оценку* (31), можно увидеть, что $p(t,\alpha(t))$ быстро сходится к $p(t,\alpha^*)$ (см. рис. 10).

Применяя процедуры (25), (26), получим процесс идентификации, показанный на рис. 11.

Для данного примера были использованы $\gamma = 0{,}00000148$ для процедуры (25), а для процедуры (26) — $\gamma = 2$ и тот же вид $\gamma(t)$ (38). Динамика гамильтониана (39) представлена на рис. 12.

Как видно из примеров, численное моделирование динамических систем, которые нелинейно содержат неизвестные параметры в описании, показывает

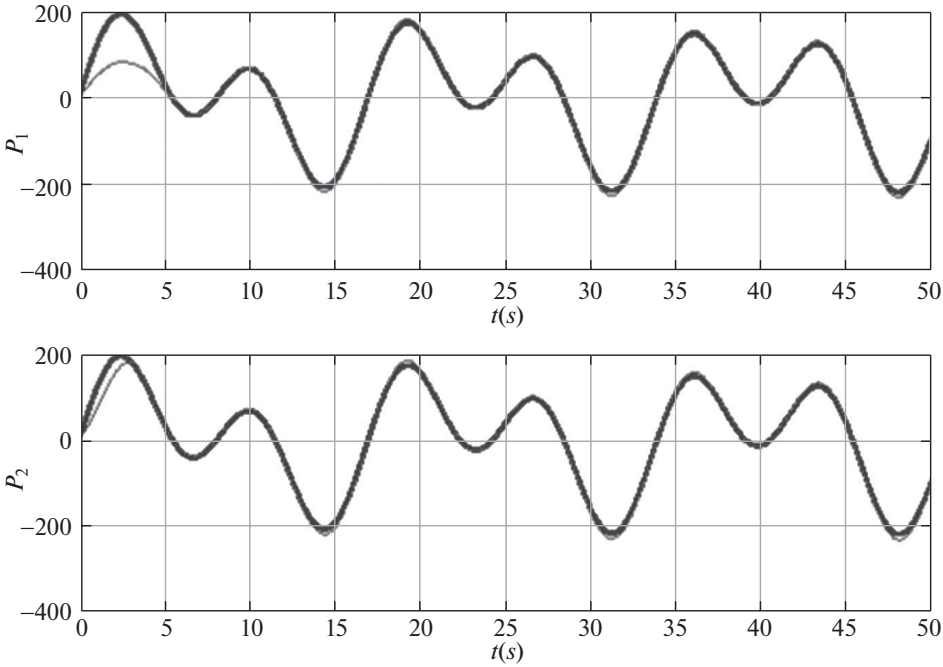

Рис. 10. $p(t, \alpha(t))$.

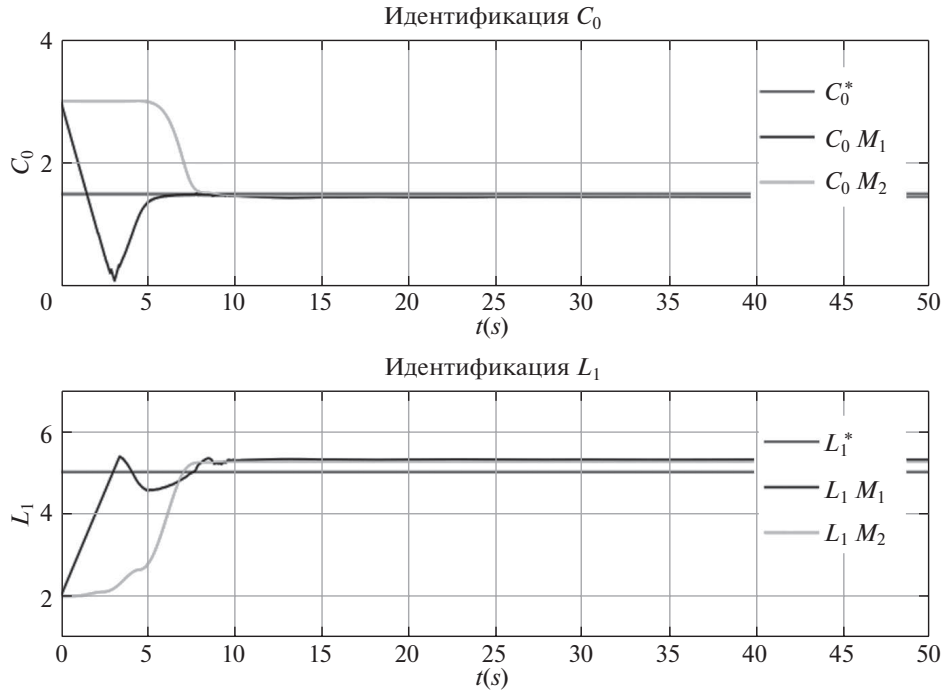

Рис. 11. $\alpha-$сходимость.

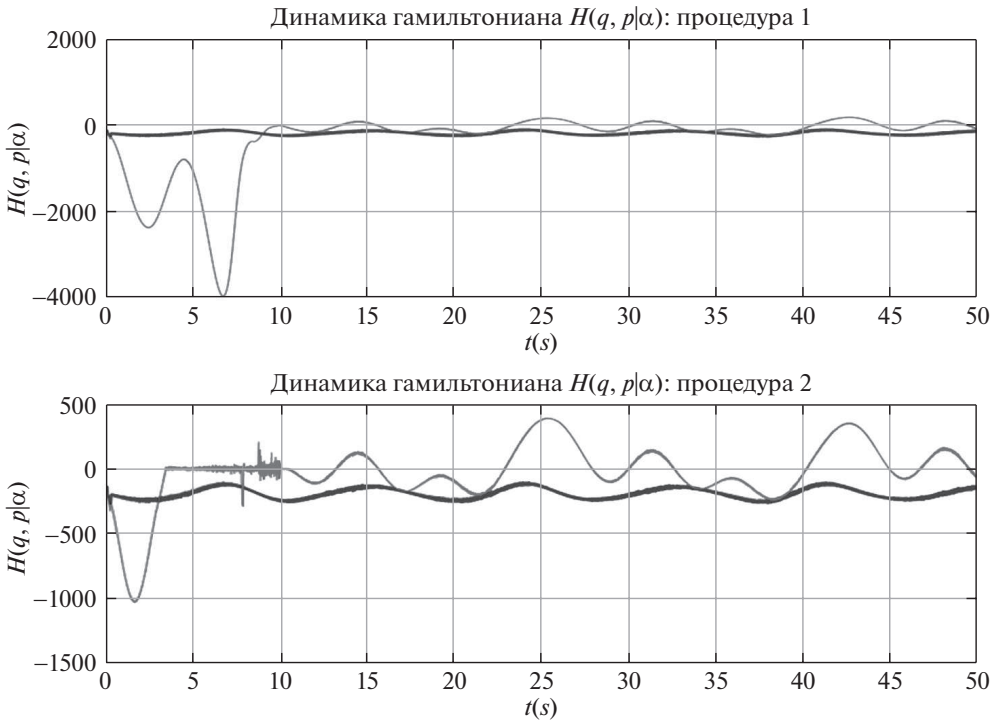

Рис. 12. Гамильтониан.

хорошую работоспособность предложенного подхода в то время, как МНК практически не работает, застревая в точках локальных экстремумов.

Замечание 3. Предложенный подход может быть эффективно применен к большому классу физических моделей, где рассматривается движение релятивистских частиц в электромагнитных полях, так как в этих системах отсутствуют непотенциальные силы, а следовательно, их можно отнести к классу консервативных систем, допускающих применение формализма Гамильтона.

7. Выводы

- В настоящей работе предложен подход для параметрической идентификации, основанный на первых интегралах гамильтоновой системы.
- Этот подход требует онлайн-измерений соответствующих обобщенных координат и применения наблюдателя типа “супер-твист” для оценки их производных и обобщенных импульсов.
- Численное моделирование процедур “стабилизации” (25) и (26) иллюстрирует работоспособность предложенного подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Astrom, K.J. and Eykhoff, P., System Identification-A Survey, *Automatica*, 1971, vol. 7, no. 2, pp. 123–162.

2. Seinfeld, J.H., Nonlinear Estimation Theory Industrial & Engineering Chemistry. 1970. V. 62. No. 1. P. 32–42.

3. *Billings S.A.* Identification of nonlinear systems–a survey // IEE Proc. D (Control Theory and Applications). 1980. V. 127(6). P. 272–285.

4. *Bard J.* Nonlinear parameter estimation. Academic Press. New York and London. 1974.

5. *Leal D.J., Georgantzis G., Roberts P.D.* Parameter estimation in uncertain models of nonlinear dynamic systems // Electron. Lett. 1977. V. 14. No. 22. P. 718–720.

6. *Lawrence P.J., Rogers G.J.* Recursive identification for system models of transfer function type // IFAC Proc. Darmstadt. 1979. V. 12. No. 8. P. 283–288.

7. *Kenneth R.M., Glen R.H., Dan O.* Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and N-Body Problem. Second Edition. Springer Nature Switzerland AG, 2017.

8. *Primera J.R., Sanchez M., Romero M., Sierraalta A., Ruette F.* Analysis of parametric functionals in semiempirical approaches using simulation techniques // Journal of Molecular Structure: THEOCHEM. 1999. V. 469. P. 177–190.

9. *Levant A.* Robust exact differentiation via sliding mode technique // Automatica. 1998. V. 34. No. 3. P. 379–384.

10. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.

11. *Shtessel Yu., Edwards C., Fridman L., Levant A.* Sliding Mode Control and Observation. Birkhauser. New York. 2014.

12. *Noel J., Kerschen C.* Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. V. 83. P. 2–35.

13. *Kerschen G., Worden K., Vakakis A., Golinval J.-C.* Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics // Mechanical Systems and Signal Processing. 2006. V. 20. No. 3. P. 505–592.

14. *Norton J.* An Introduction to Identification // Academy Press London. 1986.

15. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука. 1983.

16. *Poznyak A.* Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers: Deterministic Systems. Elsevier. Amsterdam-NY. 2008. V. 1.

17. *Reyhanoglu M., van der Schaft A., McClamroch N.H., Kolmanovsky I.* Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. V. 44. No. 9. P. 1663–1671.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 30.01.2020

После доработки 20.05.20209

Принята к публикации 25.05.2020