

© 2020 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева)

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Рассматривается теоретико-игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Доказаны необходимые условия существования решения системы нелинейных уравнений, включающих в себя степенные функции. На основе разложения степенных функций в ряды Тейлора проведена линеаризация системы уравнений оптимальных реакций агентов. В результате линеаризованная система зависит от вектора параметров линеаризации, а расчет игровых равновесий сводится к подбору неподвижных точек нелинейных отображений. Исследованы отклонения значений приближенного равновесия от точного решения. Выведены аналитические формулы расчета равновесий в игре олигополистов для произвольного уровня лидерства по Штакельбергу. Анализ дуополии и триполии показал, что равновесие в игре является следствием двух факторов: во-первых, вогнутость функции издержек агента, т.е. положительный эффект расширения масштаба, ведет росту его выигрыша по сравнению с агентами, имеющими выпуклые функции издержек, т.е. отрицательный эффект расширения масштаба; во-вторых, выигрыш агента повышается, если он является лидером, однако преимущество окружения по типу функции издержек снижает воздействие второго фактора.

Ключевые слова: олигополия, игра Штакельберга, степенная функция издержек, многоуровневое лидерство, линеаризация.

DOI: 10.31857/S0005231020090068

1. Введение

Линейная модель выбора оптимальных действий агентов рынка олигополии, в которой обратная функция спроса и функции издержек агентов являются линейными, широко использовалась [1–5] для анализа равновесий в игре олигополистов, поскольку эта модель допускает простое аналитическое решение в виде равновесия Курно–Нэша [6, 7]. Нелинейная модель выбора оптимальных действий, в которой обратная функция спроса линейная, а функции издержек агентов являются нелинейными, использовалась реже [8–11], так как не позволяет найти аналитическое решение. В этом случае особые вычислительные трудности возникают при анализе игры агентов с лидером (лидерами) по Штакельбергу [12] первого и последующих уровней [13, 14], поскольку для нахождения предположительных вариаций [15] необходимо решать системы нелинейных уравнений на каждом уровне и для каждого агента. Формы таких систем уравнений получены [16] для лидеров по Штакельбергу первого и второго уровня, однако равновесия были рассчитаны численными методами. Формулы предположительных вариаций в

явном виде [17] позволяют анализировать характер их изменения при вариациях действий агентов, что необходимо для вычисления равновесий при наличии лидеров по Штакельбергу второго и более высоких уровней, а ограничение [17] на модуль суммы предположительных вариаций позволяет оценить диапазоны возможных равновесий.

В данной статье ставится задача поиска аналитического решения равновесий Курно–Нэша в нелинейной модели олигополии для произвольного уровня лидерства.

2. Методология

Рассмотрим следующую нелинейную модель рынка олигополии. Пусть агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли)

$$(1) \quad \Pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), \quad Q_i \geq 0, \quad i \in N = \{1, \dots, n\}$$

при линейной функции цены спроса на товар от суммарного объема предложения всех агентов рынка

$$(2) \quad P(Q) = a - bQ, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i,$$

и нелинейных (степенных) функциях издержек агентов

$$(3) \quad C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}, \quad C_{Fi} > 0, \quad B_i > 0, \quad \beta_i \in (0, 2), \quad i \in N,$$

где Q_i , Π_i — действие (объем выпуска) и функция полезности (прибыль) i -го агента; N — множество агентов рынка; n — количество агентов, т.е. количество элементов множества N ; P , Q — равновесная цена и суммарный объем рынка; C_{Fi} , B_i , β_i — коэффициенты функций издержек агентов, C_{Fi} интерпретируется как постоянные издержки; a , b — коэффициенты обратной функции спроса. Степенная функция издержек (3) в диапазоне коэффициентов $\beta_i \in (0, 2)$ обобщает два типа агентов: агент с положительным эффектом расширения масштаба описывается вогнутой функцией издержек при $0 < \beta_i < 1$, агент с отрицательным эффектом — выпуклой функцией при $1 < \beta_i < 2$.

Модели выбора оптимальных (символ «*») действий агентов с учетом условий (1)–(3) запишем в виде

$$(4) \quad Q_i^* = \arg \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) = \arg \max_{Q_i \geq 0} \left\{ (a - bQ)Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i} \right\}, \quad i \in N.$$

Равновесие Нэша в системе (4) представляет собой вектор оптимальных действий агентов при выбранных действиях окружения и определяется путем решения системы *уравнений реакций* следующего типа (при некотором известном векторе предположительных вариаций):

$$(5) \quad \frac{\partial \Pi_i(Q_i, x_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где $x_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация в уравнении реакции i -го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j -го агента в ответ на единичный прирост выпуска i -го агента. Поскольку согласно модели (4) оптимумы агентов зависят не только от собственного действия i -го агента Q_i , но и от действий окружения через Q , то последняя зависимость представлена в системе (5) как функция полезности $\Pi_i(Q_i, x_{ij})$ от вектора предположительных вариаций, характеризующих влияние действий окружения на изменение Q .

Стратегическая игра Γ есть кортеж множества агентов, множества стратегий агентов, множества функций полезности (прибыли) агентов и множества уровней лидерства

$$(6) \quad \Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, G \rangle,$$

где $G = (M_0, M_1, \dots, M_L)$ — множество уровней лидерства агентов; L — количество уровней лидерства агентов; M_r ($r = 0, \dots, L$) — множества агентов; M_0 — множество ведомых агентов; M_r ($r = 1, \dots, L$) — множество лидеров r -го уровня.

В дальнейшем подмножество агентов окружения i -го агента, имеющих один и тот же уровень лидерства, обозначено символом $M = \{l \in N \setminus i\}$, число элементов этого множества обозначено символом $m = n - 1$.

Уровни лидерства определяются следующим образом. Нулевой уровень, соответствующий ведомому η_0 -му агенту, имеет место, если в η_0 -м уравнении системы (5) полагается $x_{\eta_0 j}^0 = 0 \forall j \in N \setminus \eta_0$, где верхний индекс предположительной вариации обозначает уровень лидерства r . Первый уровень лидерства η_1 -го агента возникает, если в η_1 -м уравнении системы (5) вариации $x_{\eta_1 j}^1$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_1} остальных $(N - 1)$ уравнений (5), в которых полагается $x_{ij}^0 = 0 \forall j \in N \setminus i$. Произвольный r -й уровень лидерства η_r -го агента возникает, если в η_r -м уравнении системы (5) вариации $x_{\eta_r j}^r$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_r} остальных $(N - 1)$ уравнений (5), в которых полагается $x_{ij} = x_{ij}^{r-1} \forall j \in N \setminus i$.

Решения игры (6) на r -м уровне лидерства i -го агента для модели выбора действий (4) были получены [16] в виде системы (5) уравнений равновесия Нэша:

$$(7) \quad F_i^r = a - bQ - bQ_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) - B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1} = 0, \quad Q_i > 0, \quad i \in N,$$

при условии

$$(8) \quad u_i - S_i^r < 0, \quad i \in N,$$

с учетом следующих обозначений:

$$(8a) \quad u_i = -2 - \frac{B_i \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}}{b}, \quad S_i^r = \sum_{l \in N \setminus i} x_{il}^r, \quad i \in N,$$

где $u_i(\bullet)$, $i \in N$, — непрерывные и дифференцируемые по Q_i функции, характеризующие влияние нелинейности функций издержек агентов на унимодальность функции полезности i -го агента (при $u_i = -2$ система (3) является линейной); S_i^r — величина суммы предположительных вариаций i -го агента относительно действий окружения на r -м уровне лидерства; $F_i^r(\bullet)$, $i \in N$, — непрерывные и дифференцируемые по Q_i функции.

По сравнению с линейной моделью, для которой условие (8) имеет вид $-2 - S_i^r < 0$, $i \in N$, в нелинейной модели (4) функция полезности агента может быть неунимодальной не только вследствие влияния действий окружения, т.е. ситуаций, когда $S_i^r < -2$, но и в результате положительного эффекта расширения масштаба функции издержек агента. Поэтому введем предположение о том, что темп снижения предельных издержек при возрастающей отдаче от масштаба (т.е. $\beta_i < 1$) не может быть больше темпа снижения цены при увеличении объема предложения

$$(8b) \quad |MC'_{iQ_i}| = B_i \beta_i |\beta_i - 1| Q_i^{\beta_i - 2} < b \quad \forall \beta_i < 1,$$

где $MC_i = C'_{iQ_i} = B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1}$ — предельные издержки i -го агента. Предположение (8b) гарантирует выполнение условия (8), если не выполнено условие $|S_i^r| < 1$, так как $|u_i| > 1$ при условии (8b).

В дальнейшем символом «*» обозначены оптимальные действия агентов как решения системы уравнений (7).

Поставим задачу нахождения приближенного решения системы (7) в явном виде при некотором известном векторе предположительных вариаций, соответствующем заданному множеству уровней лидерства G .

3. Результаты

Система нелинейных уравнений (7) не имеет аналитического решения, поэтому проведем линеаризацию уравнений (7), которая позволяет свести решение к подбору неподвижных точек нелинейных отображений относительно параметров линеаризации. Линеаризация основана на следующем утверждении, доказательство которого приведено в Приложении.

Утверждение 1. Система (7) имеет решение $\mathbf{Q}^ = \{Q_i^*, i \in N\}$, если выполняются условие (8) и следующие условия:*

$$(9a) \quad \begin{aligned} &\bar{Q}_i \leq Q_i^* \leq Q_{\max}, \quad |x_{ji}| \neq |u_i - S_i^r|, \\ &F_i^r(\kappa_j) \begin{cases} > 0 & \text{при } |x_{ji}^r| < |u_i - S_i^r|, \\ < 0 & \text{при } |x_{ji}^r| > |u_i - S_i^r|, \end{cases} \quad \forall i, j \in N, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_j &= \frac{a}{b} - \sum_{k \in N \setminus (i, j)} \bar{Q}_k - Q_{\max} - Q_{\max} (1 + S_j^r) - \frac{B_j \beta_j Q_{\max}^{\beta_j - 1}}{b}, \\ Q_{\max} &= \frac{a - MC_{\min}}{b}, \quad MC_{\min} = \min_{i \in N} (B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1}), \end{aligned}$$

$$F_i(\kappa_j) = a - b \left(Q_{\max} + \sum_{k \in N \setminus (i,j)} \bar{Q}_k + \kappa_j \right) - b \kappa_j (1 + S_i^r) - B_i \beta_i \kappa_j^{\beta_i - 1},$$

$$\bar{Q}_j = \left(\frac{B_j \beta_j |\beta_j - 1|}{b(2 + S_j^r)} \right)^{\frac{1}{2 - \beta_j}} \quad \text{при } \beta_j < 1, \quad \bar{Q}_j = 0 \quad \text{при } \beta_j > 1.$$

Если система (7) имеет решение, то уравнения

$$(9b) \quad \begin{aligned} \hat{F}_i^r &= \hat{a} - \hat{b}q - \hat{b}q_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) - \hat{B}_i \beta_i \nu_i^{\beta_i - 1} - \\ &- \hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1) \nu_i^{\beta_i - 2} (q_i - \nu_i) = 0, \quad i \in N \end{aligned}$$

относительно неизвестных $q_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}} \in (0, 1)$ при $q = \sum_{i \in N} q_i$ с коэффициентами

$$(9c) \quad \hat{a} = Q_{\max} a, \quad \hat{b} = Q_{\max}^2 b, \quad \hat{B}_i = Q_{\max}^{\beta_i} B_i, \quad i \in N$$

имеют решения $\hat{Q}_i^*$, отклонения которых $\Delta Q_i^* = Q_i^* - \hat{Q}_i^*$ от точного решения Q_i^* при условиях $|q_i - \nu_i| < r_i$, $\nu_i < q_i$, $i \in N$ не превышают по модулю значения

$$(9d) \quad |\Delta Q_i^*| \leq \xi_i, \quad \xi_i = Q_{\max} \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \frac{|u_{i \max} + 2| |\beta_i - 2| \Omega_i^{\beta_i - 3}}{\left| 2 - (u_{i \max} + 2) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_{\max} \right|}, \quad i \in N,$$

причем

$$(9e) \quad \lim_{r \rightarrow 0} |\Delta Q_i^*| = 0, \quad i \in N,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \nu_i + \theta_i (q_i - \nu_i), \quad \theta_i, \nu_i \in (0, 1), \quad r_i \in (0, \Omega_i), \quad u_{i \max} = u_i(Q_{\max}), \\ S_{\max} &= \frac{m}{m - 1 - v_{\max}}, \quad v_{\max} = \frac{1 - \varepsilon}{m} \left(2 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

$\varepsilon \ll 1$ — малое положительное число, $m \geq 2$ — количество агентов окружения i -го агента.

Условия (9а) в случае дуополии ($n = 2$) допускают следующую геометрическую интерпретацию: построим численно по уравнению (7) второго агента линию реакции $Q_2^*(Q_1)$, а линию реакции первого агента $Q_2(Q_1^*)$ построим, выразив Q_2 из уравнения (7) первого агента. Тогда первое условие (9а) устанавливает интервалы монотонного убывания этих реакций, второе условие (9а) обеспечивает различие их угловых коэффициентов, т.е. наличие точки пересечения реакций, а третье условие (9а) требует, чтобы точка пересечения принадлежала интервалам монотонности.

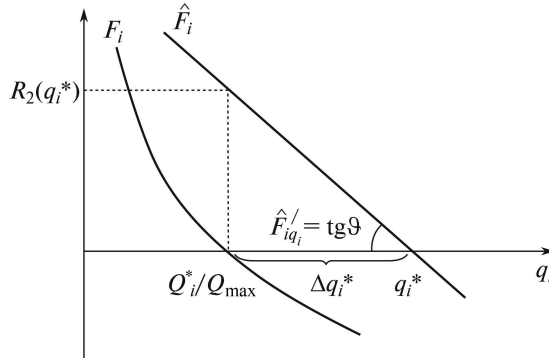


Рис. 1. Графический анализ погрешности линеаризации.

Условия (9d), (9e) показывают, что корректный подбор параметров ν_i с учетом $|q_i - \nu_i| < r_i$ и $\nu_i < q_i$ при заданном малом положительном числе $r_i \in (0, \Omega_i)$ позволяет достичь необходимой точности решения системы (7). Существование параметров ν_i , удовлетворяющих этим условиям, доказано ниже, в утверждении 2.

Графический анализ отклонения (9d) решения q_i^* системы (9b) от точного решения Q_i^* системы (7) показан на рис. 1.

На основе результатов утверждения 1 систему уравнений (7) после линеаризации можно привести к более компактному виду, для которого легко получить общее решение, что сформулировано в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. Уравнения (9b) сводятся к виду

$$(10a) \quad \begin{aligned} \delta_i q_i + q_{-i} &= \alpha_i, \quad i \in N, \quad \alpha_i = \frac{\hat{a} - \hat{B}_i \beta_i (2 - \beta_i) \nu_i^{\beta_i - 1}}{\hat{b}}, \\ \delta_i^r &= 2 + \frac{\hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1)}{\hat{b}} \nu_i^{\beta_i - 2} + S_i^r, \quad S_i^r = \sum_{k \in N \setminus i} x_{ik}^r, \end{aligned}$$

где $q_{-i} = \sum_{k \in N \setminus i} q_k$ — сумма действий окружения i -го агента; если выполняются условия

$$(10b) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta_j^r - 1} \neq -1 \wedge \delta_j^r \neq 1 \quad \forall j \in N,$$

то система (10a) имеет единственное решение и корни вычисляются по следующим формулам:

$$(10c) \quad q_i^* = \frac{\alpha_i \left[\prod_{j=1 \setminus i}^n (\delta_j^r - 1) + \sum_{j=1 \setminus i}^n \prod_{\gamma=1 \setminus j, i}^n (\delta_\gamma^r - 1) \right] - \sum_{j=1 \setminus i}^n \left[\alpha_j \prod_{\gamma=1 \setminus i, j}^n (\delta_\gamma^r - 1) \right]}{\prod_{j=1}^n (\delta_j^r - 1) + \sum_{j=1}^n \prod_{\gamma=1 \setminus j}^n (\delta_\gamma^r - 1)}.$$

Для решения (10с) существует набор параметров ν_i^* , при котором выполняются следующие условия утверждения 1:

$$(10d) \quad |q_i - \nu_i^*| < r_i, \quad \Omega_i = \nu_i^* + \theta_i (q_i - \nu_i^*), \quad \theta_i, \nu_i^* \in (0, 1), \\ r_i \in (0, \Omega_i), \quad \nu_i^* < q_i, \quad i \in N,$$

если для всех $i \in N$

$$(10e) \quad n < \frac{a}{bQ_{\max}} + u_{i\max}, \quad \theta_i \in \left(\frac{r_i - \nu_i^*}{r_i}, 1 \right) \quad \text{при } r_i > \nu_i^*.$$

В частных практически важных случаях формула (10с) имеет следующий вид:

$$(10f) \quad q_i^* = \frac{\alpha_i \delta_j^r - \alpha_j}{\delta_1^r \delta_2^r - 1}, \quad i \neq j = 1, 2 \quad \text{при } n = 2, \\ q_i^* = \frac{\alpha_i \left(\prod_{j=1 \setminus i}^3 \delta_j^r - 1 \right) - \sum_{j=1 \setminus i}^3 \prod_{\gamma=1 \setminus i}^3 \alpha_j \delta_\gamma^r + \sum_{j=1 \setminus i}^3 \alpha_j}{\delta_1^r \delta_2^r \delta_3^r - \delta_1^r - \delta_2^r - \delta_3^r + 2} \quad \text{при } n = 3.$$

Таким образом, решение системы уравнений (7) сведено к задаче поиска неподвижной точки отображения $q_i(\nu_i) = \nu_i$, заданного формулами (10с), причем существование этой неподвижной точки доказано при условиях (10е). Подбор параметров линеаризации ν_i^* , удовлетворяющих условиям (10d), осуществляется эвристически, путем последовательного вычисления равновесий по формулам (10с) и проверки условий (10d).

Сравнение формул (8а) и (10а) показывает, что в случае выполнения условия (9е) имеет место равенство¹ $\delta_i^r = -(u_i - S_i^r)$. Поэтому выполнение условий (8), (9а) существования решения системы (7) не гарантирует выполнение условия (10b) и наоборот. Следовательно, применение формул (10с) должно сопровождаться проверкой условий (8), (9а).

Решение (10f) для случая дуополии допускает сравнение с известным равновесием Курно [18] при линейных функциях издержек. В этом случае $\beta_i = 1$, а параметр B_i имеет смысл предельных издержек агентов, поэтому из формул (10а) с учетом формул (9с) следует, что

$$\alpha_i = \frac{\hat{a} - \hat{B}_i}{\hat{b}} = \frac{a - B_i}{bQ_{\max}}, \quad \delta_i = 2,$$

следовательно, из формулы (10f) при $n = 2$ получим

$$q_i^* = \frac{2(a - B_i) - (a - B_j)}{3bQ_{\max}}, \quad i, j = 1, 2,$$

а в случае равенства параметров типа агентов, т.е. $B_i = B_j = B$, отсюда следует формула равновесного выпуска агентов Курно $q_i^* = \frac{a-B}{3bQ_{\max}} \Rightarrow Q_i^* = \frac{a-B}{3b}$, идентичная формуле [18].

¹ Поскольку подстановка из (9с) $\hat{b} = Q_{\max}^2 b$, $\hat{B}_i = Q_{\max}^{\beta_i} B_i$ в формулу δ_i^r (10а) в случае $q_i = \nu_i$ и $q_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}}$ приводит к формуле $\delta_i^r = 2 + \frac{Q_{\max}^{\beta_i} B_i \beta_i (\beta_i - 1)}{Q_{\max}^2 b} \left(\frac{Q_i}{Q_{\max}} \right)^{\beta_i - 2} + S_i^r = -u_i + S_i^r$.

4. Численные эксперименты

На точность линеаризации нелинейных уравнений реакции (7) в виде (9b) влияет характер функций F_i^r и их близость к функциям $\hat{F}_i^r$ в достаточно широком диапазоне значений параметров рынка a , b и параметров типов агентов B_i , β_i , $i \in N$. Поскольку $b \neq 0$, то допустимо представление функций (7) в следующем виде: $F_i^r = \frac{a}{b} - Q - Q_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r\right) - \frac{B_i}{b} \beta_i Q_i^{\beta_i - 1}$. Анализ [19] телекоммуникационных компаний РФ показал, что у всех фирм наблюдается положительный эффект расширения масштаба, т.е. $\beta_i < 1$, коэффициент издержек $B_i \in (1, 3)$, если $Q_i \in (0, 500)$ млрд мин, параметр функции спроса $a \approx \approx B_i$, параметр $b = 0,0009$ руб./мин. Поэтому будем рассматривать соотношение, далее называемое коэффициентом спроса и издержек, $\sigma = \frac{B_i}{b} \approx \frac{a}{b} \approx 1000$ как параметр функции F_i^r , а при моделировании отрицательного эффекта масштаба в связи с отсутствием эмпирических данных примем $\sigma = \frac{a}{b}$ и $\frac{B_i}{b} = k\sigma$, $k < 1$. Также в качестве параметра этой функции рассмотрим сумму предположительных вариаций в функции F_i^r i -го агента S_i^r . Отметим, что было получено [17] следующее ограничение на сумму предположительных вариаций: $|S_i^r| < \frac{m}{m-1-v}$, где $v < 1 \ \forall m \geq 2$, причем если для всех агентов имеет место убывающая отдача от расширения масштаба, т.е. $\beta_i > 1 \ \forall i \in N$, то данное ограничение более жесткое: $|S_i^r| < 1 \ \forall m \geq 1$. Поэтому исследуем трехпараметрическую функцию $F_i^r = \sigma - Q - Q_i (1 + S_i^r) - k\sigma \beta_i Q_i^{\beta_i - 1}$, $k = \begin{cases} 1 \ \forall \beta_i < 1, \\ 0,3 \ \forall \beta_i > 1 \end{cases}$ в диапазоне $Q_i \in (100, Q_{\max})$, $Q_{\max} = 500$ млрд мин при различных значениях параметров σ , β_i , S_i^r .

Аналогично проведем моделирование линеаризованных функций (9b), которые представим в виде

$$\hat{F}_i^r = \frac{\hat{a}}{\hat{b}} - q - q_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r\right) - \frac{\hat{B}_i}{\hat{b}} \beta_i \nu_i^{\beta_i - 1} - \frac{\hat{B}_i}{\hat{b}} \beta_i (\beta_i - 1) \nu_i^{\beta_i - 2} (q_i - \nu_i).$$

С учетом (9с) коэффициенты этих функций вычисляются по формулам

$$\frac{\hat{a}}{\hat{b}} = \frac{Q_{\max} a}{Q_{\max}^2 b} = \frac{a}{Q_{\max} b} = \sigma Q_{\max}^{-1}, \quad \frac{\hat{B}_i}{\hat{b}} = \frac{Q_{\max}^{\beta_i} B_i}{Q_{\max}^2 b} = k\sigma Q_{\max}^{\beta_i - 2}.$$

Поэтому вместо функции $\hat{F}_i^r$ исследуем функцию

$$F_i^{\sim} = \sigma Q_{\max}^{-1} - q - q_i (1 + S_i^r) - k\sigma Q_{\max}^{\beta_i - 2} \beta_i \left[\nu_i^{\beta_i - 1} + (\beta_i - 1) \nu_i^{\beta_i - 2} (q_i - \nu_i) \right]$$

при $Q_{\max} = 500$ и различных значениях параметров σ , β_i , S_i^r , причем ось абсцисс переведем в единицы измерения $Q_i = q_i Q_{\max}$.

Исследуем адекватность оценки линеаризации (9b) по формуле (9d), для чего сравним фактическое отклонение решения линеаризованной системы уравнений (9b) от точного решения системы (7), вычисленное по формуле $|\Delta Q_{i\text{факт}}^*| = |Q_i^* - \hat{Q}_i^*|$, и оценку максимального отклонения ξ_i , вычисленную

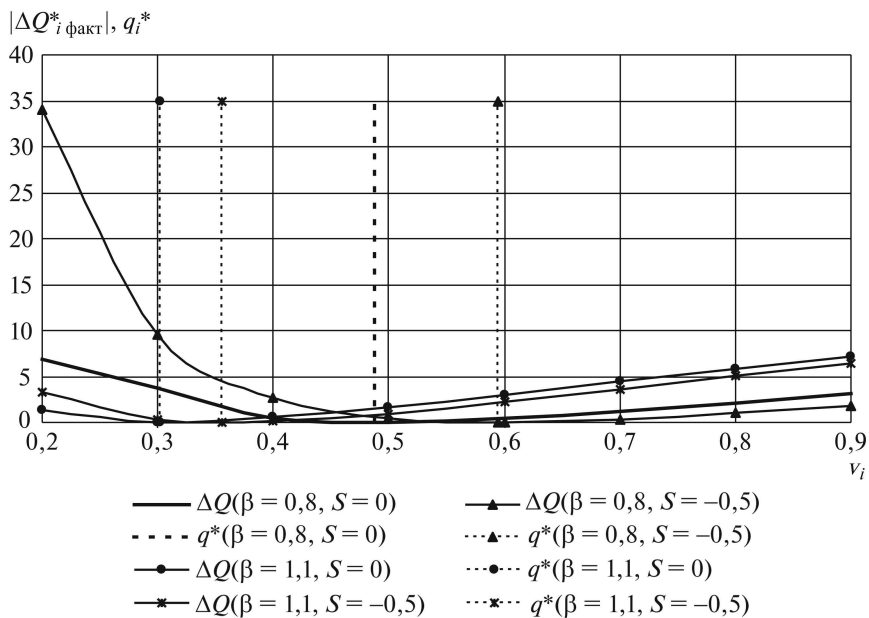


Рис. 2. Фактическое отклонение $|\Delta Q^*_{i \text{ факт}}|$ решения линеаризованной системы от точного решения и точное решение q_i^* при $n = 2$, $\sigma = 1000$.

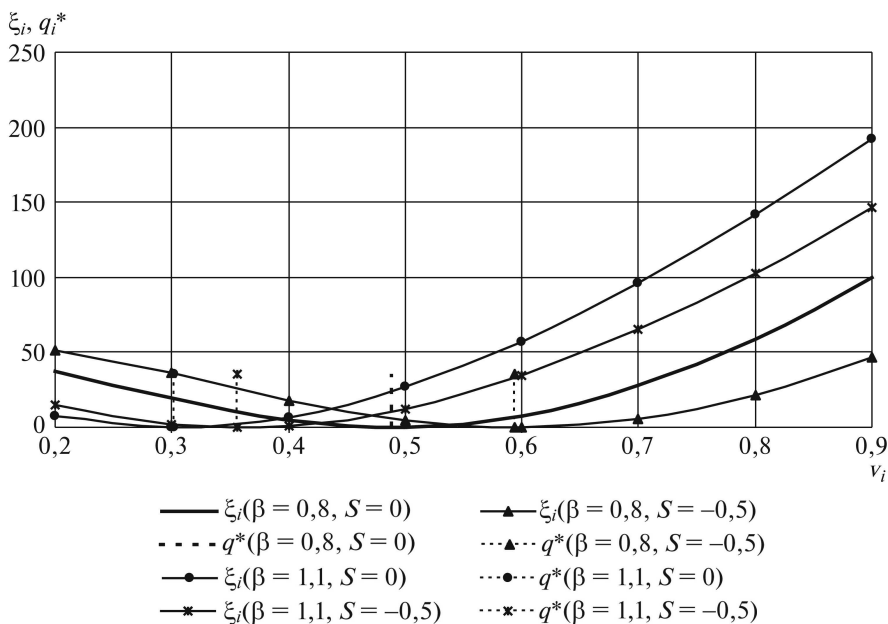


Рис. 3. Максимальное отклонение ξ_i решения линеаризованной системы от точного решения и точное решение q_i^* при $n = 2$, $\sigma = 1000$.

по формуле (9d). При моделировании отклонения ξ_i используем двухпараметрическую функцию (8) в виде

$$u_i = -2 - \frac{B_i \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}}{b} = -2 - k \sigma \beta_i (\beta_i - 1) Q_i^{\beta_i - 2}$$

при различных значениях σ, β_i .

На рис. 2, 3 в зависимости от параметра линеаризации ν_i показаны отклонения $|\Delta Q_{i\text{факт}}^*|$ и ξ_i , а также точное решение q_i^* для случая дуополии (т.е. при $n = 2$) при коэффициенте спроса и издержек, равном $\sigma = 1000$, для случая однотипных агентов (т.е. $\beta = \beta_i \forall i \in N$) при различных типах эффекта расширения масштаба ($\beta < 1$ и $\beta > 1$) и различных значениях суммы предположительных вариаций ($S_i^r = 0$ и $S_i^r = -0,5$). На рис. 4, 5 отклонения показаны для дуополии и триполии (т.е. при $n = 2, 3$) при положительном эффекте расширения масштаба ($\beta < 1$) и нулевой сумме предположительных вариаций для различных значений коэффициента спроса и издержек σ .

Во всех случаях видно, что $|\Delta Q_{i\text{факт}}^*| < \xi_i$, т.е. фактическая точность линеаризации существенно превышает предельную оценку, так как для наглядности высоты линий q_i^* на обоих рисунках одинаковы. Кроме того, видно, что отклонения $|\Delta Q_{i\text{факт}}^*|$ и ξ_i практически совпадают и достигают наименьших значений, близких к нулю, при $\nu_i = q_i^*$, что подтверждает выполнение условий (10d), т.е. возможность нахождения достаточно точного решения системы (7) по линеаризованной системе (9b).

На рис. 6 в зависимости от действия каждого из агентов Q_i при значении параметра линеаризации $\nu_i = q_i^*$ показаны сплошными линиями функции оптимальных реакций F_i и пунктирными линиями линеаризованные функции $F_i^{\sim}$ для случая дуополии (т.е. при $n = 2$) при коэффициенте спроса и издержек, равном $\sigma = 1000$; графики иллюстрируют точность совпадения решения уравнений (7) и (9b), т.е. совпадения точек пересечения этих функций с осью абсцисс.

Проведем анализ чувствительности решения системы линеаризованных уравнений (10a), вычисленных по формулам (10d), к изменениям параметров рынка и типа агентов. С использованием коэффициента спроса и издержек σ , формулы коэффициентов системы (10a) имеют вид трехпараметрических функций

$$\alpha_i = \frac{\hat{a}}{\hat{b}} - \frac{\hat{B}_i \beta_i^2 \nu_i^{\beta_i - 1}}{\hat{b}} = \sigma Q_{\max}^{-1} - k \sigma Q_{\max}^{\beta_i - 2} \beta_i^2 \nu_i^{\beta_i - 1},$$

$$\delta_i = 2 + k \sigma Q_{\max}^{\beta_i - 2} \beta_i (\beta_i - 1) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_i^r$$

при различных значениях параметров σ, β_i, S_i^r .

Рассмотрим случай *дуополии*, когда функция издержек первого агента имеет положительный эффект расширения масштаба, а именно $\beta_1 = 0,8$, а у второго агента может быть положительный или отрицательный эффект. Опишем эти конstellляции с помощью переменного соотношения параметров типа агентов $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ при $\beta_1 = 0,8$: если $\frac{\beta_2}{\beta_1} < 1,25$, то второй агент имеет положи-

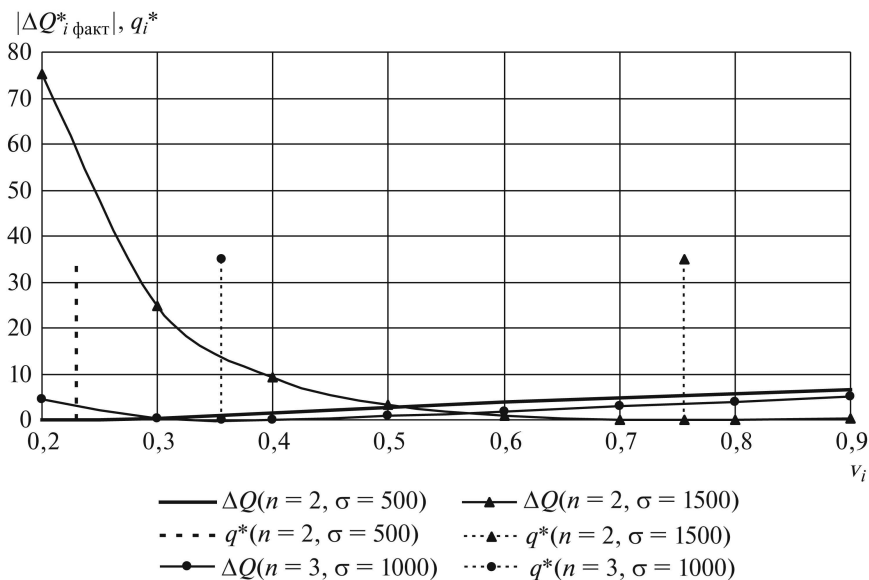


Рис. 4. Фактическое отклонение $|\Delta Q_{i \text{ факт}}^*|$ решения линеаризованной системы от точного решения и точное решение q_i^* при $\beta = 0,8$, $S_i^r = 0$.

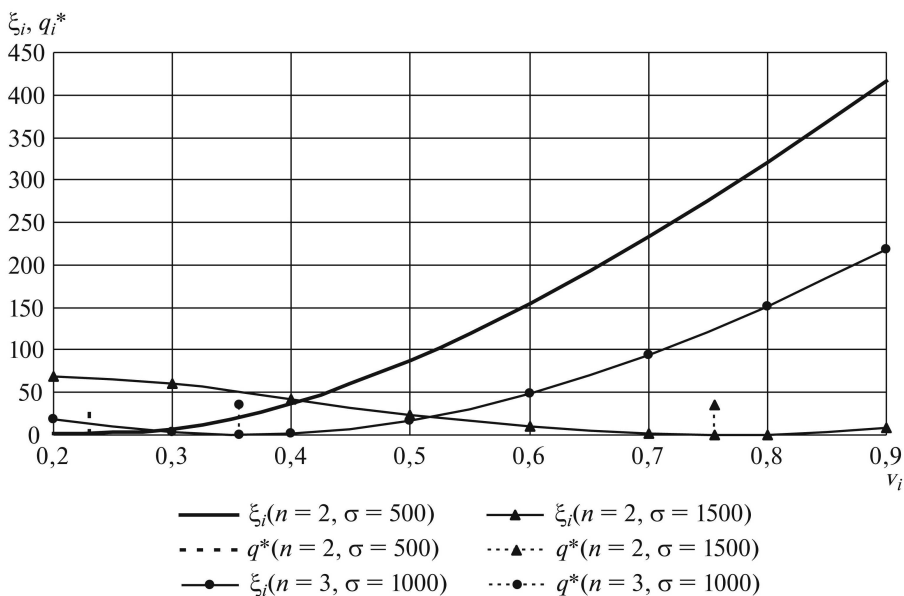


Рис. 5. Максимальное отклонение ξ_i решения линеаризованной системы от точного решения и точное решение q_i^* при $\beta = 0,8$, $S_i^r = 0$.

тельный эффект расширения масштаба, т.е. $\beta_2 < 1$; если $\frac{\beta_2}{\beta_1} > 1,25$, то второй агент имеет отрицательный эффект расширения масштаба, т.е. $\beta_2 > 1$. На рис. 7 изображены зависимости равновесных значений действий агентов q_1^*, q_2^* в дуополии как функции от соотношения параметров типа агентов $\frac{\beta_2}{\beta_1}$.

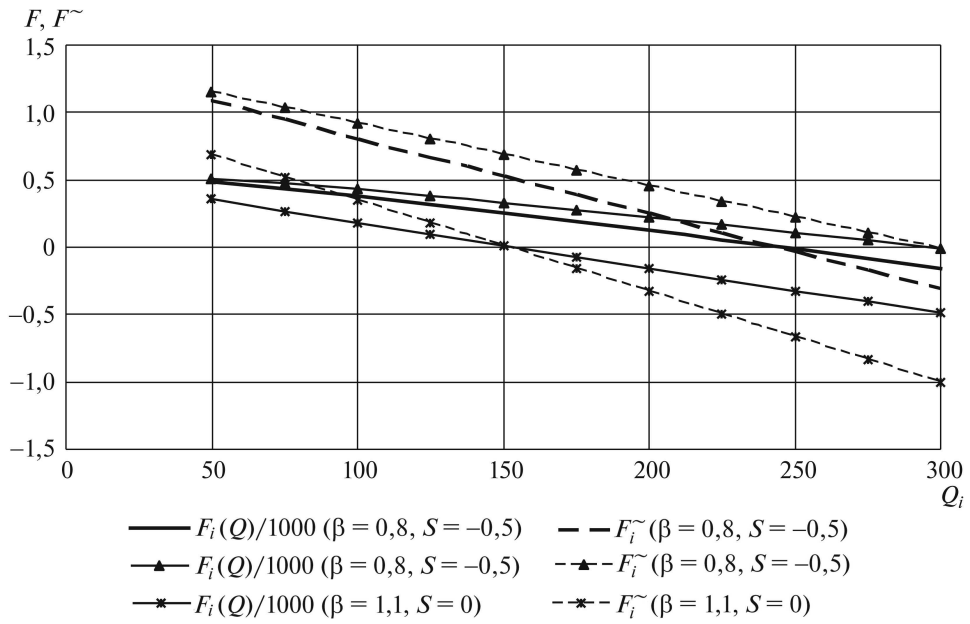


Рис. 6. Функция оптимальной реакции F_i и линейризованная функция $F_i^{\sim}$ при $n = 2, \sigma = 1000$ для $\nu_i = q_i^*$.

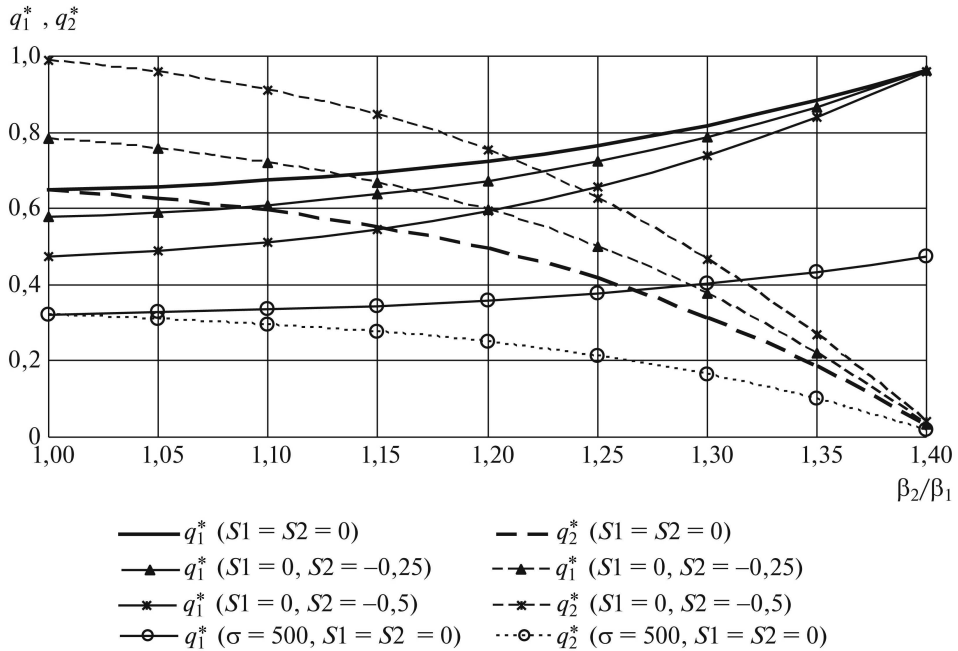


Рис. 7. Зависимости равновесных относительных действий в дуополии от соотношений параметров типа агентов при $n = 2, \sigma = 1000, Q_{\max} = 500, \beta_1 = 0,8, k = 0,2$.

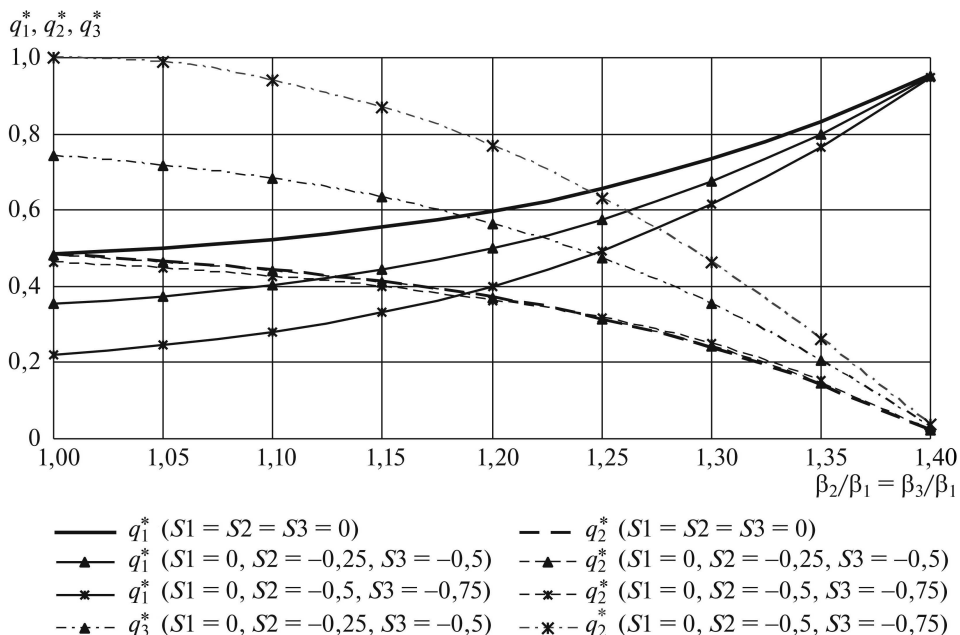


Рис. 8. Зависимости равновесных относительных действий в триполии от соотношений параметров типа агентов при $n = 3$, $\sigma = 1000$, $Q_{\max} = 500$, $\beta_1 = 0,8$, $k = 0,2$.

Все графики построены при значении коэффициента спроса и издержек, равного $\sigma = 1000$, за исключением равновесия при $\sigma = 500$, которое иллюстрирует влияние этого параметра. Базой сравнения является случай агентов Курно при нулевых предположительных вариациях ($S_1 = S_2 = 0$), в котором влияние изменения параметра типа второго агента вполне объяснимо: равновесные действия первого агента увеличиваются, а второго уменьшаются с ростом $\frac{\beta_2}{\beta_1}$, что обусловлено относительным опережением прироста издержек второго агента. Далее, показано влияние лидерства по Штакельбергу второго агента, т.е. увеличения модуля предположительной вариации этого агента ($S_2 = -0,25$; $S_2 = -0,5$; $S_2 = -0,75$), которое выражается в том, что при малых значениях $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ равновесные действия второго агента существенно превышают действия первого, однако при $\frac{\beta_2}{\beta_1} > 1,25$ (т.е. $\beta_2 > 1$) первый агент вновь выигрывает в равновесии. Наконец, влияние изменения коэффициента спроса и издержек до $\sigma = 500$ вызывает одновременный сдвиг равновесных действий агентов в сторону уменьшения.

На рис. 8 представлены зависимости равновесных значений действий агентов в триполии как функции от соотношения параметров типа агентов $\frac{\beta_i}{\beta_1}$, $i = 2, 3$ при $\beta_1 = 0,8$, т.е. параметры типа второго и третьего агентов одинаковы. Поэтому в случае $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ графики q_2^* и q_3^* совпадают и характер влияния относительного изменения параметров функций издержек этих агентов по сравнению с первым агентом аналогичен случаю дуополии: равновесные действия первого агента увеличиваются, а второго и третьего

уменьшаются с ростом $\frac{\beta_i}{\beta_1}$. Далее рассмотрены ситуации, в которых первый агент считается ведомым, второй агент — лидером по Штакельбергу, а третий — лидером по Штакельбергу более высокого уровня, т.е. при $S_1 = 0$ имеет место $S_2 = -0,25$; $S_2 = -0,5$ и $S_3 = -0,5$; $S_3 = -0,75$ соответственно. В результате лидеры получают преимущество в равновесии до тех пор, пока их функции издержек характеризуются положительным эффектом масштаба, т.е. $\frac{\beta_i}{\beta_1} < 1,25$, а в случае $\frac{\beta_i}{\beta_1} > 1,25$ равновесные действия первого агента становятся больше, чем действия лидеров.

5. Заключение

Процессы, протекающие в экономических и технических системах, зачастую нелинейны, поэтому нелинейные модели описывают их наиболее точно. Однако системы нелинейных уравнений, которые описывают оптимальные действия агентов в многоагентных системах, не имеют аналитического решения, что затрудняет исследование таких систем в случае, если одни их состояния зависят от других состояний, например при анализе динамики систем. В игре олигополии эта сложность возникает при анализе лидерства по Штакельбергу различных уровней, когда равновесие на данном уровне вычисляется в зависимости от равновесия на предшествующем уровне.

В статье рассмотрен первый этап разрешения этой проблемы, состоящий в редукции системы нелинейных уравнений оптимальных реакций агентов к системе линейных уравнений, зависящих от вектора параметров линеаризации. Для линеаризованной системы получено аналитическое решение как функция этих параметров. В результате расчет игровых равновесий сводится к подбору неподвижных точек нелинейных отображений. На этом этапе подбор параметров линеаризации осуществлялся эвристически, что тем не менее позволило получить решения игры с удовлетворительной точностью.

Моделирование равновесий для достаточно широкого спектра параметров состояния агентов подтвердило удовлетворительную точность линеаризации, а также продемонстрировало возможности данного подхода в задачах анализа влияния изменения параметров состояния на результирующее равновесие в игре.

Исследование позволило сделать следующие выводы. В игре олигополистов преимущество одного агента по типу функции издержек, т.е. наличие положительного эффекта расширения масштаба, ведет к повышению выигрыша этого агента по сравнению с выигрышами окружения. Лидерство по Штакельбергу одного из агентов также способствует повышению его выигрыша по сравнению с выигрышами окружения, однако преимущество других агентов по типу функции издержек корректирует влияние этого фактора.

Развитие исследований видится, во-первых, в нахождении замкнутой формы решения линеаризованной системы уравнений на основе процедуры вычисления неподвижных точек нелинейных отображений; во-вторых, в направлении применения разработанных расчетных методик к проблеме вычисления равновесий на реальных рынках, например рынке телекоммуникаций, при различных уровнях лидерства агентов с целью оценки их фактических

уровней путем сравнения с реальными состояниями. Результаты также актуальны в связи с увеличением количества агентов свыше трех, например на российском рынке телекоммуникаций, что приводит к усложнению анализа их взаимодействий. Наряду с этим, результаты могут быть использованы при анализе игр на других рынках, а именно на рынках розничной продажи электроэнергии [23–25], поскольку возможность анализа нелинейных систем обеспечивает более точные оценки результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Проведем нормализацию вектора действий агентов из условия $q_i \in (0, 1)$, которому удовлетворяет следующая формула:

$$(П.1) \quad q_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}}, \quad i \in N, \quad Q_{\max} > Q_i, \quad i \in N.$$

Значение $Q_{\max} = \frac{a - MC_{\min}}{b}$, $MC_{\min} = \min_{i \in N} (B_i Q_i^{\beta_i - 1})$ определено из формулы объема рынка олигополии при бесконечно большом количестве фирм [18]. Коэффициенты уравнений (7) для нормализованного вектора действий найдем из условия равенства критерия (1) при векторах действий q_i , $i \in N$ и Q_i , $i \in N$:

$$(П.2) \quad (\hat{a} - \hat{b}q) q_i - C_{Fi} - \hat{B}_i q_i^{\beta_i} = (a - bQ) Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i}, \quad i \in N.$$

Подставив в это выражение (П.1) и сравнив коэффициенты при одинаковых степенях вектора действий, получим формулы (9с). Следовательно, (7) можно записать в виде

$$(П.3) \quad \hat{F}_i = \hat{a} - \hat{b}q - \hat{b}q_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) - \hat{B}_i \beta_i q_i^{\beta_i - 1} = 0, \quad i \in N.$$

Нелинейный компонент уравнений (П.3) есть функция $f(q_i) = \hat{B}_i \beta_i q_i^{\beta_i - 1}$. В окрестности числа ν_i , такого что $\nu_i \in (0, 1)$, $\nu_i < q_i$, разложение этой функции в ряд Тейлора имеет вид

$$\bar{f}(q_i) = f(\nu_i) + f'(\nu_i)(q_i - \nu_i) + \frac{f''(\nu_i)}{2!}(q_i - \nu_i)^2 + \dots$$

Если существует такое число $\Omega_i = \nu_i + \theta_i(q_i - \nu_i)$, что $\nu_i < \Omega_i < q_i$, иначе говоря $\theta \in (0, 1)$, то этот ряд имеет остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа [20], вычисляемый по следующей формуле:

$$(П.4) \quad R_k(q_i) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\Omega_i) (q_i - \nu_i)^k = \frac{(q_i - \nu_i)^k}{k!} \frac{\Omega_i^{\beta_i}}{\Omega_i^{k+1}} \hat{B}_i \beta_i \prod_{j=1}^k (\beta_i - j).$$

Ряд сходится, если $|q_i - \nu_i| < r_i$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(q_i) = 0$, поэтому зададим малое число r_i , такое что $0 < r_i < \Omega_i$, и при этом покажем существование предела последовательности остаточных членов. Поскольку $r_i \in (0, \Omega_i)$, то $\Omega_i > q_i - \nu_i$, значит, $\frac{(q_i - \nu_i)^k}{\Omega_i^k} > \frac{(q_i - \nu_i)^{k+1}}{\Omega_i^{k+1}}$, и $k! = \prod_{j=1}^k j$, $j \geq |\beta_i - j|$, значит, $\frac{\prod_{j=1}^k |\beta_i - j|}{\prod_{j=1}^k j} > \frac{\prod_{j=1}^{k+1} |\beta_i - j|}{\prod_{j=1}^{k+1} j}$. Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k(q_i) = 0$, значит, ряд Тейлора с остаточным членом (П.4) сходится к функции $f(q_i) = \hat{B}_i \beta_i q_i^{\beta_i - 1}$.

С учетом только первого члена ряда разложение функции $f(q_i)$ имеет вид $\bar{f}(q_i) = \hat{B}_i \beta_i \nu_i^{\beta_i - 1} + \hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1) \nu_i^{\beta_i - 2} (q_i - \nu_i)$. Поэтому (П.3) можно представить в виде (9b). Остаточный член (П.4) при этом равен

$$(П.5) \quad R_2(q_i) = \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1) (\beta_i - 2) \Omega_i^{\beta_i - 3}.$$

Оценим погрешность замены решения системы (7) на решение системы (9b). Функции F_i , описывающие левые части уравнений (7), в окрестности локального максимума критерия (1) являются убывающими по Q_i , поскольку $F'_{iQ_i} = u_i - S_i^r < 0$ выполняется при условии (8). Функции $\hat{F}_i$ левых частей уравнений (9b) также убывающие, поскольку неравенство

$$(П.6) \quad \hat{F}'_{iq_i} = -2\hat{b} - \hat{b}S_i^r - \hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1) \nu_i^{\beta_i - 2} < 0$$

выполняется при условии (8). В (П.6) учтено, что согласно [17] $\frac{\partial S_i^r}{\partial q_i} = \frac{\partial S_i^r}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_i} = 0$.

Как видно из рис. 1, отклонение решения q_i^* системы (9b) от точного решения Q_i^* системы (7), приведенного по нормализации (П.1) к единицам измерения Q_i , т.е. отклонение $\Delta Q_i^* = Q_i^* - \hat{Q}_i^*$, равно

$$(П.7) \quad |\Delta Q_i^*| = Q_{\max} \frac{|R_2(q_i^*)|}{|\hat{F}'_{iq_i}|}.$$

С учетом коэффициентов, вычисленных по формулам (9с), выражение (П.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{F}'_{iq_i} &= -2Q_{\max}^2 b - Q_{\max}^2 b S_i^r - Q_{\max}^{\beta_i} B_i \beta_i (\beta_i - 1) \nu_i^{\beta_i - 2} = \\ &= -b Q_{\max}^2 \left(2 + S_i^r + \frac{B_i \beta_i (\beta_i - 1)}{b} Q_{\max}^{\beta_i - 2} \nu_i^{\beta_i - 2} \right). \end{aligned}$$

Это выражение с учетом (8а) равно $\hat{F}'_{iq_i} = -b Q_{\max}^2 \left[2 - (u_{i \max} + 2) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_i^r \right]$, где $u_{i \max} = u_i(Q_{\max})$. Подставим это выражение, а также (П.5) в (П.7), по-

лучим

$$\begin{aligned} |\Delta Q_i^*| &= Q_{\max} \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \frac{B_i Q_{\max}^{\beta_i} \beta_i |\beta_i - 1| |\beta_i - 2| \Omega_i^{\beta_i - 3}}{b Q_{\max}^2 \left| 2 - (u_{i\max} + 2) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_i^r \right|} = \\ &= Q_{\max} \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \frac{|u_{i\max} + 2| |\beta_i - 2| \Omega_i^{\beta_i - 3}}{\left| 2 - (u_{i\max} + 2) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_i^r \right|}. \end{aligned}$$

Было показано [17], что выполняется ограничение $|S_i^r| < S_{\max} = \frac{m}{m-1-\nu_{\max}}$, где $\nu_{\max} = \frac{\psi_{\max}(1+\sqrt{\psi_{\max}})^2}{m\sqrt{\psi_{\max}}}$, $\psi_{\max} \approx 1$, $\psi_{\max} < 1$, m — количество агентов окружения i -го агента, $m \geq 2$, тогда, приняв $\psi_{\max} = 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, получим приближенно $\nu_{\max} \approx \frac{1-\varepsilon}{m} \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1}$. Поэтому в общем можно записать следующее ограничение:

$$|\Delta Q_i^*| \leq Q_{\max} \frac{(q_i - \nu_i)^2}{2} \frac{|u_{i\max} + 2| |\beta_i - 2| \Omega_i^{\beta_i - 3}}{\left| 2 - (u_{i\max} + 2) \nu_i^{\beta_i - 2} + S_{\max} \right|}.$$

Поскольку $u_{i\max}$ есть ограниченная величина по (8а), $S_{\max}$ также ограниченная величина [17] при $m \geq 2$, поэтому если $r_i \rightarrow 0$, то $|q_i - \nu_i| \rightarrow 0$, значит, $\lim_{r \rightarrow 0} |\Delta Q_i^*| = 0$.

Исследуем проблему существования решения системы уравнений (7). Рассмотрим следующую систему уравнений, решение которой, очевидно, такое же, как и системы (7):

$$\begin{aligned} (П.8) \quad f_i^r &= -F_i^r = -a + bQ + bQ_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) + B_i \beta_i Q_i^{\beta_i - 1} = 0, \\ Q_i &> 0, \quad i \in N. \end{aligned}$$

Используем условия, сформулированные в теореме 3 [21] для вектор-функции $\mathbf{f}^r = \{f_i^r, i \in N\}$ (в дальнейшем индекс r опущен): если матрица Якоби системы (7) $\mathbf{J} = \{f'_{iQ_j}, i, j \in N\}$ имеет диагональное преобладание, т.е.

$$(П.9) \quad f'_{iQ_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^N |f'_{iQ_j}| > 0, \quad i \in N,$$

то система (П.8) имеет единственное решение.

Поскольку $f'_{iQ_i} = -b(u_i - S_i)$, $f'_{iQ_j} = b(1 + S_{iQ_j}^r)$ и в [17] показано, что $\lim_{Q_j \rightarrow \infty} \frac{\partial S_i^r}{\partial Q_j} = 0$, поэтому при достаточно больших Q_i матрица Якоби $\mathbf{J}_n$ n -го порядка для системы (П.8) имеет вид

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} -b(u_1 - S_1) & b & \dots & b \\ b & -b(u_2 - S_2) & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & \dots & -b(u_n - S_n) \end{bmatrix} =$$

$$= b \begin{bmatrix} -g_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -g_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & -g_n \end{bmatrix},$$

где $g_i = u_i - S_i < 0$, $i \in N$ согласно (8). Обратная матрица $\mathbf{J}_n^{-1}$ существует, если определитель матрицы Якоби $\Delta \mathbf{J}_N \neq 0$; этот определитель [17] вычисляется по формуле

$$\Delta \mathbf{J}_n = b \left(\prod_{i=1}^n (-g_i - 1) + \sum_{\gamma=1}^n \prod_{j=1 \setminus \gamma}^n (g_i - 1) \right).$$

Поэтому условие $\Delta \mathbf{J}_n \neq 0$ равносильно $\sum_{i \in N} \frac{1}{g_i + 1} \neq 1$ и $g_i \neq 0 \ \forall i \in N$ (см. [17]). В этом случае условие (П.9) имеет вид $-g_i - (n - 1) > 0$, $i \in N$, откуда следует, что

$$(П.10) \quad n < |u_i - S_i^T| + 1, \quad i \in N.$$

Отметим, что условия теорем 1, 2 [21] для системы (7) не выполняются (а именно, не выполняется условие различных знаков производных F'_{iQ_i} и F'_{iQ_j}), поэтому нельзя гарантировать существования неотрицательного решения; этот вопрос рассматривался в [22].

Однако условие (П.10) не является необходимым, т.е. если оно не выполняется, система (7) может иметь решение. Сформулируем необходимое условие существования решения системы (7), базируясь на геометрическом смысле решения как точки пересечения линий оптимальных реакций в случае $n = 2$. Предположим, что существуют функции $\bar{F}_i$, полученные путем выражения из уравнений (7) действий i -го агента от действий окружения (обозначено символом « $-i$ »), т.е. функции оптимальных реакций $Q_i = \bar{F}_i(Q_{-i})$, и введем функции отклонений реакций i -го и j -го агентов вида $G_{ij}(Q_i, Q_j) = \bar{F}_i - \bar{F}_{ij}^{-1}$, где $\bar{F}_{ij}^{-1}$ — обратная функция для $\bar{F}_j$, полученная выражением Q_i из F_j . Если решение $\{Q_i^*, i \in N\}$ системы (7) существует, то

$$(П.11) \quad G_{ij}(Q_i^*, Q_j^*) = 0 \ \forall i, j \in N.$$

Поскольку $\bar{F}'_{iQ_j} = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} = x_{ji}$, $(\bar{F}_{ij}^{-1})'_{Q_j} = u_i - S_i$, причем $x_{ji} < 0$ согласно [17] и $u_i - S_i < 0$ согласно (8), то функции $\bar{F}_i$ и $\bar{F}_{ij}^{-1}$ являются монотонно убывающими по Q_j в интервале, на котором выполняются указанные условия. Поэтому при данном Q_i^* функции $G_{ij}(Q_i^*, Q_j)$ являются монотонно возрастающими (или убывающими при альтернативно возможной форме $G_{ij} = \bar{F}_{ij}^{-1} - \bar{F}_i$) по Q_j на интервале $(\bar{Q}_j, Q_{\max})$, т.е.

$$G'_{ijQ_j} = \bar{F}'_{iQ_j} - (\bar{F}_{ij}^{-1})'_{Q_j} > 0,$$

если выполнено условие $|x_{ji}| < |u_i - S_i|$ (или $|x_{ji}| > |u_i - S_i|$ при $G_{ij} = \bar{F}_{ij}^{-1} - \bar{F}_i$). Иначе говоря условие монотонности функции G_{ij} имеет вид

$$(П.12) \quad |x_{ji}| \neq |u_i - S_i|.$$

Граница интервала $\bar{Q}_j$ вычисляется из условия (8) с учетом (8а) по следующей формуле:

$$\bar{Q}_j = \left(\frac{B_j \beta_j |\beta_j - 1|}{b(2 + S_j^r)} \right)^{\frac{1}{2-\beta_j}} \quad \text{при } \beta_j < 1, \quad \bar{Q}_j = 0 \quad \text{при } \beta_j > 1.$$

Монотонная функция ограничена на замкнутом интервале $A_j = [\bar{Q}_j, Q_{\max}]$, т.е. по теореме Вейерштасса

$$m \leq G_{ij}(Q_i^*, Q_j) \leq M, \quad \text{где } m = \inf_{Q_j \in A_j} G_{ij}, \quad M = \sup_{Q_j \in A_j} G_{ij}.$$

Отсюда следует, что при условии (П.11) $m \leq 0 \leq M$. При этом по теореме Больцано–Коши о промежуточном значении имеем $\bar{Q}_j \leq Q_j^* \leq Q_{\max}$, следовательно, совместное выполнение (П.12) и $0 \leq \bar{Q}_j \leq Q_{\max}$ есть необходимое условие для (П.11) на интервале $(\bar{Q}_j, Q_{\max})$.

Это условие является также достаточным, если, кроме того, m и M имеют противоположные знаки, т.е.

$$(П.13) \quad G_{ij}(Q_i^*, \bar{Q}_j) G_{ij}(Q_i^*, Q_{\max}) < 0,$$

поскольку при (П.12) функция G_{ij} монотонна, а с учетом (П.13) интервал монотонности включает в себя точку $G_{ij}(Q_i^*, Q_j) = 0$. Выведем удобную для проверки форму условия (П.13): выражение $\bar{F}_{ij}^{-1}$ для уравнений системы (7) имеет вид

$$(П.14) \quad \bar{F}_{ij}^{-1} = Q_i = \frac{a}{b} - \sum_{k \in N \setminus (i,j)} Q_k - Q_j - bQ_j(1 + S_j) - \frac{B_j \beta_j Q_j^{\beta_j - 1}}{b}.$$

Поскольку условия (П.13) должны выполняться при всех значениях действий, то рассмотрим случай, когда действия всех агентов, кроме i -го и j -го, равны $\bar{Q}_k$; поэтому из выражения (П.14) следует

$$\bar{F}_{ij}^{-1}(Q_{\max}) \equiv \kappa_j = \frac{a}{b} - \sum_{k \in N \setminus (i,j)} \bar{Q}_k - Q_{\max} - Q_{\max}(1 + S_j) - \frac{B_j \beta_j Q_{\max}^{\beta_j - 1}}{b}.$$

Пусть $\bar{F}_i(\bar{Q}_j) < \bar{F}_{ij}^{-1}(\bar{Q}_j)$, т.е. $G_{ij}(Q_i^*, \bar{Q}_j) < 0$; тогда в силу монотонного убывания $\bar{F}_i(Q_j)$ условие $\bar{F}_i(Q_{\max}) > \bar{F}_{ij}^{-1}(Q_{\max})$, т.е. $G_{ij}(Q_i^*, Q_{\max}) > 0$,

выполняется при $|x_{ji}| < |u_i - S_i|$. Подставим в i -е уравнение системы (7) $Q_j = Q_{\max}$ и $\bar{Q}_k$, получим

$$F_i(\kappa_i) = a - b \left(Q_{\max} + \sum_{k \in N \setminus (i,j)} \bar{Q}_k + \kappa_i \right) - b\kappa_i(1 + S_i) - B_i\beta_i\kappa_i^{\beta_i-1} = 0,$$

где символом κ_i обозначено решение этого уравнения. Поскольку функции F_i являются монотонно убывающими при условии (8), то из неравенства $F_i(\kappa_j) > 0$ следует $\kappa_j < \kappa_i$, и наоборот. Следовательно, условие (П.13) можно представить в виде: если $F_i(\kappa_j) > 0$ и $|x_{ji}| < |u_i - S_i|$ для всех $i, j \in N$, то m и M имеют противоположные знаки. ■

Доказательство утверждения 2. Из уравнений (9а) следует, что

$$\begin{aligned} \hat{a} - \hat{b}q_{-i} - \hat{b}q_i - \hat{b}q_i \left(1 + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) - \hat{B}_i\beta_i\nu_i^{\beta_i-1} - \hat{B}_i\beta_i(\beta_i - 1)\nu_i^{\beta_i-2}q_i + \\ + \hat{B}_i\beta_i(\beta_i - 1)\nu_i^{\beta_i-2}\nu_i = 0, \\ -\hat{b} \left(2 + \frac{\hat{B}_i\beta_i(\beta_i - 1)}{\hat{b}}\nu_i^{\beta_i-2} + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) q_i - \hat{b}q_{-i} + \hat{a} - \hat{B}_i\beta_i\nu_i^{\beta_i-1} + \\ + \hat{B}_i\beta_i(\beta_i - 1)\nu_i^{\beta_i-1} = 0, \\ -\hat{b} \left(2 + \frac{\hat{B}_i\beta_i(\beta_i - 1)}{\hat{b}}\nu_i^{\beta_i-2} + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) q_i - \hat{b}q_{-i} + \hat{a} - \hat{B}_i\beta_i(2 - \beta_i)\nu_i^{\beta_i-1} = 0, \\ \left(2 + \frac{\hat{B}_i\beta_i(\beta_i - 1)}{\hat{b}}\nu_i^{\beta_i-2} + \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij}^r \right) q_i + q_{-i} - \frac{\hat{a} - \hat{B}_i\beta_i(2 - \beta_i)\nu_i^{\beta_i-1}}{\hat{b}} = 0, \end{aligned}$$

поэтому можно записать (10а).

Система (10а) решается методом Крамера. Используем материалы приложения статьи [17]. Левые части системы (10а) аналогичны системе (П.2) из [17], поэтому главный определитель имеет вид

$$\Delta = \prod_{j=1}^n (\delta_j - 1) + \sum_{j=1}^n \prod_{\gamma=1 \setminus j}^n (\delta_\gamma - 1).$$

Условие существования решения системы (10а) определяется по теореме Крамера [20]: система имеет единственное решение, если главный определитель $\Delta \neq 0$. Из формулы главного определителя следует, что

$$\frac{\Delta}{\sum_{j=1}^n (\delta_j - 1)} = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta_j - 1} \quad \text{при} \quad \delta_j - 1 \neq 0 \quad \forall j \in N,$$

поэтому решение системы (10а) существует, если

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\delta_j - 1} \neq -1 \wedge \delta_j - 1 \neq 0 \quad \forall j \in N.$$

Вспомогательный определитель системы (10а), соответствующий i -й неизвестной, вычисляется путем следующих преобразований: 1) из i -й строки выносятся множитель α_i , 2) в i -м столбце создаются нули, 3) определитель разлагается по элементам i -го столбца с понижением порядка, 4) полученный определитель последовательно разлагается на суммы определителей по каждой строке, 5) в этом разложении определители, имеющие одинаковые строки (столбцы), равны нулю, а остальные определители соответствуют либо главному определителю, либо вспомогательному определителю системы (П.2) из [17]. Эти преобразования (например, при $i = 2$) имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \delta_1 & \alpha_1 & 1 \\ 1 & \alpha_2 & 1 \\ 1 & \alpha_3 & \delta_3 \end{vmatrix} = \alpha_2 \begin{vmatrix} \delta_1 & \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\alpha_3}{\alpha_2} & \delta_3 \end{vmatrix} = \alpha_2 \begin{vmatrix} \delta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 0 & 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} & 0 & \delta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_2 \begin{vmatrix} \delta_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} & 1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \\ 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} & \delta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \end{vmatrix} = \alpha_2 \begin{vmatrix} \delta_1 & 1 \\ 1 & \delta_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \begin{vmatrix} \delta_1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \alpha_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \delta_3 \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{\alpha_3 \alpha_3}{\alpha_2 \alpha_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha_2 \Delta_{-2} - \alpha_3 (\delta_1 - 1) - \alpha_1 (\delta_2 - 1), \end{aligned}$$

где Δ_{-i} — главный определитель системы (10а) без i -го уравнения и без i -й неизвестной. Для вспомогательного определителя системы четвертого порядка (например, при $i = 1$) эти преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & 1 & 1 \\ \alpha_3 & 1 & \delta_3 & 1 \\ \alpha_4 & 1 & 1 & \delta_4 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \delta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ 0 & 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} & \delta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} & 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \\ 0 & 1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} & 1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} & \delta_4 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} \end{vmatrix} = \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \delta_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} & 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} & \delta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} & 1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \\ 1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} & 1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} & \delta_4 - \frac{\alpha_4}{\alpha_1} \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \delta_2 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_3 & 1 \\ 1 & 1 & \delta_4 \end{vmatrix} - \\ &- \alpha_1 \frac{\alpha_4}{\alpha_1} \begin{vmatrix} \delta_2 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \alpha_1 \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \begin{vmatrix} \delta_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \delta_4 \end{vmatrix} + \alpha_1 \frac{\alpha_3 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_1} \begin{vmatrix} \delta_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_3 & 1 \\ 1 & 1 & \delta_4 \end{vmatrix} + \alpha_1 \frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1 \alpha_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \delta_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
& = \alpha_1 \Delta_{-1} - \alpha_2 (\delta_3 - 1) (\delta_4 - 1) - \alpha_3 (\delta_2 - 1) (\delta_4 - 1) - \alpha_4 (\delta_2 - 1) (\delta_3 - 1).
\end{aligned}$$

Обобщение этих выражений для системы произвольного порядка по индукции приводит к формуле

$$\Delta_i = \alpha_i \Delta_{-i} - \sum_{j=1 \setminus i}^n \left[\alpha_j \prod_{\gamma=1 \setminus i, j}^n (\delta_\gamma - 1) \right],$$

что позволяет записать формулу (10b).

Покажем, в каких случаях для корней (10с) выполняются условия (10d), т.е.

$$\begin{aligned}
(\text{П.15}) \quad & |q_i - \nu_i| < r_i, \quad \Omega_i = \nu_i + \theta_i (q_i - \nu_i), \quad \theta_i, \nu_i \in (0, 1), \\
& r_i \in (0, \Omega_i), \quad \nu_i < q_i, \quad i \in N.
\end{aligned}$$

Условия $|q_i - \nu_i| < r_i$ и $\nu_i < q_i$ совместно выполняются, если для корней (10с) существует функция $G_i = q_i^*(\nu_i) - \nu_i$, причем $G_i \in (0, r_i)$ на интервале $\nu_i \in (0, 1)$. В этом случае условие $r_i \in (0, \Omega_i)$ выполняется, если $\Omega_i = \nu_i + \theta_i (q_i^* - \nu_i) > r_i$, т.е. $\theta_i > \frac{r_i - \nu_i}{q_i^* - \nu_i} > \frac{r_i - \nu_i}{r_i}$, значит, $1 > \theta_i > \frac{r_i - \nu_i}{r_i}$. Отметим, что в последнем неравенстве для малых значений ν_i возможен случай $r_i - \nu_i < 0$, поэтому в этом случае условие (П.15) выполняется при любом $\theta_i \in (0, 1)$.

Поскольку функция G_i непрерывна при условии (10b), то условие $G_i \in (0, r_i)$ выполняется, если на интервале $\nu_i \in (0, 1)$ функция G_i имеет хотя бы один ноль. В дальнейшем индекс i опущен, поскольку условия (П.15) должны выполняться для всех $i \in N$, поэтому из (10с) следует, что

$$q^* = \frac{\alpha (\chi^{n-1} + (n-1) \chi^{n-2}) - (n-1) \alpha \chi^{n-2}}{\chi^n + n \chi^{n-1}} = \frac{\alpha}{\chi + n}, \quad \text{где } \chi = \delta - 1.$$

Исследуем функцию G_i на границах интервала $\nu \in (0, 1)$, для чего найдем пределы справа (при $\nu \rightarrow 0+0$) коэффициентов $\alpha(\nu)$, $\delta(\nu)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \rightarrow 0+0} \alpha &= \begin{cases} \mu_1 & \text{при } \beta > 1, \\ -\infty & \text{при } \beta < 1, \end{cases} \\
\lim_{\nu \rightarrow 0+0} \delta &= \begin{cases} \infty & \text{при } \beta > 1, \\ -\infty & \text{при } \beta < 1, \end{cases}
\end{aligned}
\quad \text{где } \mu_1 = \frac{a}{bQ_{\max}}.$$

Поэтому $\lim_{\nu \rightarrow 0+0} q^* = 0$, значит, $\lim_{\nu \rightarrow 0+0} G = -0$, т.е. при $\nu \rightarrow 0$ справа функция $G \rightarrow 0$ снизу, или $G(\nu \rightarrow 0+0) < 0$. Найдем пределы слева (при $\nu \rightarrow 1-0$) коэффициентов $\alpha(\nu)$, $\delta(\nu)$:

$$\lim_{\nu \rightarrow 1-0} \alpha = \frac{\hat{a} - \hat{B}_i \beta_i (2 - \beta_i)}{\hat{b}} = \frac{a}{bQ_{\max}} + \frac{\beta}{\beta - 1} (u_{\max} + 2) \approx \frac{a}{bQ_{\max}},$$

поскольку согласно (8a) $\lim_{Q \rightarrow Q_{\max}} (u_i + 2) = 0$;

$$\lim_{\nu \rightarrow 1-0} \delta = 2 + \frac{\hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1)}{\hat{b}} + S_i^r = -(u_{\max} - S_i^r) > 0$$

согласно (8). Поэтому

$$\lim_{\nu \rightarrow 1-0} q^* = \frac{a}{bQ_{\max}} \frac{1}{-(u_{\max} - S_i^r) - 1 + n};$$

так как согласно [17] $|S_i^r| \leq 1$, то

$$\lim_{\nu \rightarrow 1-0} q^* \geq \frac{a}{bQ_{\max}} \frac{1}{-u_{\max} + n};$$

это число будет больше единицы, т.е.

$$\lim_{\nu \rightarrow 1-0} G = +0,$$

при условии

$$\frac{a}{bQ_{\max}} \frac{1}{-u_{\max} + n} > 1 \Rightarrow n < \frac{a}{bQ_{\max}} + u_{\max}.$$

Поскольку на интервале $\nu_i \in (0, 1)$ функция G_i меняет знак, то по теореме Коши [20] она имеет хотя бы один нуль. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karmarkar U.S., Rajaram K.* Aggregate Production Planning for Process Industries under Oligopolistic Competition // Eur. J. Oper. Res. 2012. No. 223 (3). P. 680–689.
2. *Ledvina A., Sigar R.* Oligopoly Games under Asymmetric Costs and an Application to Energy Production // Math. Financ. Econom. 2012. No. 6 (4). P. 261–293.
3. *Currarini S., Marini M.A.* Sequential Play and Cartel Stability in Cournot Oligopoly // Appl. Math. Sci. 2013. No. 7 (1–4). P. 197–200.
4. *Vasin A.* Game-theoretic Study of Electricity Market Mechanisms // Procedia Comput. Sci. 2014. No. 31. P. 124–132.
5. *Sun F., Liu B., Hou F., Gui L., Chen J.* Cournot Equilibrium in the Mobile Virtual Network Operator Oriented Oligopoly Offloading Market // 2016 IEEE Int. Conf. Communicat., ICC 2016. No. 7511340.
6. *Nash J.* Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
7. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
8. *Naimzada A.K., Sbragia L.* Oligopoly Games with Nonlinear Demand and Cost Functions: Two Boundedly Rational Adjustment Processes // Chaos. Solit. Fractal. 2006. No. 29 (3). P. 707–722.
9. *Askar S., Alnowibet K.* Nonlinear Oligopolistic Game with Isoelastic Demand Function: Rationality and Local Monopolistic Approximation // Chaos. Solit. Fractal. 2016. No. 84. P. 15–22.

10. *Naimzada A., Tramontana F.* Two Different Routes to Complex Dynamics in an Heterogeneous Triopoly Game // J. Differ. Equat. Appl. 2015. No. 21 (7). P. 553–563.
11. *Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F.* Nonlinear Dynamics and Global Analysis of a Heterogeneous Cournot Duopoly with a Local Monopolistic Approach Versus a Gradient Rule with Endogenous Reactivity // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015. No. 23 (1–3). P. 245–262.
12. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin: Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934.)
13. *Chong J.-K., Ho T.-H., Camerer C.* A Generalized Cognitive Hierarchy Model of Games // Games Econom. Behavior. 2016. No. 99. P. 257–274.
14. *Berger U., De Silva H., Fellner-Ruhling G.* Cognitive Hierarchies in the Minimizer Game // J. Econom. Behavior Organizat. 2016. No. 130. P. 337–348.
15. *Bowley A.L.* The Mathematical Groundwork of Economics. Oxford: Oxford Univers. Press, 1924.
16. *Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G.* Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market with Nonlinear Agent Cost Functions // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1631–1650.
17. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // АиТ. 2020. № 6. С. 105–130.
Geras'kin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2020. Vol. 81. No. 6. P. 1051–1072.
18. *Intriligator M.D.* Mathematical Optimization and Economic Theory. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1971.
19. *Geras'kin M.I.* Modeling Reflexion in the Non-Linear Model of the Stakelberg Three-Agent Oligopoly for the Russian Telecommunication Market // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 5. P. 841–859.
20. *Korn A., Korn M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, Theorems and Formulas for References and Review. New York: McGraw-Hill, 1968.
21. *Яковлев М.Н.* Неотрицательные решения систем нелинейных (в частности, разностных) уравнений // Тр. МИАН СССР. 1968. Т. 96. С. 111–116.
22. *Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G.* Analysis of Game-Theoretic Models of an Oligopoly Market under Constrains on the Capacity and Competitiveness of Agents // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2025–2038.
23. *Aizenberg N., Stashkevich E., Voropai N.* Forming Rate Options for Various Types of Consumers in the Retail Electricity Market by Solving the Adverse Selection Problem // Int. J. Public Administrat. 2019. No. 42(15–16). P. 1349–1362.
24. *Paccagnan D., Kamgarpour M., Lygeros J.* On Aggregative and Mean Field Games with Applications to Electricity Markets // 2016 Eur. Control Conf., ECC 2016. 2017. No. 7810286. P. 196–201.
25. *Prosvirkin N., Blinova E., Gerasimov K.* Multicriteria Optimization Model of the Interaction of Elements when Managing Network Integrated Structures // Espacios. 2019. No. 40(40). P. 1–10.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Губко.

Поступила в редакцию 23.09.2019

После доработки 27.12.2019

Принята к публикации 30.01.2020