*Автоматика и телемеханика, № 1, 2021*

*Обзоры*

© 2021 г. **Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru),**
**М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru),**
**П.С. ЩЕРБАКОВ, д-р физ.-мат. наук (cavour118@mail.ru)**
**(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

# ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ[1]

Обзор посвящен применению техники линейных матричных неравенств для учета возможных неопределенностей (в описании системы, во внешних возмущениях, в начальных условиях) при анализе и синтезе управления в линейных системах.

*Ключевые слова*: системы управления, устойчивость, внешние возмущения, робастность, всплеск, синтез, линейные матричные неравенства, квадратичные функции Ляпунова, инвариантные эллипсоиды, разреженность.

**DOI:** 10.31857/S0005231021010013

## 1. Введение

Настоящий обзор посвящен пересечению двух важнейших направлений современной теории управления — учету неопределенности и линейным матричным неравенствам.

Тема неопределенности всегда была ключевой при анализе и синтезе систем управления. Собственно идея обратной связи возникла именно вследствие непредсказуемости изменяющихся условий функционирования объекта и необходимости реакции на них. Первые же регуляторы (типа регулятора Уатта) использовали *принцип обратной связи* для достижения цели в условиях неопределенности. После короткого периода господства *программного управления* для таких задач, как планирование космических полетов (где неопределенность почти отсутствует), дальнейшее развитие теории было связано с новыми подходами к управлению при наличии неопределенности — адаптивным и робастным управлением, такими техниками как $H_\infty$, $\ell_1$, Model Predictive Control (MPC) и другими. При этом использовались разные модели неопределенности как в описании объекта (частотная, параметрическая, структурированная), так и в видах действующих возмущений (случайные, детерминированные ограниченные в той или иной норме), в информации о

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19-18-50226.

начальных условиях и т.п. Еще больше разнообразия в моделях неопределенности для нелинейных систем; так, исторически первая *теория абсолютной устойчивости* (восходящая к работе А.И. Лурье и В.Н. Постникова [29] 1944 г.) связана с секторной неопределенностью нелинейной части системы.

В данном обзоре авторы в основном ограничиваются *линейными стационарными* моделями вида

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw, \quad x(0) \in \mathcal{B}, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — возмущение. Неопределенность заключается либо в матрицах системы $A$, $B$, $D$, либо во внешних возмущениях $w$ (известен только класс, которому они принадлежат), либо в начальном условии $x(0)$ (например, известен лишь шар $\mathcal{B}$, которому оно принадлежит). Цель управления заключается либо в достижении стабилизации системы, либо в оптимизации какого-либо критерия оптимальности. При этом само управление ищется главным образом в форме *статической линейной обратной связи по состоянию*

$$u = Kx, \tag{2}$$

где матрица обратной связи $K$ (регулятор) подлежит выбору. Впрочем, иногда будем выходить за рамки моделей (1), (2); так, в разделе 8 рассматриваются нелинейные системы, а наряду с непрерывными моделями (1), (2) нередко будем иметь дело и с дискретными системами.

Техника линейных матричных неравенств (ЛМН) (английская аббревиатура LMI — Linear Matrix Inequalities) получила необычайно широкое распространение после появления монографии С. Бойда с соавторами [84]. Впрочем, корни этой техники можно проследить еще в работах Ляпунова. Действительно, система $\dot{x} = Ax$ является устойчивой тогда и только тогда, когда для нее существует квадратичная функция Ляпунова $V(x) = (Qx, x)$ с положительно-определенной матрицей $Q \succ 0$. Иначе говоря, $\dot{V} = \big((A^\top Q + QA)x, x\big) < 0$, что эквивалентно $A^\top Q + QA \prec 0$. Итак, проблема устойчивости сводится к существованию решения неравенств $A^\top Q + QA \prec 0$ и $Q \succ 0$. Это типичное ЛМН: в нем переменной является матрица $Q$, а сами неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц. Такого типа неравенства появились еще в работах Р. Беллмана, В.А. Якубовича, Дж. Виллемса, Е.С. Пятницкого, однако по-настоящему рабочим аппаратом в теории управления ЛМН сделали монография [84] и наличие мощных вычислительных средств для их решения, разработанных Ю.Е. Нестеровым и А.С. Немировским [123]. В настоящее время свéдение той или иной проблемы к формату ЛМН приравнивается к ее решению. Многочисленные примеры использования ЛМН для задач управления можно найти, в частности, в монографиях [84, 101, 138].

В данном обзоре рассматриваются способы применения ЛМН к основным задачам управления при наличии неопределенности. Ограничиваясь именно этим кругом проблем, обзор не затрагивает иные способы работы с неопределенностью и другие применения ЛМН. Разумеется, даже в пределах выбранной тематики невозможно представить исчерпывающе полный обзор; авторы приносят извинения читателю за возможный субъективизм и неполноту информации.

Структура статьи следующая. В разделе 2 описываются основные виды ЛМН, применяемая там техника преобразований неравенств, имеющиеся вычислительные средства решения. Раздел 3 посвящен связи задач управления с ЛМН, роли квадратичных функций Ляпунова, проблемам анализа устойчивости и синтеза устойчивых систем, и другим важнейшим понятиям — безотносительно к наличию неопределенности. Начиная со следующего раздела, рассматриваются основные типы неопределенности. В разделе 4 это параметрическая неопределенность в описании системы и проблемы робастной устойчивости и стабилизации. Раздел 5 связан с неопределенностью внешних возмущений. Обсуждаются два основных их класса — ограниченные по норме $L_2$ или по норме $L_\infty$; лишь кратко обсуждается класс случайных возмущений. При этом рассматриваются и задачи анализа, и задачи синтеза. Еще один тип неопределенности, связанный с начальными условиями, исследуется в разделе 6. Оказывается, ненулевые начальные условия могут приводить к важному (и нежелательному) эффекту — большим уклонениям от положения устойчивого равновесия. Исследуется величина подобного эффекта и способы его подавления. Весьма актуальная тематика так называемого разреженного управления рассматривается в разделе 7. Простейшим нелинейным обобщениям посвящен раздел 8. Наконец, в заключительном разделе 9 подведены итоги обзора и намечены пути дальнейших обобщений.

Всюду далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $^\top$ — символ транспонирования, $\mathbb{S}^{n\times n}$ — класс симметричных вещественных матриц размерности $n\times n$, $I$ — единичная матрица соответствующей размерности, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

## 2. Линейные матричные неравенства

В этом разделе введем основные определения, необходимые для дальнейшего изложения, приведем основные свойства линейных матричных неравенств, отметим основные этапы истории возникновения и использования этого аппарата, а также кратко опишем вычислительные процедуры, лежащие в его основе, вместе с наиболее популярными пакетами прикладных программ.

### *2.1. Основные определения, свойства и технические приемы*

Приведем основные определения и простейшие свойства линейных матричных неравенств, а также удобные технические приемы, часто используемые при формулировках разнообразных задач управления. Детальное изложение и обсуждение более тонких эффектов можно найти в ставших классическими книгах [84, 138]; большое количество фактов, относящихся к свойствам линейных матричных неравенств и их приложениям к теории управления, собрано в обзоре [86]. На русском языке по этой тематике опубликованы две монографии [4, 37], в которых также подробно обсуждаются как сами ЛМН, так и их использование в управлении, приведено много примеров.

Рассмотрим следующую линейную матричнозначную функцию векторного аргумента $x \in \mathbb{R}^{\ell}$:

$$F(x) \doteq F_0 + \sum_{i=1}^{\ell} x_i F_i,$$

где $F_i = F_i^{\top} \in \mathbb{S}^{n\times n}$, $i = 0, \ldots, \ell$, — известные фиксированные вещественные симметричные матрицы, а $x_i$, $i = 1, \ldots, \ell$, — скалярные переменные.

Соотношение

$$F(x) \prec 0 \tag{3}$$

называется *линейным матричным неравенством в канонической форме* относительно переменных $x_1, \ldots, x_{\ell}$, а любое $x$, удовлетворяющее (3), называется решением этого неравенства. Множество $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ всех решений называется *допустимой областью* ЛМН $F(x) \prec 0$; очевидно, $\mathcal{D}_{\text{feas}}$ может быть как ограниченным, так и нет, и может быть пустым. Принципиально важным свойством ЛМН является выпуклость допустимой области (это сразу следует из определения), которая позволяет формулировать многие задачи управления в виде задач выпуклого программирования.

Многочисленные элементарные (и не только) свойства ЛМН следуют из выпуклости и знакоопределенности; более подробно они разобраны в упомянутых выше источниках; в частности, внимание в этих работах уделено соотношениям между строгим и нестрогим неравенствами.

Каноническая форма записи сравнительно редко встречается в приложениях; как правило, приходится иметь дело с линейными матричными неравенствами, в которых переменными являются не скаляры, а матрицы. Простейший пример — условие на знакоопределенность матрицы ($Q \succ 0$); более содержательный пример — классическое неравенство Ляпунова вида

$$A^{\top} Q + QA + R \prec 0, \quad R \succ 0, \tag{4}$$

где переменной является симметричная матрица $Q$.

ЛМН такого типа естественным образом возникают при формулировании задач управления. Матричную форму (4) легко можно привести к каноническому виду (но не наоборот), используя стандартный базис в пространстве симметричных матриц.

Сформулируем две основные проблемы теории ЛМН, к которым сводится подавляющее большинство задач управления.

Задача *разрешимости* (*допустимости*) заключается в отыскании некоторой точки $x \in \mathcal{D}_{\text{feas}}$ или в доказательстве того, что такой точки не существует. Типичным примером задачи допустимости является отыскание квадратичной функции Ляпунова для данной устойчивой линейной системы, т.е. решение неравенства (4) относительно матричной переменной $Q \succ 0$.

Вторая ключевая задача ЛМН-теории — оптимизация критерия на множестве, заданном линейными матричными неравенствами. Точнее, задача минимизации линейной функции при ЛМН-ограничениях называется задачей *полуопределенного программирования* (Semi-Definite Programming, SDP). Задача полуопределенного программирования является основным форматом, к которому сводятся практически все задачи управления, подавления возмущений, фильтрации и т.д., решаемые с применением техники ЛМН.

Разумеется, в исходном виде все эти задачи формулируются иначе, и для того, чтобы свести их к желаемой форме, имеется несколько технических приемов; приведем два из них, наиболее универсальных и часто применимых.

Первый прием — использование так называемого дополнения по Шуру. Это понятие, хорошо известное из линейной алгебры, играет значительную роль в численном анализе, статистике и матричных вычислениях и относится к представлению блочных матриц.

Рассмотрим блочную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^\top & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)},$$

где $M_{11} \in \mathbb{S}^{n\times n}$, $M_{12} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а матрица $M_{22} \in \mathbb{S}^{m\times m}$ обратима. Матрица $M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top$ называется дополнением по Шуру к блоку $M_{22}$ в матрице $M$.

*Лемма 1. Имеем*

$$M \succ 0 \quad \textit{тогда и только тогда, когда} \quad M_{22} \succ 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^\top \succ 0.$$

Различные формулировки этого результата, иногда называемого леммой Шура (строгое или нестрогое неравенство, симметричные формулировки), свойства и применения дополнения по Шуру к решению линейных уравнений и т.п. можно найти в [37, 85] или в книгах по линейной алгебре.

Основное назначение леммы Шура в задачах стабилизации и управления при использовании ЛМН — сведéние нелинейных матричных неравенств к линейным, в частности, переход от обратных матриц к прямым, оценивание матричной нормы, а также использование при описании эллипсоидов. Так, например, применяя лемму Шура к алгебраическому матричному (квадратичному) неравенству Риккати

$$A^\top Q + QA - QBS^{-1}B^\top Q + R \succ 0, \quad S \succ 0,$$

относительно матричной переменной $Q \succ 0$ (оно часто встречается в задачах оптимального управления) и разворачивая его с помощью леммы Шура (т.е. применяя теорему 1 в "обратную сторону"), приходим к эквивалентной записи в виде ЛМН

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + R & QB \\ B^\top Q & S \end{pmatrix} \succ 0,$$

откуда, в частности, следует, что множество решений неравенства Риккати выпукло.

При использовании ЛМН в задачах управления как правило ищется минимальный в некотором смысле эллипсоид, связанный с системой. Для описания эллипсоида существует много способов, относительные удобства которых зависят от той или иной задачи (см. [37, 84] и учебники по линейной алгебре). В настоящем обзоре рассматриваются эллипсоиды с центром в нуле, задаваемые в виде

$$\mathcal{E} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1\Big\}, \quad P \succ 0. \tag{5}$$

По ряду причин удобно использовать именно обратную матрицу $P^{-1}$, а применяя лемму Шура к нелинейному по $P$ неравенству $x^\top P^{-1} x \leqslant 1$, можно привести его к форме ЛМН:

$$\begin{pmatrix} 1 & x^\top \\ x & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0.$$

Критерии оптимальности эллипсоида также могут быть различны; среди них объем, размер минимального шара, в котором этот эллипсоид содержится, или сумма квадратов его полуосей. Все критерии "эквивалентны", для простоты и наглядности будем рассматривать последний из них. Если пользоваться записью (5), то эта величина равна следу матрицы $P$, т.е. линейной функции от элементов $P$. Таким образом, оптимизация эллипсоида с матрицей $P$, которая удовлетворяет ЛМН, специфичным для конкретной проблемы управления, сводится к задаче полуопределенного программирования.

Еще один фундаментальный результат, иногда называемый *$S$-процедурой*, позволяет формулировать условия, при которых выполнение нескольких квадратичных неравенств влечет выполнение еще одного квадратичного неравенства. Приведем его в следующей формулировке.

*Лемма 2. Пусть заданы однородные квадратичные формы*

$$f_i(x) = x^\top A_i x, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

*где $x \in \mathbb{R}^n$, $A_i = A_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$.*

*Если существуют числа $\tau_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, такие, что*

$$A_0 \prec \sum_{i=1}^{m} \tau_i A_i, \tag{6}$$

*то неравенства*

$$f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

*влекут неравенство*

$$f_0(x) < 0 \tag{8}$$

*для всех $x \neq 0$.*

*Обратно, если из (7) следует (8) и выполняется любое из условий:*

*а) $m = 1$;*

*б) $m = 2$, $n \geqslant 3$ и существует вектор $x^0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $f_1(x^0) < 0$, $f_2(x^0) < 0$, то найдутся $\tau_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, такие, что выполняются соотношения (6).*

Этот результат существенным образом используется при построении квадратичных функций Ляпунова; его простейшей иллюстрацией является установление условий, при которых эллипсоид $\mathcal{E}_1$ вида (5) с матрицей $P_1$ содержится в эллипсоиде $\mathcal{E}_2$ с матрицей $P_2$. Из $S$-теоремы с одним ограничением ($m = 1$) немедленно следует, что $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ тогда и только тогда, когда $P_1 \preccurlyeq P_2$.

$S$-процедура была обоснована В.А. Якубовичем [63]; обзор ее модификаций, частных случаев и применений дан в [15], а из самых свежих работ следует отметить [47].

### *2.2. История развития ЛМН*

По-существу, идеология матричных неравенств восходит еще к работам А.М. Ляпунова. Впоследствии матричные неравенства в явном виде появлялись в работах В.А. Якубовича [61], Р. Беллмана [75], Дж. Виллемса [152] и Е.С. Пятницкого [18]. Однако первой работой, в которой систематически изложена техника ЛМН, является книга С. Бойда с соавторами [84], после ее появления эта техника стала общепринятой в работах по теории управления и оптимизации. Показателем популярности этой книги является число ссылок на нее — более двадцати тысяч! Первой монографией на русском языке, посвященной этому вопросу, является книга Д.В. Баландина и М.М. Когана [4], а из последних опубликованных книг отметим [37] и [36, ч. 1]. Из самых свежих работ, посвященных линейным матричным неравенствам, их свойствам и применениям в теории управления и устойчивости, необходимо отметить замечательный обзор [86]. Впрочем, вопросам учета неопределенности уделяется немного внимания; кроме того, этот обзор написан в форме справочника.

### *2.3. Вычислительные средства*

Уже отмечалось, что задача полуопределенного программирования является выпуклой. Незадолго до появления книги С. Бойда [84] в работах Ю.Е. Нестерова и А.С. Немировского был предложен чрезвычайно эффективный метод внутренней точки для решения именно таких задач; он стал очень популярным после публикации монографии этих авторов [123]. Комбинация этих двух книг и наличие программных реализаций метода (о которых говорится ниже) привело к лавинообразному росту числа работ, использующих технику ЛМН.

Для решения задач полуопределенного программирования с ограничениями в виде линейных матричных неравенств существует большое разнообразие программного обеспечения. Исторически первым является пакет LMILab [100], созданный в 1994 г. почти одновременно с выходом в свет упоминавшейся "ключевой" книги по линейным матричным неравенствам [84]; сейчас он является частью пакета Robust Control Toolbox системы Matlab. Позже появились наиболее популярные в настоящее время "решатели" SeDuMi [143] (Self-Dual Minimization), SDPT3 [147], а также CSDP [83], и другие. Они представляют собой библиотеки программ, реализующих численные процедуры для широкого круга задач оптимизации.

На сегодняшний день наиболее универсальным и мощным решателем является пакет MOSEK [120], который особенно эффективен при решении задач большой размерности с разреженным представлением данных. Среди прочих достоинств — возможность сопряжения с различными языками программирования, такими как Matlab, C, Java, Python.

Почти все имеющиеся решатели находятся в свободном доступе, кроме MOSEK, который распространим на коммерческой основе; впрочем, для научных и образовательных учреждений пакет может поставляться бесплатно.

Перечисленные решатели имеют свои преимущества и недостатки. Так, одна и та же оптимизационная задача может иметь решение в одном из них и не иметь в другом, или же численные решения оказываются несколько отличными. Поэтому при применении пакетов следует уделять внимание выбору соответствующих параметров (таких как задаваемая точность вычислений, максимальное число итераций и др.) и иметь под рукой несколько решателей. Сравнению эффективности различных решателей на тестовых задачах посвящены работы [67, 117, 118].

Среди наиболее популярных и удобных интерфейсов, позволяющих обращаться к решателям в среде Matlab (в частности, к SeDuMi, SDPT3, MOSEK), являются свободно распространяемые пакеты YALMIP [115] (Yet Another LMI Parser) и `cvx` [104].

Среди публикаций на русском языке отметим полезную книгу [60], в которой дается описание пакетов SeDuMi и YALMIP.

### 3. Квадратичные функции Ляпунова, устойчивость и синтез

Прежде чем обратиться к применению аппарата линейных матричных неравенств к системам с неопределенностью, обсудим его прямую связь с квадратичными функциями Ляпунова и анализом устойчивости линейных систем.

Как мы уже отмечали во введении, линейная система

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \tag{9}$$

устойчива тогда и только тогда, когда для нее существует квадратичная функция Ляпунова вида

$$V(x) = x^\top Q x \tag{10}$$

с положительно определенной матрицей $Q$. Отсюда сразу получаем следующий результат.

Теорема 1. *Устойчивость системы* (9) *эквивалентна разрешимости ЛМН*

$$A^\top Q + QA \prec 0, \quad Q \succ 0. \tag{11}$$

Первое из неравенств (11) называется *неравенством Ляпунова*. Таким образом, если брать на вооружение квадратичные функции Ляпунова, то использование аппарата ЛМН при анализе устойчивости систем неизбежно и естественно. Далее, пусть $Q \succ 0$ — какое-то решение системы (11); тогда из свойств функции Ляпунова видим, что эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: \ x^\top Q x \leqslant 1 \right\}$$

обладает следующим свойством: если $x_0 \in \mathcal{E}$, то и $x(t) \in \mathcal{E}$ для всех $t > 0$, т.е. начавшись в эллипсоиде $\mathcal{E}$, траектории устойчивой системы не покидают его во все моменты времени. Иногда такой эллипсоид называют удерживающим [84]; далее это свойство будет обобщено на случай наличия внешних возмущений в системе, приводя к так называемым инвариантным эллипсоидам.

Итак, аппарат линейных матричных неравенств тесно связан с рассмотрением квадратичных функций Ляпунова и идеологией эллипсоидального оценивания состояний системы.

Приведем аналогичный результат для линейной дискретной стационарной системы.

Т е о р е м а 2. *Устойчивость системы*

$$x_{k+1} = A x_k$$

*эквивалентна разрешимости ЛМН*

$$A^\top Q A - Q \prec 0, \quad Q \succ 0. \tag{12}$$

Первое из неравенств (12) называется *дискретным неравенством Ляпунова*. Практически все результаты, которые приводятся в дальнейшем для непрерывных систем, имеют подобные дискретные аналоги; не будем на них останавливаться.

Обратимся теперь к задаче синтеза и рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{13}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, с управляемой парой $(A, B)$. Замкнув ее линейной обратной связью по состоянию

$$u = Kx, \tag{14}$$

придем к замкнутой системе

$$\dot{x} = A_c x \tag{15}$$

с матрицей $A_c = A + BK$.

Функция (10) является функцией Ляпунова для системы (15) тогда и только тогда, когда

$$A_c^\top Q + Q A_c \prec 0,$$

т.е. когда найдутся матрицы $K$ и $Q \succ 0$ такие, что

$$(A + BK)^\top Q + Q(A + BK) \prec 0. \tag{16}$$

Неравенство (16) нелинейно (и невыпукло!) относительно матричных переменных $Q$ и $K$. От этого можно избавиться с помощью следующего общего приема.

Домножив неравенство (16) слева и справа на матрицу $P = Q^{-1}$, получим

$$(A + BK)P + P(A + BK)^{\top} \prec 0.$$

Введем вспомогательную матричную переменную $Y = KP$, исключая $K$. В силу $P \succ 0$, матрица $K$ восстанавливается единственным образом: $K = Y P^{-1}$. В результате приходим к матричному неравенству

$$AP + PA^{\top} + BY + Y^{\top} B^{\top} \prec 0,$$

линейному по переменным $Y$ и $P$. Получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть матрицы $\widehat{P}$ и $\widehat{Y}$ удовлетворяют ЛМН*

$$AP + PA^{\top} + BY + Y^{\top} B^{\top} \prec 0, \quad P \succ 0. \tag{17}$$

*Тогда регулятор* (14) *с матрицей $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$ стабилизирует систему* (13)*, а квадратичная форма $V(x) = x^{\top}\widehat{P}^{-1}x$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы.*

Видим, что для управляемых систем разрешимость ЛМН (17) *эквивалентна* возможности стабилизировать систему с помощью обратной связи по состоянию. Более того, теорема предлагает очень простую параметризацию всех стабилизирующих регуляторов через решения этого ЛМН и служит основой синтеза. Описанный выше подход к стабилизации, основанный на поиске квадратичной функции Ляпунова, был рассмотрен А.М. Мейлахсом в [31] в 1975 г., где впервые применен прием с введением вспомогательной переменной $Y$, который послужил систематической основой для использования ЛМН в задачах стабилизации. На Западе этот трюк стал известен после публикации работы [77] в 1989 г., а неявно он применялся в статье [145] 1981 г.

Такой подход не дает решения в явном виде, а сводит задачу к решению линейных матричных неравенств. Эта техника оказывается особенно эффективной для задач робастной стабилизации, когда требуется стабилизировать систему в условиях неопределенности, а также при наличии внешних возмущений и в разнообразных задачах оптимизации.

Рассмотрим теперь одну из типичных задач оптимального управления — задачу о линейно-квадратичном регуляторе (Linear Quadratic Regulator, LQR), в которой помимо стабилизации системы требуется оптимизировать некоторый показатель ее качества. Эта задача была поставлена и решена в 1960 г. Р.Е. Калманом и А.М. Летовым. Классический подход опирается на решение матричного уравнения Риккати, на основе которого находится матрица коэффициентов регулятора [66]. Однако с некоторых пор для ее решения стал привлекаться аппарат линейных матричных неравенств, например, см. [4, 37, 84] и библиографию, приведенную в этих книгах.

Одна из основных причин использования линейных матричных неравенств в этой задаче — их удобство при решении робастных постановок задачи, когда матрицы системы содержат аффинную неопределенность или известны с точностью до аддитивного возмущения, ограниченного по норме (на Западе такая тематика известна под названием *guaranteed-cost control*). Первые робастные постановки задачи о линейно-квадратичном регуляторе были предложены в [90, 127]; более свежие результаты содержатся в обзоре [76]. Из самых последних работ в этом направлении отметим [57].

Обсудим возможности аппарата ЛМН при решении задачи о линейно-квадратичном регуляторе без неопределенности в ее простейшей постановке. Рассматривается система (13), в которой пара $(A, B)$ управляема, а начальное состояние $x_0$ известно.

Цель состоит в нахождении управления $u$, которое минимизирует следующий квадратичный критерий качества:

$$J = \int_0^\infty (x^\top Rx + u^\top Su)dt, \tag{18}$$

где $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $S \in \mathbb{R}^{p\times p}$ — заданные положительно определенные весовые матрицы (так что $J > 0$, за исключением тривиального случая $x_0 = 0$, при котором $J = 0$). В основополагающих работах показано, что оптимальное управление в этой задаче достигается в классе статических линейных обратных связей по состоянию

$$u = Kx, \quad K \in \mathbb{R}^{p\times n}, \tag{19}$$

т.е. цель состоит в отыскании оптимальной матрицы $K$ регулятора.

Для того, чтобы функционал $J$ был конечен, необходимо и достаточно, чтобы система (13), замкнутая обратной связью (19), была устойчива. Управляемость пары $(A, B)$ гарантирует существование стабилизирующих обратных связей.

Классический метод решения (например, см. [66]) основан на рассмотрении алгебраического уравнения Риккати

$$A^\top Q + QA - QBS^{-1}B^\top Q + R = 0 \tag{20}$$

относительно матрицы $Q \succ 0$. При этом оптимальный регулятор дается выражением

$$K_{\text{ric}} = -S^{-1}B^\top Q_{\text{ric}}, \tag{21}$$

а минимальное значение функционала (18) равно

$$J_{\text{ric}} = x_0^\top Q_{\text{ric}} x_0,$$

где $Q_{\text{ric}}$ — положительно определенное решение уравнения (20). Такое решение существует и единственно в предположении об управляемости системы и невырожденности весовых матриц; при этом форма

$$V(x) = x^\top Q_{\text{ric}} x$$

является квадратичной функцией Ляпунова для замкнутой системы.

Важно отметить, что от начальных условий зависит лишь значение функционала, но не сам оптимальный регулятор $K_{\mathrm{ric}}$ и матрица $Q_{\mathrm{ric}}$.

Применение аппарата ЛМН к решению задачи о линейно-квадратичном регуляторе основано на рассмотрении неравенства Риккати вместо уравнения (20), преобразовании его к линейному виду с помощью леммы Шура и последующей минимизации линейной целевой функции на решениях полученного ЛМН.

Впервые ЛМН-формулировка задачи о линейно-квадратичном регуляторе, по-видимому, была предложена в [153]; за ней последовали многочисленные работы, в которых рассматривался функционал несколько иного вида, предполагалось наличие выхода у системы [84], ограничений на управление [154], использовался динамический регулятор по выходу [6] и пр. Однако предоставляемые регуляторы (в частности, именно такой регулятор предлагался в [40, 84]) оказывались зависимыми от начальных условий, и при их изменении задачу приходилось решать заново. Вероятно, первой работой, в которой с помощью техники ЛМН был построен регулятор, совпадающий с оптимальным (21), является [58]. Приведем этот результат в следующей формулировке.

Теорема 4. *Пусть $P_{\mathrm{ric}}$ — решение задачи полуопределенного программирования*

$$\max \operatorname{tr} P \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{pmatrix} AP + PA^\top - BS^{-1}B^\top & P \\ P & -R^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

*где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top$.*

*Тогда*

$$Q_{\mathrm{ric}} = P_{\mathrm{ric}}^{-1}, \quad K_{\mathrm{ric}} = -S^{-1}B^\top P_{\mathrm{ric}}^{-1},$$

*где $Q_{\mathrm{ric}}$ и $K_{\mathrm{ric}}$ определены в* (20) *и* (21) *через решение уравнения Риккати.*

Попытки строить $x_0$-независимый линейно-квадратичный регулятор с применением аппарата ЛМН предпринимались и ранее. Так, например, в работе [5] такой регулятор строился исходя из естественных соображений робастности — против наихудших начальных условий из единичного шара. Однако такой регулятор может отличаться от оптимального, полученного в теореме 4 и давать существенно худшие значения функционала для иных начальных условий.

## 4. Робастная устойчивость и стабилизация

### *4.1. Виды неопределенности*

Переходим к исследованию ситуаций, когда в описании системы (1) присутствует неопределенность. Как уже отмечалось, проблематика неопределенности является центральной в теории управления. Многочисленные монографии [2, 3, 24–26, 28, 59, 73, 74, 81, 88, 95, 102, 112, 137, 139, 142, 150, 155] всегда подчеркивали роль неопределенности и предлагали различные способы борьбы с нею. Опубликовано и много обзоров посвященных этим темам, из наиболее поздних отметим [128, 130]. Способов задания неопределенности довольно много и они сильно различаются; совсем кратко остановимся на некоторых из них. Сам перечень моделей неопределенности также будет весьма ограниченным по ряду причин. Во-первых, данный обзор посвящен в основном линейным системам, и чрезвычайно богатая тематика нелинейных систем [2, 108, 109] остается вне его рамок. Во-вторых, будем интересоваться в основном теми способами описания неопределенностей, которые позволяют применять аппарат ЛМН. Поэтому в обзоре не уделяется внимание, например, моделям типа неизвестных-но-ограниченных возмущений в измерениях [28, 59, 74, 81, 88, 95, 102, 112] или случайным возмущениям. Далее, нет возможности уделить внимание в обзоре и задачам оценивания, идентификации, фильтрации. Наконец, рассматриваются лишь управления типа статической линейной обратной связи по состоянию (2) и не исследуются другие типы управлений, см. [16, 25, 74].

Еще одна важная модель неопределенности связана с *частотной неопределенностью*: предполагается, что частотная характеристика системы задана с погрешностями, ограниченными в некоторой норме. Вопросы робастной устойчивости и синтеза регуляторов таких систем рассматриваются в многочисленных работах, посвященных $H_\infty$-теории, см., например, [74, 91, 96, 98, 155].

Поскольку в обзоре рассматриваются задачи, записанные в форме пространства состояний, будем интересоваться *параметрической неопределенностью*. В простейшей ситуации это означает, что в линейной системе без управления и без внешних возмущений

$$\dot{x} = A(\Delta)x \tag{22}$$

матрица системы зависит от параметров $\Delta$. В свою очередь, эта зависимость может быть различной. Рассмотрим несколько частных случаев.

*Интервальные полиномы.* Пусть система (22) записана во фробениусовой форме, а ее нижняя строка является интервальной (т.е. заданы верхние и нижние границы изменения каждого элемента). Иначе говоря, характеристический полином системы принадлежит интервальному семейству полиномов. Вопрос о робастной устойчивости таких систем решается необычайно просто. Знаменитая теорема Харитонова утверждает, что робастная устойчивость интервального семейства эквивалентна устойчивости четырех специальных полиномов. Существуют и графические способы проверки робастной устойчивости (годограф Цыпкина–Поляка). Эти подходы связаны с теорией $D$-разбиения, развитой Ю.И. Неймарком. Об этих результатах можно прочесть в книгах [36, 40]. К сожалению, попытки перенести теорему Харитонова на другие классы задач (например, на дискретные системы или интервальные матрицы) оказались безуспешными, поэтому для других типов неопределенности нужны другие методы.

*Аффинные неопределенности.* Пусть матрица $A(\Delta)$ в (22) принадлежит выпуклой оболочке $m$ заданных матриц $A_i$:

$$A(\Delta) = \sum_{i=1}^{m} q_i A_i, \quad q_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} q_i = 1. \tag{23}$$

Достаточным условием робастной устойчивости является наличие общей функции Ляпунова для матриц $A_i$.

*Теорема 5. Если система ЛМН*

$$A_i^\top Q + QA_i \prec 0, \quad i = 1, \dots m,$$

*имеет решение $Q \succ 0$, то система* (22), (23) *робастно устойчива.*

Матрица $Q$ определяет общую квадратичную функцию Ляпунова для неопределенной системы. Впервые термин квадратичная устойчивость был введен в [106] применительно к синтезу стабилизирующего регулятора для семейства систем, см. также [71, 72].

Результат теоремы 5 немедленно следует из условий выпуклости; отметим, что этот простой критерий формулируется именно в терминах ЛМН. Замечательно, что это условие справедливо даже в более широком классе *нестационарных* неопределенностей $q_i(t)$. К сожалению, это условие является лишь достаточным: можно построить примеры (даже для $m = 2$) когда аффинное семейство робастно устойчиво, однако общей функции Ляпунова не существует.

Чтобы преодолеть эти трудности, в работах [92, 107, 125] был предложен более гибкий подход, основанный на понятии $S$-переменной. Он основан на том, что простейшее условие устойчивости (11) эквивалентно условию

$$\begin{pmatrix} 0 & Q \\ Q & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ -A^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^\top & G^\top \end{pmatrix} \prec 0,$$

включающему дополнительные матрицы $F$, $G$ (так называемые $S$-переменные). На этом пути получается следующий результат.

*Теорема 6. Если система ЛМН*

$$\begin{pmatrix} 0 & Q_i \\ Q_i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ -A_i^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^\top & G^\top \end{pmatrix} \prec 0, \quad Q_i \succ 0, \quad i = 1, \dots m,$$

*относительно матричных переменных $F$, $G$ и $Q_i$ имеет решение, то система* (22), (23) *робастно устойчива.*

В этом случае оказывается, что матрица

$$Q = \sum_{i=1}^m q_i Q_i$$

определяет зависящую от параметров функцию Ляпунова $V(x) = x^\top Qx$. Это менее жесткое требование, чем существование одной функции Ляпунова для всего семейства. Правда, такой подход не годится для анализа нестационарных неопределенностей. Примеры показывают, что проверка робастной устойчивости на основе этого результата дает заметно лучшие оценки допустимой неопределенности, чем с помощью предыдущей теоремы об общей функции Ляпунова.

Аналогичные результаты для дискретных систем были получены в [124]. Тематика параметрических функций Ляпунова продолжалась и в ряде других работ, например [97, 99, 135].

*Структурированная неопределенность.* Наиболее типичный класс неопределенностей имеет вид

$$A(\Delta) = A + F\Delta H, \quad \|\Delta\| \leqslant 1,$$

где матрицы $A$, $F$, $H$ заданы, а неопределенность $\Delta$ ограничена в операторной матричной норме. Размерности $\Delta$, $F$, $H$ могут быть различны, требуется лишь, чтобы выражение $F\Delta H$ имело смысл. Именно этим классом неопределенностей займемся дальше в этом разделе.

### *4.2. Лемма Питерсена*

Основным техническим средством работы со структурированными неопределенностями служит так называемая лемма Питерсена [126] (и ее модификации [55]), эффективно применяемая в разнообразных робастных постановках задач стабилизации и управления. В частности, эта лемма является удобным инструментом анализа робастной квадратичной устойчивости систем со структурированной неопределенностью, позволяя отыскивать общую квадратичную функцию Ляпунова.

Пусть $G \in \mathbb{S}^{n\times n}$ — заданная матрица; рассмотрим ее возмущение вида

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top, \tag{24}$$

где $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$ — возмущающая матрица, а $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$ — постоянные “обрамляющие” матрицы соответствующих размерностей, задающие структуру неопределенности. Подчеркнем, что в этой схеме симметричное возмущение задается с помощью матрицы $\Delta$, которая не обязана быть симметричной и даже квадратной.

Такая симметризованная схема неопределенности естественным образом возникает в задачах, связанных с построением квадратичной функции Ляпунова для динамической системы, матрица которой содержит произвольную, но ограниченную по норме матричную неопределенность $\Delta$. Именно этим фактом прежде всего объясняется многообразие приложений, в которых встречается модель (24).

Лемма Питерсена отвечает на вопрос о том, при каких условиях возмущенная матрица (24) является знакоопределенной при всех ограниченных по норме возмущениях $\Delta$.

Л е м м а 3. *Пусть $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, а $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$ — ненулевые матрицы. Неравенство*

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \preccurlyeq 0$$

*справедливо для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$: $\|\Delta\| \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда существует число $\varepsilon$ такое, что*

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon M M^\top & N^\top \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Обратим внимание на то, что матричная неопределенность $\Delta$ не предполагается фиксированной; единственное требование — ее ограниченность по норме. Таким образом, полученный результат, справедлив в том числе и для нестационарной неопределенности $\|\Delta(t)\| \leqslant 1$.

Итак, лемма Питерсена сводит проверку знакоопределенности семейства (24) к задаче разрешимости линейного матричного неравенства относительно одной скалярной переменной $\varepsilon$. Такая форма будет неоднократно использоваться в дальнейшем, значительно упрощая вычисления.

Лемма Питерсена решает задачу анализа, предоставляя необходимое и достаточное условие робастной знакоопределенности семейства (24) при фиксированном уровне возмущения $\Delta$. Естественным обобщением этого результата является отыскание максимально допустимого уровня, сохраняющего знакоопределенность семейства

$$G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top, \quad \|\Delta\| \leqslant \gamma. \tag{25}$$

Предполагая далее, что $G \prec 0$, введем в рассмотрение *радиус знакоопределенности* (*робастности*) семейства (25):

$$\gamma_{\max} = \sup\Big\{\gamma\colon\ G + M\Delta N + N^\top \Delta^\top M^\top \prec 0 \text{ для всех } \|\Delta\| \leqslant \gamma\Big\}.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 7. *Пусть $\widehat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования*

$$\max \gamma \quad \textit{при ограничении} \quad \begin{pmatrix} G + \varepsilon M M^\top & \gamma N^\top \\ \gamma N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

*относительно скалярных переменных $\varepsilon$ и $\gamma$.*

*Тогда радиус знакоопределенности семейства* (25) *равен $\widehat{\gamma}$.*

Таким образом, нахождение радиуса знакоопределенности сводится к простой задаче полуопределенного программирования.

### *4.3. Робастная квадратичная устойчивость и стабилизация*

В общей ситуации непосредственная проверка робастной устойчивости заданного семейства систем весьма сложна [37, 40]; трудной является и задача отыскания величины радиуса робастной устойчивости, более того, в общем случае отсутствуют регулярные способы ее решения. Поэтому часто используется подход, основанный на достаточных условиях робастной устойчивости — он состоит в построении общей квадратичный функции Ляпунова для неопределенных семейств, и потому называется робастной квадратичной устойчивостью; см., подробнее, монографии [37, 84] и ссылки в них.

Рассмотрим матричное семейство со структурированной неопределенностью вида

$$A(\Delta) = A + F\Delta H, \tag{26}$$

где номинальная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ устойчива, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, а возмущение $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$ (возможно, зависящее от времени) ограничено по норме:

$$\|\Delta\| \leqslant \gamma.$$

Встав на позиции квадратичной устойчивости, легко видеть, что построение общей функции Ляпунова в этом случае сводится к решению линейных матричных неравенств, значительно упрощая вычисления. Рассмотрим сперва задачу проверки квадратичной устойчивости при $\|\Delta\| \leqslant 1$.

Действительно, выполнение неравенства Ляпунова

$$(A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top \prec 0,$$

т.е.

$$AP + PA^\top + F\Delta HP + PH^\top\Delta^\top F^\top \prec 0$$

с некоторой матрицей $P \succ 0$ при всех допустимых неопределенностях означает, что у семейства (26) есть общая квадратичная функция Ляпунова $V(x) = x^\top P^{-1}x$. Теперь остается воспользоваться леммой Питерсена при

$$G = AP + PA^\top, \quad M = F, \quad N = HP,$$

и записать последнее матричное неравенство в виде эквивалентного ему ЛМН относительно скалярной переменной $\varepsilon$ и матричной переменной $P \succ 0$:

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \varepsilon FF^\top & PH^\top \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0. \tag{27}$$

Если это ЛМН разрешимо, семейство (26) робастно квадратично устойчиво, и наоборот. С учетом однородности неравенства (27) по $P$ и $\varepsilon$ приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 8. *Разрешимость линейных матричных неравенств*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричной переменной* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *эквивалентно квадратичной устойчивости семейства* (26) *при всех* $\|\Delta\| \leqslant 1$, *причем решение* $\widehat{P}$ *определяет общую квадратичную функцию Ляпунова.*

Теперь нетрудно вычислить *радиус квадратичной устойчивости* семейства (26):

$$\gamma_{\max} = \sup\Big\{\gamma\colon\ (A + F\Delta H)P + P(A + F\Delta H)^\top \prec 0 \\ \text{при некотором}\ \ P \succ 0\ \ \text{и всех}\ \ \|\Delta\| \leqslant \gamma\Big\},$$

то есть максимальный размах $\gamma_{\max}$ неопределенности $\Delta$, такой, что при всех $\gamma < \gamma_{\max}$ у семейства имеется общая квадратичная функция Ляпунова.

*Теорема 9. Пусть $\widehat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования*

$$\max \gamma \quad \textit{при ограничениях} \quad \begin{pmatrix} AP + PA^\top + \gamma FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и скалярной переменной $\gamma$. Тогда радиус квадратичной устойчивости семейства* (26) *равен $\sqrt{\widehat{\gamma}}$.*

Вопрос о радиусе квадратичной устойчивости для дискретной системы решается аналогично непрерывному случаю.

Перейдем к вопросам робастной стабилизации и рассмотрим семейство

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu, \tag{28}$$

со структурированной матричной неопределенностью, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, пара $(A, B)$ управляема, а матричная неопределенность $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$ удовлетворяет ограничению $\|\Delta\| \leqslant 1$. Цель прежняя — стабилизировать систему (28) с помощью линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx \tag{29}$$

при всех допустимых неопределенностях.

Ответ дается следующим утверждением, предоставляющим необходимые и достаточные условия робастной квадратичной стабилизируемости неопределенной системы.

*Теорема 10. Пусть матрицы $\widehat{P}$ и $\widehat{Y}$ удовлетворяют линейным матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top + FF^\top & PH^\top \\ HP & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succ 0.$$

*Тогда регулятор* (29) *с матрицей*

$$\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$$

*робастно стабилизирует систему* (28) *при всех неопределенностях $\|\Delta\| \leqslant 1$, а квадратичная форма*

$$V(x) = x^\top \widehat{P}^{-1} x$$

*является общей функцией Ляпунова для замкнутой системы* (*при всех неопределенностях $\|\Delta\| \leqslant 1$*).

Как увидим далее, идеи и технические средства, использующиеся при построении робастно квадратично стабилизирующих регуляторов, существенным образом применяются при решении задач управления с внешними возмущениями.

## 5. Внешние возмущения

Задача о подавлении внешних возмущений является одной из основных в теории управления и рассматривается в различных ее разделах. В линейно-квадратичной оптимизации рассматриваются задачи со случайными гауссовскими помехами (так называемая линейно-квадратичная гауссовская задача, LQG). Проблема $H_\infty$-оптимизации связана либо с гармоническими внешними возмущениями, либо со случайными гауссовскими, либо с возмущениями из класса $L_2$ (т.е., по-существу, убывающими с течением времени). Однако во многих практических случаях внешние возмущения являются просто ограниченными; какая-либо дополнительная информация о них отсутствует.

### *5.1. Анализ*

Рассмотрим одну из простейших постановок задач для линейной стационарной динамической системы в непрерывном времени

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax + Dw, \quad x(0) = x_0,\\
&z = Cx,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $z(t) \in \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, принадлежащее тому или иному классу (такие возмущения будем далее называть допустимыми).

Требования, предъявляемые ко внешнему возмущению, можно понимать и определять по-разному; будем интересоваться тремя основными случаями:

а) случайные внешние возмущения;

б) $L_2$-ограниченные внешние возмущения;

в) $L_\infty$-ограниченные внешние возмущения.

На системах со случайными возмущениями остановимся совсем кратко. Во многих задачах на систему действуют случайные внешние возмущения, и естественно интересоваться ее реакцией на такие возмущения. Разумеется, эта реакция тоже будет случайной, поэтому важны некоторые средние характеристики отклонений. Изучение таких характеристик для непрерывных систем требует математического аппарата (теории случайных процессов), отличающегося от обсуждаемого в настоящей работе, поэтому ограничимся наиболее простым случаем дискретных систем

$$x_{k+1} = Ax_k + Dw_k, \quad x_0 = 0,$$

и будем предполагать $w_k$ случайным вектором со следующими свойствами:

1) средние значения помех равны нулю: $\mathsf{E}\, w_k = 0$ (напомним, что знак $\mathsf{E}$ означает математическое ожидание);

2) матрица ковариаций помех задана: $\mathsf{E}\, w_k w_k^\top = \Sigma \succ 0$;

3) помехи не коррелированы во времени: $\mathsf{E}\, w_k w_l^\top = 0$, $k \neq l$.

Обозначим среднее значение вектора состояний $\mathsf{E}\, x_k = h_k$, а его матрицу вторых моментов $\mathsf{E}\, x_k x_k^\top = W_k$.

Имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 11. *При сделанных выше предположениях*

$$h_k = 0, \quad W_{k+1} = AW_kA^\top + D\Sigma D^\top, \quad W_0 = 0.$$

*Если матрица A шуровская, то существует*

$$W = \lim_{k\to\infty} W_k,$$

*и эта предельная матрица ковариаций удовлетворяет уравнению Ляпунова*

$$AWA^\top - W = -D\Sigma D^\top.$$

Оказывается, средние характеристики траекторий при случайных возмущениях качественно близки к гарантирующим характеристикам систем с $L_2$-ограниченными возмущениями (см. ниже раздел 5.1.1).

Перейдем к системам с $L_2$- и $L_\infty$-ограниченными внешними возмущениями. Для дальнейшего изложения понадобится ввести в рассмотрение понятие инвариантного эллипсоида.

О п р е д е л е н и е 1. *Эллипсоид с центром в начале координат*

$$\mathcal{E}_x = \Big\{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^\top P^{-1}x \leqslant 1\Big\}, \quad P \succ 0, \tag{31}$$

*называется инвариантным (по состоянию) для динамической системы* (30)*, если из условия* $x(0) \in \mathcal{E}_x$ *следует* $x(t) \in \mathcal{E}_x$ *для всех моментов времени* $t \geqslant 0$.

Иными словами, любая траектория системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде $\mathcal{E}_x$, при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему, в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде.

Инвариантный эллипсоид обладает следующим свойством:

$$x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathcal{E}_x \quad \text{при} \quad x(0) \notin \mathcal{E}_x$$

(при этом, возможно, $x(t) \in \mathcal{E}_x$ при $t \geqslant T$ для некоторого $T > 0$), т.е. траектория системы, исходящая из точки вне эллипсоида $\mathcal{E}_x$, стремится к эллипсоиду $\mathcal{E}_x$ с течением времени. Таким образом, инвариантный эллипсоид является также и притягивающим.

Соответственно, если начальное состояние системы принадлежит инвариантному эллипсоиду, имеем равномерную оценку поведения траекторий системы — в любой момент времени траектории принадлежат этому эллипсоиду при любых допустимых внешних возмущениях; если начальные условия произвольны, имеем асимптотическую оценку поведения траекторий системы — траектории будут стремиться к этому эллипсоиду с течением времени при любых допустимых внешних возмущениях.

Важно отметить, что с инвариантным эллипсоидом (31) ассоциирована квадратичная форма

$$V(x) = x^\top P^{-1}x,$$

которая будет служить квадратичной функцией Ляпунова для системы (30) вне соответствующего инвариантного эллипсоида.

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как внешние аппроксимации множества достижимости

$$\mathcal{R} = \big\{x \in \mathbb{R}^n: \quad x = x(t),\ t \geqslant 0,\ \text{— решение (30) при } x(0) = 0\big\},$$

являющегося в общем случае некоторым замкнутым ограниченным выпуклым множеством и при этом — наименьшим (по включению) инвариантным множеством. Понятие инвариантного эллипсоида является более полезным и робастным по сравнению с множеством достижимости: в последнем предполагается, что начальные условия нулевые, однако малое отклонение в начальном условии может привести к тому, что траектория выйдет за пределы достижимого множества.

Именно достижимые множества дают наиболее полное описание динамической системы, однако они весьма сложны для изучения. Среди различных подходов к их исследованию отметим следующий. Поскольку достижимое множество представляет собой множество точек фазового пространства, в которые может перейти динамическая система из начала координат при некоторых допустимых возмущениях, то можно возмущения $w$ рассматривать в качестве управлений. При этом придем к задаче классического оптимального управления о попадании в начало координат. Структура достижимых множеств рассматривалась в ряде работ начиная с середины прошлого столетия. Наиболее полные результаты приведены в монографии А.М. Формальского [48], где исследованы не только ограничения (35), но и многие другие (например, возмущения, ограниченные в $L_1$- и $L_2$-нормах, а также их комбинации). Различные факты о строении достижимых множеств получены в книге А.Б. Куржанского [28].

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. А именно, в рамках задачи анализа проблема состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на вектор выхода системы. В этой связи естественно интересоваться минимальными в некотором смысле эллипсоидами, содержащими выход системы.

Нетрудно видеть, что если $\mathcal{E}_x$ — инвариантный эллипсоид (31) с матрицей $P$, то выход системы (30) при $x_0 \in \mathcal{E}_x$ принадлежит эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \big\{z \in \mathbb{R}^l: \quad z^\top (CPC^\top)^{-1} z \leqslant 1\big\}. \tag{32}$$

В частности, в случае одномерного выхода ($l = 1$) этот эллипсоид является полосой $\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}:\ |z| \leqslant \sqrt{CPC^\top}\}$, в которой будет находиться выход $z$ системы.

Эллипсоид (32) будем называть *ограничивающим* (*по выходу*). Как отмечалось выше, его минимальность можно понимать в разных смыслах; здесь рассматривается линейная функция $f(P) = \operatorname{tr} CPC^\top$, которая соответствует сумме квадратов его полуосей.

Выбор линейного (или линеаризуемого) критерия минимальности эллипсоида позволяет свести проблему к стандартной задаче полуопределенного программирования и тем самым существенно упростить результаты. Заметим, что в случае одномерного выхода все эти критерии совпадают.

**5.1.1. $L_2$-ограниченные внешние возмущения.** Рассмотрим систему (30) с возмущениями, ограниченными в $L_2$-норме:

$$\|w\|_2^2 = \int\limits_0^\infty w^\top(t)w(t)dt \leqslant 1. \tag{33}$$

Будем полагать, что система устойчива (матрица $A$ гурвицева), а $C$ — матрица полного ранга.

Условие $x(0) = 0$ не является ограничительным, поскольку при $x(0) \neq 0$ решение системы представимо в виде $x(t) = \mathrm{e}^{At}x(0) + x_0(t)$, где $x_0(t)$ — решение при нулевых начальных условиях.

Множество

$$R(T) = \big\{x(T):\ x(t) \text{ — решение (30) при некотором } w\colon\ \|w\|_2 \leqslant 1\big\}$$

называется *множеством достижимости в момент* $T \geqslant 0$, а их объединение

$$R = \bigcup_{T\geqslant 0} R(T)$$

для всех $T \geqslant 0$ — просто *множеством достижимости.*

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 12. *Если пара $(A, D)$ управляема, то множество $R(T)$ является эллипсоидом*

$$R(T) = \Big\{x\colon\ x^\top W_c^{-1}(T)x \leqslant 1\Big\},$$

*с матрицей*

$$W_c(T) = \int\limits_0^T \mathrm{e}^{A\tau}DD^\top\mathrm{e}^{A^\top\tau}d\tau \succ 0.$$

*Если матрица $A$ устойчива (гурвицева), то множество $R$ представляет собой эллипсоид*

$$R = \Big\{x\colon\ x^\top W^{-1}x \leqslant 1\Big\},$$

*где* $W = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{A\tau}DD^\top\mathrm{e}^{A^\top\tau}d\tau \succ 0$ *— грамиан управляемости, т.е. решение уравнения Ляпунова*

$$AW + WA^\top = -DD^\top.$$

Таким образом, множество достижимости для устойчивых систем с $L_2$-ограниченным внешним возмущением имеет очень простой вид — оно является эллипсоидом. Очевидно, что если ввести в рассмотрение выходную величину

$$z = Cx,$$

то соответствующее множество выходов также является эллипсоидом

$$\left\{z: \ z^\top (CWC^\top)^{-1} z \leqslant 1\right\} \tag{34}$$

с матрицей $CWC^\top \succ 0$, поскольку $C$ — матрица полного ранга. В частности, для системы со скалярным выходом $z = c^\top x$ этот эллипсоид схлопывается в отрезок:

$$|z| \leqslant \sqrt{c^\top W c}.$$

Естественно искать такое управление, которое обеспечивает минимум выхода при всех допустимых возмущениях того или иного типа. В частности, для систем с $L_2$-ограниченными возмущениями, критерием оптимальности при выборе обратной связи может служить размер эллипсоида (34).

Аналогичные результаты верны и для дискретных систем.

**5.1.2. $L_\infty$-ограниченные внешние возмущения.** Впервые задача об оптимальном подавлении неслучайных ограниченных возмущений была сформулирована в работе Е.Д. Якубович, а ее полное решение было построено в работах А.Е. Барабанова и О.Н. Граничина и позже — М. Далеха и Дж. Пирсона. Впоследствии эта теория получила название $l_1$-оптимизации. Однако методы $l_1$-оптимизации имеют ряд существенных недостатков: ее применение к задаче синтеза оптимального управления часто приводит к регуляторам очень высокого порядка; отметим и асимптотический характер получающихся оценок.

Существует иной подход к данной проблематике, основанный на методе инвариантных множеств. Инвариантные множества довольно широко используются в различных задачах гарантированного оценивания, фильтрации и минимаксного управления в динамических системах при наличии неопределенностей в измерениях. Принципиальными в этом направлении можно считать работы Ф. Швеппе [139], Д. Бертсекаса [78, 79], А.Б. Куржанского [28] и Ф.Л. Черноусько [59], см. также [27]. Инвариантные множества во многих случаях оказываются удобными аппроксимациями областей достижимости динамических систем; это позволяет их широко использовать в задачах анализа. Концепция инвариантности также активно применяется и в других разделах теории систем и автоматического управления (см. обзорную статью Ф. Бланкини [80] и монографию Ф. Бланкини и С. Миани [81]). Среди различных форм инвариантных множеств особо выделяют эллипсоиды из-за их простой структуры и прямой связи с квадратичными функциями Ляпунова. Ввиду этого, в рамках эллипсоидального описания, в качестве технического средства может быть использован аппарат линейных матричных неравенств и полуопределенного программирования.

Вопросам использования ЛМН-техники в целях подавления возмущений посвящены работы [4, 37, 64, 82, 84], см. также библиографию в [37]. В западной литературе этот круг вопросов называется *peak-to-peak gain minimization*. Это означает, что целью является уменьшение максимального (*пикового*) значения выхода при ограниченных максимальных значениях возмущений (речь идет о системах с одним входом – одним выходом; эллипсоидальная техника обобщает этот подход на многомерный случай).

Систематическое использование техники ЛМН позволяет переформулировать проблему подавления ограниченных внешних возмущений в терминах инвариантных эллипсоидов. Применение этой концепции позволяет свести синтез оптимального регулятора к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой динамической системы. Такой подход приводит к простым оптимальным регуляторам; он имеет большой потенциал и возможности для обобщений, в равной мере распространим как на непрерывный, так и на дискретный варианты задачи. Систематическое изложение результатов об управлении в линейных системах с неопределенностью при внешних возмущениях можно найти в [37].

ЛМН-подход к подавлению $L_\infty$-ограниченных внешних возмущений не свободен и от недостатков: ему присущ определенный консерватизм, обусловленный тем, что достижимые множества не являются эллипсоидами.

Итак, вновь рассмотрим систему (30) с измеримым по $t$ внешним возмущением, ограниченным в каждый момент времени:

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \quad \text{для всех } t \geqslant 0. \tag{35}$$

Отметим, что никаких других ограничений на возмущение $w(t)$ не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Будем полагать, что система (30) устойчива (т. е. матрица $A$ гурвицева), пара $(A, D)$ управляема, $C$ — матрица полного ранга.

Разумеется, если матрица $A$ устойчива, то все решения системы (30) при допустимых возмущениях $w(t)$ ограничены:

$$\limsup_{t\geqslant 0} \|x(t)\| \leqslant r.$$

Наименьшее такое число $r$ в западной литературе называют "*peak-to-peak gain*" — коэффициент усиления от возмущений (ограниченных единицей) к норме состояния системы (см. [93]). Можно, однако, интересоваться более точным описанием системы с помощью инвариантных эллипсоидов. Для рассматриваемого — простейшего — случая в [64, 84] была установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 13. *Эллипсоид* (31) *является инвариантным по состоянию для динамической системы* (30), (35) *тогда и только тогда, когда его матрица $P \succ 0$ удовлетворяет ЛМН*

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preccurlyeq 0 \tag{36}$$

*при некотором $\alpha > 0$.*

Как отмечалось выше, степень влияния $L_\infty$-ограниченных внешних возмущений $w$ на выход $z$ системы сводится к нахождению ограничивающего эллипсоида (32), минимального по тому или иному критерию. В частности, для скалярного выхода оценивается максимальное по модулю значение $z$.

### *5.2. Синтез*

При синтезе управления обычно желательно обеспечивать малость выхода при всех допустимых возмущениях из данного класса. В частности, для систем с $L_2$- или $L_\infty$-ограниченными возмущениями в качестве критерия оптимальности при выборе обратной связи нередко принимается размер инвариантного эллипсоида.

Будем рассматривать систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + Dw, \quad x(0) = 0, \\ z &= Cx + B_2 u, \end{aligned} \tag{37}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{l\times p}$, с вектором состояния $x(t) \in \mathbb{R}^n$, вектором выходных переменных выходом $z(t) \in \mathbb{R}^l$, вектором управления $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и вектором внешних возмущений $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в $L_2$- или $L_\infty$-норме.

Однако прежде, чем переходить к $L_2$- и $L_\infty$-ограниченным возмущениям, кратко обсудим подходы к решению задачи синтеза при случайных внешних возмущениях, а именно, рассмотрим задачу о выборе регулятора, в максимальной степени подавляющего случайные помехи. Вновь ограничившись дискретным случаем, рассмотрим систему

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Dw_k, \quad x_0 = 0,$$

со случайными возмущениями $w_k$, удовлетворяющими прежним предположениям о несмещенности, ограниченности ковариаций и некоррелированности. Целью является выбор регулятора в форме линейной обратной связи по состоянию

$$u_k = Kx_k,$$

которая делает систему устойчивой и при этом минимизирует средний разброс траекторий на бесконечности, т.е. минимизирует след предельной матрицы ковариаций $W$. Поскольку матрица замкнутой системы имеет вид $A + BK$, получаем для $W$ уравнение

$$(A + BK)W(A + BK)^\top - W = -D\Sigma D^\top,$$

которое после стандартной замены $Y = KW$ переходит в линейное матричное неравенство относительно матриц $W$, $Y$:

$$AWA^\top + BYA^\top + AY^\top B^\top - W = -D\Sigma D^\top, \quad W \succ 0.$$

Минимизируя какую-либо заданную характеристику матрицы $W$ (например, $\operatorname{tr} W$ или $CWC^\top$ при наличии скалярного выхода $y = Cx$) при этих ограничениях, можно найти решение $\widehat{W}$, $\widehat{Y}$, а по нему — оптимальный регулятор

$$K = \widehat{Y}\widehat{W}^{-1}.$$

Как будет видно далее, случайность помех не вносит принципиальной разницы в решение задачи о синтезе регулятора, когда целью является минимизация отклонений от равновесия в среднем.

**5.2.1. $L_2$-ограниченные внешние возмущения.** Как известно, для возмущений, ограниченных в $L_2$-норме, естественной мерой их влияния является $H_\infty$-норма выхода. Обратимся к системе (37) с внешними возмущениями, удовлетворяющими условию (33): в простейшей постановке задача $H_\infty$-оптимизации заключается в выборе регулятора в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \tag{38}$$

который минимизирует $H_\infty$-норму передаточной функции $H(s)$ замкнутой системы.

Введем в рассмотрение функционал

$$J = \sup_{\|w\|_2 \leqslant 1} \int_0^\infty z^\top z \, dt = \sup_{\|w\|_2 \leqslant 1} \|z\|_2^2 \tag{39}$$

и будем искать его минимум по всем стабилизирующим регуляторам вида (38); решение этой задачи и дает $H_\infty$-оптимальный регулятор. Обратим внимание, что в (37) управление включено в уравнение для выхода для того, чтобы ограничить величину используемого управления. ЛМН-подход к решению этой задачи опирается на описание достижимого множества и сводит исходную задачу к полуопределенному программированию.

Проделывая стандартные преобразования, делая описанные выше замены переменных и используя лемму Шура (подробности можно найти в [37]), приходим к следующему результату.

Теорема 14. *Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{\gamma}$ — решение задачи*

$$\min \gamma \quad \textit{при} \quad \begin{pmatrix} AP + PA^\top + B_1Y + Y^\top B_1^\top & D & PC^\top & Y^\top B_2^\top \\ D^\top & -\gamma I & 0 & 0 \\ CP & 0 & -I & 0 \\ B_2Y & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричных переменных $P = P^\top$, $Y$ и скалярной переменной $\gamma$.*

*Тогда стабилизирующий регулятор с матрицей* $\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$ *минимизирует функционал* (39) *на решениях системы* (37)*:*

$$J_{\min} = \widehat{\gamma},$$

*а квадратичная форма* $V(x) = x^\top \widehat{P}^{-1}x$ *является функцией Ляпунова для замкнутой системы.*

Выше предполагалось, что состояние системы известно, однако аналогичная техника применима и для задачи управления по выходу; кроме того, возможен и ряд других, более общих постановок задачи, а также ее дискретные аналоги. Дальнейшее развитие этой линии исследований можно найти в работах Д.В. Баландина и М.М. Когана и их учеников, см., например, [8, 10, 12, 23, 68, 70]. В частности, в рамках этого подхода возможен учет неопределенности в начальном условии; иногда неопределенность в начальном условии и внешнем возмущении объединяется в одно ограничение вида $\|x_0\|^2 + \|w\|^2 \leqslant \gamma$, где $\|\cdot\|$ — некоторые нормы.

Проблематика построения оптимальных регуляторов по отношению к обобщенной $H_2$-норме, которые обеспечивают минимум максимального по времени значения евклидовой нормы выхода при внешнем возмущении из класса $L_2$, освещена в публикациях [11, 69], см. также ссылки в них.

**5.2.2. $L_\infty$-ограниченные внешние возмущения.** В рамках рассматриваемого подхода эффективно решается задача синтеза обратной связи для систем, подверженных воздействию произвольных ограниченный внешних возмущений; см. [32, 131]. Для компенсации влияния таких возмущений на выход системы строится регулятор в виде статической линейной обратной связи по состоянию. Искомый оптимальный регулятор, минимизирующий влияние возмущений, задается наименьшим ограничивающим эллипсоидом по выходу для замкнутой системы.

Итак, целью является нахождение регулятора $K$ в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \tag{40}$$

который стабилизирует замкнутую систему (37) при внешних возмущениях, удовлетворяющих условиям (35), и оптимально (например, в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида для выхода системы) подавляет воздействие внешних возмущений. Заметим, что наличие ненулевой компоненты $B_2u$ в выходе системы (37) позволяет при минимизации выхода избежать появления больших значений управления.[1]

В следующей теореме поиск оптимального регулятора сводится к задаче полуопределенного программирования и одномерной минимизации.

Т е о р е м а 15. *Пусть* $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{Z}$ *— решение задачи*

$$\min \operatorname{tr}\left[CPC^\top + CY^\top B_2^\top + B_2YC^\top + B_2ZB_2^\top\right]$$

[1] Как известно, если управление и возмущение приложены “в одной точке”, т. е. матрицы $B_1$ и $D$ совпадают, то за счет огромного управления выход системы можно сделать сколь угодно малым.

*при ограничениях*

$$AP + PA^\top + B_1 Y + Y^\top B_1^\top + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preccurlyeq 0,$$
$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричных переменных* $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $Z = Z^\top \in \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *и скалярного параметра* $\alpha > 0$.

*Тогда регулятор* (40) *с матрицей*

$$\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$$

*стабилизирует систему* (37), (35) *и оптимально подавляет внешние возмущения, при этом матрица минимального* (*по критерию следа*) *ограничивающего эллипсоида для выхода* $z$ *замкнутой системы с* $x_0 = 0$ *дается выражением*

$$C\widehat{P}C^\top + C\widehat{Y}^\top B_2^\top + B_2\widehat{Y}C^\top + B_2\widehat{Z}B_2^\top.$$

Обсуждаемая ЛМН-техника может быть распространена на задачу синтеза статической обратной связи по выходу [34], использующую оценку состояния, получаемую с помощью наблюдателя Люенбергера, на задачу построения линейного динамического регулятора по выходу [9, 50], а также на задачу фильтрации [33] для случая, когда все параметры модели не зависят от времени; в этом случае ищется оценка состояния, такая, что ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид для всех моментов времени, т.е. оценка является равномерной. В классе линейных стационарных фильтров и равномерных оценок проблема оказывается полностью разрешимой, т.е. построен оптимальный фильтр и получена оптимальная оценка состояния.

### *5.3. Робастное подавление $L_\infty$-ограниченных внешних возмущений*

Вышеприведенные результаты оказываются распространимыми на случай *робастного подавления внешних возмущений*, когда в матрицах системы содержится структурированная матричная неопределенность. Ограничимся случаем $L_\infty$-ограниченных возмущений и задачей анализа.

В простейшем случае рассматривается система

$$\begin{aligned} &\dot{x} = (A + \Delta A)x + (D + \Delta D)w, \quad x(0) = x_0, \\ &z = Cx, \end{aligned} \tag{41}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $z(t) \in \mathbb{R}^l$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению (35). При этом системные неопределенности $\Delta A$ и $\Delta D$ имеют структуру

$$\Delta A = F_A \Delta_A H_A, \quad \Delta D = F_D \Delta_D H_D, \tag{42}$$

где матричные неопределенности $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$ и $\Delta_D \in \mathbb{R}^{p_D \times q_D}$ удовлетворяют ограничениям

$$\|\Delta_A\| \leqslant 1, \quad \|\Delta_D\| \leqslant 1, \tag{43}$$

а $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$, $F_D \in \mathbb{R}^{n \times p_D}$, $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$, $H_D \in \mathbb{R}^{q_D \times m}$ — заданные постоянные матрицы. Будем полагать, что матрица $A$ гурвицева, пара $(A, D)$ управляема, $C$ — матрица полного ранга.

Для неопределенной системы определение инвариантного эллипсоида претерпевает следующее естественное изменение.

Определение 2. *Эллипсоид с центром в начале координат*

$$\mathcal{E}_x = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \Big\}, \quad P \succ 0,$$

*называется инвариантным для системы* (41)–(43), *если из условия* $x(0) \in \mathcal{E}_x$ *следует* $x(t) \in \mathcal{E}_x$ *для всех моментов времени* $t \geqslant 0$ *при всех допустимых возмущениях* $w(t)$ *и всех допустимых неопределенностях* $\Delta_A$, $\Delta_D$.

В [131] установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 16. *Эллипсоид* $\mathcal{E}_x$ *является инвариантным для динамической системы* (41), (35), (42), (43), *если его матрица* $P \succ 0$ *удовлетворяет ЛМН*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon_1 F_A F_A^\top + \varepsilon_2 F_D F_D^\top & D & PH_A^\top & 0 \\ D^\top & -\alpha I & 0 & H_D^\top \\ H_A P & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & H_D & 0 & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

*при некоторых* $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$.

Помимо ЛМН-техники, в качестве технического средства здесь используется упоминавшаяся выше лемма Питерсена.

Задачи робастного анализа и синтеза ставятся и решаются в публикациях [54, 131], робастной фильтрации — в [49]. В [56] ставится и решается задача построения нехрупкого регулятора, выдерживающего возмущения в матрицах системы.

В завершение раздела отметим, что ЛМН-техника позволяет синтезировать управление в системах, подверженным воздействию внешних возмущений, исходя из инженерных критериев качества, в частности, таких, как время установления, а решать задачи подавлению внешних ограниченных возмущений с помощью т. н. *комбинированной обратной связи* вида

$$u = Kx + K_1 w,$$

где наряду со статической линейной обратной связью по состоянию вводится линейная обратная связь по вектору возмущений или по части его компонент, мгновенные значения которых известны.

## 6. Ненулевые начальные условия

Остановимся подробнее на переходных процессах в системах с ненулевыми начальными условиями при отсутствии внешних возмущений.

Рассмотрим простейший случай системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \neq 0 \tag{44}$$

с гурвицевой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, так что $x(t) \to 0$ с ростом $t$. Однако оказывается, что решение такой системы может сильно отклоняться от нуля в конечные моменты времени; например, см. [35], где приведен исторический обзор работ в этом направлении и обсуждается связь со схожим явлением *перерегулирования*. Этот эффект отклонения, называемый *всплеском*, крайне нежелателен по многим естественным причинам. Среди них — возможная неустойчивость вычислительных схем численных методов, нарушение адекватности линеаризованной модели исходно нелинейной системы в окрестности рабочей точки, опасные режимы функционирования или разрушение технических систем, немонотонное поведение некоторых методов оптимизации и др. Техника линейных матричных неравенств предоставляет возможность эффективно получать верхние оценки величины всплеска и строить управление в виде обратной связи, минимизирующей эту оценку.

Для системы (44) введем величину

$$\eta(A, x_0) = \max_{t\geqslant 0} \frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|},$$

и если она больше единицы, будем говорить о наличии всплеска.

Естественно полагать, что начальные условия могут быть известны лишь с точностью до некоторого множества $\mathcal{B}$, т.е. в задаче о всплеске имеем еще один источник неопределенности — в начальных условиях. Такая неопределенность естественным образом возникает в самых разных ситуациях, например, в задачах стабилизации и управления при помощи наблюдателя с неизвестным начальным состоянием, или же в системах с переключениями, когда к моменту переключения система приходит в некоторую точку фазового пространства.

В этом случае интерес представляет собой оценка величины

$$\eta(A) = \max_{x_0\in\mathcal{B}} \eta(A, x_0) = \max_{x_0\in\mathcal{B}} \max_{t\geqslant 0} \frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|}. \tag{45}$$

Поскольку решение линейно зависит от начальных условий, то без потери общности считаем, что $\mathcal{B}$ — единичный шар, т.е. $\|x_0\| \leqslant 1$.

Решение системы (44) имеет вид

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x_0,$$

поэтому, меняя местами $\max\limits_{x_0\in\mathcal{B}}$ и $\max\limits_{t\geqslant 0}$ в (45), получаем

$$\eta(A) = \max_{t\geqslant 0} \|\mathrm{e}^{At}\|$$

(где $\|\cdot\|$ — операторная норма матрицы), т.е. величина отклонения напрямую связана с оценкой матричной экспоненты. В практических задачах стабилизации величина $\|e^{At}\|$ может принимать очень большие значения на конечных интервалах времени, но до недавних пор регулярные способы ее оценивания отсутствовали, как и методы подавления этих эффектов.

Получение численной верхней оценки для величины $\eta(A)$ с помощью линейных матричных неравенств может быть осуществлено следующим образом.

Рассмотрим систему (44) с устойчивой матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ее устойчивость эквивалентна существованию квадратичной функции Ляпунова

$$V(x) = x^\top P^{-1} x$$

с матрицей $P \succ 0$, удовлетворяющей неравенству Ляпунова

$$AP + PA^\top \prec 0,$$

которое является ЛМН относительно матричной переменной $P = P^\top$.

Рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \Big\}$$

с центром в начале координат и задаваемый матрицей $P$. По определению функции Ляпунова если $x_0 \in \mathcal{E}$, то $x(t) \in \mathcal{E}$ для всех $t > 0$. В частности, если этот эллипсоид содержит единичный шар $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leqslant 1\}$, что можно записать как $P \succcurlyeq I$, то из $x_0 \in \mathcal{B}$ следует $x(t) \in \mathcal{E}$ для всех $t > 0$. Последнее означает, что $\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\lambda_{\max}(P)}$ для всех $t > 0$, т.е. норма решения не превосходит корня из длины большой полуоси эллипсоида.

Таким образом, чтобы получить наилучшую верхнюю границу для $\|x(t)\|$, необходимо минимизировать большую полуось эллипсоида, задаваемого матрицей $P$, которая удовлетворяет неравенству Ляпунова и условию $P \succcurlyeq I$. Эта минимизация эквивалентна минимизации скалярной величины $\gamma$ в матричном неравенстве $P \preccurlyeq \gamma I$.

Получаем следующий результат.

Теорема 17. *Пусть $\widehat{\gamma}$ является решением задачи полуопределенного программирования*

$$\min \gamma \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^\top \prec 0, \quad I \preccurlyeq P \preccurlyeq \gamma I, \tag{46}$$

*относительно переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$.*

*Тогда для траекторий системы (44) имеем*

$$\max_{\|x_0\|\leqslant 1} \max_{t\geqslant 0} \|x(t)\| \leqslant \eta_{\text{upp}}(A) = \widehat{\gamma}^{1/2}$$

*для всех начальных условий $\|x_0\| \leqslant 1$.*

Таким образом, получена верхняя оценка величины операторной нормы матричной экспоненты.

По-видимому, первой работой, где была предложена эта идея, является [105]; в несколько иных постановках и формулировках, в том числе, и применительно к задачам синтеза (см. ниже), этот результат приводится в [7, 35, 151].

Совершенно аналогично получение верхней оценки всплеска дается для систем дискретного времени; разница заключается лишь в рассмотрении квадратичной функции Ляпунова

$$V(x_k) = x_k^\top P^{-1} x_k$$

и использовании дискретного неравенства Ляпунова $APA^\top - P \prec 0$; все остальные рассуждения и формулировки остаются теми же. По-видимому, первой работой по получению верхних оценок всплеска в дискретных системах является [22]; уточнения и развитие этого подхода обсуждаются в [1, 140, 141].

Естественно задаться вопросом о точности оценок, получаемых таким путем. Насколько известно авторам, теоретические результаты в этом направлении отсутствуют, но численные эксперименты, проведенные в [1], свидетельствуют о невысоком консерватизме оценок. А именно, случайным образом генерировались шуровские матрицы $A$, для них с помощью дискретной версии теоремы 17 вычислялась верхняя оценка; непосредственным возведением в степень также вычислялось истинное значение для $\max_k \|A^k\|$. Для подавляющей доли реализаций оценка превосходила истинную величину всплеска не более чем на 10–20%, а максимальная ошибка составляла 75%, так что техника LMI, по-видимому, дает приемлемые верхние оценки всплеска.

Интересно заметить, что анализ эффектов всплеска с помощью линейных матричных неравенств дает простые необходимые и достаточные условия отсутствия всплеска в линейных системах при любых начальных условиях. В самом деле, всплеск не наблюдается тогда и только тогда, когда решением задачи из теоремы 17 является $\gamma = 1$, что эквивалентно наличию у системы квадратичной функции Ляпунова с матрицей $P = I$, см. (46). Таким образом, для непрерывной системы с матрицей $A$ всплеска нет тогда и только тогда, когда $A + A^\top \prec 0$. Соответственно для дискретных систем необходимым и достаточным условием отсутствия всплеска является $AA^\top \prec I$. В частности, можно показать, что матрицы во фробениусовой форме этим условиям не удовлетворяют, т.е. для систем в канонической управляемой форме всегда найдутся начальные условия, дающие всплеск.

Аппарат линейных матричных неравенств примени́м и к синтезу обратной связи, минимизирующей всплеск решений замкнутой системы. Такие результаты в различных постановках получены в [7, 35, 105, 151] для непрерывных систем и в [1, 22, 140, 141] для дискретного времени. Техника решения совершенно аналогична той, которая неоднократно обсуждалась выше, с использованием вспомогательной матричной переменной (раздел 3). Так, если в непрерывной системе

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{47}$$

с матрицами $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, ищется обратная связь по состоянию $u = Kx$, то замкнутая система с матрицей $A + BK$ обладает квадратичной функцией Ляпунова с положительно определенной матрицей $P$, удовлетворяющей неравенству

$$(A + BK)P + P(A + BK)^\top \prec 0.$$

Введение новой переменной $Y = KP$ приводит последнее неравенство к виду, линейному по $P$ и $Y$:

$$AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0,$$

которое и используется в оптимизационной задаче из теоремы 17 вместо первого ограничения из (46). Приведем окончательный результат (см., например, [35], где он приведен в несколько иной формулировке).

Теорема 18. *Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$, $\widehat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования*

$$(48)\quad \min \gamma \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad I \preccurlyeq P \preccurlyeq \gamma I,$$

*относительно переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\gamma \in \mathbb{R}$.*

*Тогда для траекторий системы* (47) *с управлением*

$$u = \widehat{K}x, \quad \widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1},$$

*имеем*

$$\max_{\|x_0\|\leqslant 1} \max_{t\geqslant 0} \|x(t)\| \leqslant \eta_{\text{upp}}(A) = \widehat{\gamma}^{1/2}$$

*для всех начальных условий $\|x_0\| \leqslant 1$.*

Совершенно аналогично задача синтеза управления, подавляющего всплеск, решается для дискретных систем, см. [1, 22, 140, 141].

Следует отметить, что величина всплеска в устойчивой системе может быть очень большой даже для невысокой размерности; при этом обратная связь, построенная в теореме 18 часто дает значительное подавление всплеска. Так, в [1] приведен пример устойчивой дискретной системы четвертого порядка, для которой указанная обратная связь уменьшает оценку всплеска в $10^4$ раз.

Задача о всплеске может решаться и в робастной постановке, когда матрица системы содержит ограниченную по норме неопределенность вида

$$(49)\qquad A + F\Delta H, \quad \|\Delta\| \leqslant \delta,$$

где номинальная матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ устойчива, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$ и $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$ — известные матрицы, а $\delta > 0$ — некоторый уровень неопределенности, не превышающий радиуса квадратичной устойчивости матричного семейства (49) (см. раздел 4). Иными словами, с помощью линейных матричных неравенств можно исследовать эффекты всплеска при наличии неопределенности как в начальных условиях, так и в матрице системы, получая верхнюю оценку для величины

$$\eta = \max_{\|\Delta\| \leqslant \delta} \max_{\|x_0\| \leqslant 1} \max_{t \geqslant 0} \|x(t)\|.$$

Технически дело сводится к использованию в теоремах 17 и 18 неравенства Ляпунова (первое неравенство в (46) или (48)), модифицированного на случай системы с матрицей вида (49). Такая модификация проводится на основе леммы Питерсена, см. раздел 4. Приведем результат, полученный в [20].

Т е о р е м а 19. *Пусть $\widehat{P}$ — решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\min \|P\| \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{pmatrix} AP + PA^\top + \varepsilon\delta^2 FF^\top & PH^\top \\ HP & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0, \quad P \succcurlyeq I,$$

*относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и скалярной переменной $\varepsilon$.*

*Тогда для решений системы*

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x$$

*при всех $\|x_0\| \leqslant 1$ и всех допустимых неопределенностях $\|\Delta\| \leqslant \delta$ справедлива оценка отклонения*

$$\eta \leqslant \sqrt{\|\widehat{P}\|}.$$

В работе [20] также формулируется и решается задача синтеза управления, минимизирующего величину отклонения робастно против всех неопределенностей $\|\Delta\| \leqslant \delta$. Соответствующая задача для систем дискретного времени решалась в [1, 21].

Наконец, наряду с неизвестными начальными условиями можно рассматривать наличие неизвестных ограниченных внешних возмущений и оценивать сверху величину всплеска в таких условиях. По-существу, такая задача решается с использованием идеологии инвариантных эллипсоидов, рассмотренной в разделе 5. Действительно, *эллипсоидальная* неопределенность в начальных условиях вида $x_0 \in \mathcal{E}_0$, где $\mathcal{E}_0$ — эллипсоид с матрицей $P_0 \succ 0$ (в частности, $P_0 = I$), может быть учтена путем добавления условия $P \succcurlyeq P_0$ к неравенству (36) из теоремы 13 с последующей минимизацией большой полуоси эллипсоида с матрицей $P$. Подробности можно посмотреть в приведенных выше работах по подавлению внешних возмущений.

## 7. Разреженное управление

Идеи *разреженности* широко используются в обработке сигналов и изображений, распознавании образов и многих других областях. Одной из первых областей применения концепции разреженности является $\ell_1$-оптимизация, успешно развиваемая в различных направлениях, таких как compressed sensing, $\ell_1$-фильтрация и др. (см., например, [89, 111, 146]).

Математически задача сводится к минимизации числа ненулевых компонент вектора, определяемого так называемой $\ell_0$-(квази)нормой, при выпуклых ограничениях. Вместо этой трудной задачи обычно рассматривается результат ее овыпуклениия, получаемый при минимизации $\ell_1$-нормы. При этом, как правило, строгие оценки точности получающегося решения отсутствуют, однако его качество обычно достаточно высоко. Однако насколько можно судить, идеи разреженности не нашли широкого применения в управлении; среди немногочисленных публикаций по построению разреженной обратной связи можно упомянуть [113, 114], в которых разреженная структура оговорена заранее; особое внимание в этих работах уделено оптимизационным алгоритмам.

Прозрачная мотивация использования идей разреженности при синтезе управления предлагается так называемой $C^3$-*парадигмой*. Она включает в себя триаду *Control*, *Communication*, *Computation*, компоненты которой анализируются с единой точки зрения [95, 103, 116]. В рамках этого подхода уменьшение числа задействуемых при построении управления состояний системы естественно трактовать как число сенсоров или измеряющих устройств, число используемых управлений связано с числом необходимых управляющих устройств, а уменьшение числа требуемых выходов системы эквивалентно минимизации количества информации, передаваемой по каналу управления.

Обсуждаемый далее подход отличается простотой: исходные задачи сводятся к решению маломерных задач полуопределенного программирования, а для их численного решения могут быть использованы стандартные вычислительные средства. Начало этой линии исследований было положено в публикациях [38, 129].

Пусть $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$; введем в рассмотрение следующие специальные матричные нормы:

$$\|X\|_{r_1} = \sum_{i=1}^{n} \max_{1\leqslant j\leqslant p} |x_{ij}|, \qquad \|X\|_{c_1} = \sum_{j=1}^{p} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_{ij}|.$$

Первая из них иногда называется `rx`-нормой или $\ell_{1,\infty}$-нормой; ее основное применение — восстановление строчно-разреженных решений матричных уравнений [148]; аналогично, $r_1$-норма восстанавливает столбцово-разреженные решения.

Итак, обсудим специфику обсуждаемого подхода, который позволяет регулярным образом строить разреженные регуляторы. Рассмотрим линейную систему в непрерывном времени

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{50}$$

с фазовым состоянием $x \in \mathbb{R}^n$ и управлением $u \in \mathbb{R}^m$, так что $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, и пара $(A, B)$ управляема. Задача состоит в синтезе разреженного стабилизирующего управления

$$u = Kx,$$

под которым понимается наличие у вектора управления нулевых компонент. Эта задача эквивалентна нахождению строчно-разреженной матрицы стабилизирующего регулятора $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, т.е. имеющей некоторое количество нулевых строк.

Понятно, что за исключением вырожденных случаев управляемую систему всегда можно стабилизировать скалярным управлением. Соответственно оптимальное решение может быть найдено обнулением всех строк матриц регулятора $K$, кроме одного. Это означает, что надо перебрать лишь $m$ строк матрицы, а не их всевозможные комбинации. С другой стороны, подобный метод "грубой силы" потребует полного комбинаторного перебора, тогда как обсуждаемый подход гораздо более прост и весьма эффективен.

*Теорема 20. Решение $\widehat{P}$ и $\widehat{Y}$ задачи полуопределенного программирования*

$$\min \|Y\|_{r_1} \quad \text{при ограничениях} \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ определяет строчно-разреженный стабилизирующий регулятор*

$$K_{\mathrm{sp}} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}$$

*для системы* (50).

Теорема 20 позволяет определить управления, стабилизирующие систему; эти управления определяются номерами ненулевых строк матрицы $K_{\mathrm{sp}}$. При этом, вообще говоря, нельзя гарантировать, что получившееся решение обязательно окажется разреженным, однако ее наличие можно ожидать.

Рассмотрим задачу синтеза линейной обратной связи $u = Kx$ для системы

$$\dot{x} = Ax + u \tag{51}$$

по неполному вектору состояния $x$, т.е. использующей минимальное число компонент вектора состояния. Легко видеть, что столбцово-разреженная структура матрицы регулятора приводит к "исключению" компонент вектора состояния. Таким образом, требуется синтезировать столбцово-разреженный стабилизирующий регулятор $K$, т.е. имеющий некоторое количество нулевых столбцов.

*Теорема 21. Решение $\widehat{Q}$ и $\widehat{Y}$ задачи*

$$\min \|Y\|_{c_1} \quad \text{при ограничениях} \quad A^\top Q + QA + Y + Y^\top \prec 0, \quad Q \succ 0,$$

*относительно матричных переменных $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определяет столбцово-разреженный регулятор*

$$K_{\mathrm{sp}} = \widehat{Q}^{-1}\widehat{Y},$$

*реализующий стабилизирующую статическую обратную связь $u = K_{\mathrm{sp}}x$ по неполному вектору состояния системы* (51).

Иными словами, определены состояния, достаточные для построения обратной связи; они соответствуют номерам ненулевых столбцов матрицы $K_{\mathrm{sp}}$.

Заметим, что иногда некоторые компоненты вектора $x$ трудны для измерения. В этом случае вместо $c_1$-нормы можно воспользоваться взвешенной $c_1$-нормой

$$\|X\|_{c_1,w} = \sum_{j=1}^{n} w_j \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_{ij}|, \quad w_j \geqslant 0,$$

где бóльшие веса соответствуют "дорогим" компонентам вектора состояния.

В качестве обобщения полученного результата рассмотрим задачу построения статической линейной обратной связи по выходу для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + u, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{52}$$

где $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, а пара $(A, C)$ управляема. Как известно, для системы (52) существует стабилизирующая обратная связь по выходу, т.е. найдется $K$ такое, что матрица $A + KC$ устойчива. Задача состоит в нахождении стабилизирующей статической линейной обратной связи по неполному вектору выхода.

Теорема 22. *Решение* $\widehat{Q}$ *и* $\widehat{Y}$ *задачи*

$$\min \|Y\|_{c_1} \quad \text{при ограничениях} \quad A^\top Q + QA + YC + C^\top Y^\top \prec 0, \quad Q \succ 0,$$

*относительно матричных переменных* $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и* $Y \in \mathbb{R}^{n\times l}$ *определяет столбцово-разреженный регулятор*

$$K_{\mathrm{sp}} = \widehat{Q}^{-1}\widehat{Y},$$

*реализующий обратную связь* $u = K_{\mathrm{sp}}y$ *по неполному вектору выхода системы* (52).

В рассмотренных задачах структура системы была фиксирована, т.е. матрицы $A$, $B$ и $C$ заданы. Предположим теперь, что точное измерение всего вектора состояния $x$ доступно, и задача состоит в конструировании линейного маломерного выхода $y = Cx$ и построении для него линейной обратной связи $u = Ky$. Чтобы решить эту задачу, рассмотрим структуру матрицы стабилизирующего регулятора по состоянию $K_{\mathrm{sp}}$ для системы (50):

$$K_{\mathrm{sp}} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}.$$

Ясно, что, изменив $r_1$-норму в задании целевой функции в теореме 20 на $c_1$-норму, естественно ожидать появления нулевых столбцов в матрице $\widehat{Y}$:

$$u = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1}x = \begin{pmatrix} \times & 0 & \times & 0 & \times \\ \times & 0 & \times & 0 & \times \\ & & \cdots\cdots & & \\ \times & 0 & \times & 0 & \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \times & \times & \cdots & \times \\ & \cdots\cdots & & \\ \times & \times & \cdots & \times \\ & \cdots\cdots & & \\ \times & \times & \cdots & \times \end{pmatrix} x.$$

Сформируем матрицу $\widetilde{K}$, состоящую из ненулевых столбцов матрицы $\widehat{Y}$, и матрицу $\widetilde{C}$, состоящую из строк матрицы $\widehat{P}^{-1}$ с теми же номерами. При этом имеем

$$u = Kx = \widetilde{K}\widetilde{C}x = \widetilde{K}y.$$

В результате приходим к следующему результату.

Теорема 23. *Пусть $\widehat{P}$ и $\widehat{Y}$ — решение задачи*

$$\min \|Y\|_{c_1} \quad \textit{при ограничениях} \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$.*

*Обозначим через $\widetilde{K}$ матрицу, состоящую из ненулевых столбцов матрицы $\widehat{Y}$, а через $\widetilde{C}$ — матрицу, состоящую из строк $\widehat{P}^{-1}$ с теми же номерами.*

*Тогда стабилизирующей обратной связью по маломерному выходу*

$$y = \widetilde{C}x$$

*системы* (50) *служит*

$$u = \widetilde{K}y.$$

Действуя аналогичным образом, нетрудно организовать нулевые строки в регуляторе $\widetilde{K}$ по построенному выходу системы. Это достигается с помощью соответствующей $r_1$-оптимизации и позволит уменьшить число управлений, достаточное для стабилизации системы.

Теорема 24. *Пусть $P_r$ и $Y_r$ — решение задачи полуопределенного программирования*

$$\min \|Y\|_{r_1} \quad \textit{при ограничениях} \quad AP + PA^\top + BY + Y^\top B^\top \prec 0, \quad P \succ 0,$$

*относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$, где матрица $Y$ имеет столбцово-разреженную структуру как решение задачи из теоремы 23.*

*Обозначим через $\widetilde{K}_{\rm sp}$ матрицу, состоящую из ненулевых столбцов матрицы $Y_r$, а через $C_r$ — матрицу, состоящую из строк $P_r^{-1}$ с теми же номерами.*

*Тогда стабилизирующая обратная связь по маломерному выходу*

$$y = C_r x$$

*системы* (50) *дается как*

$$u = \widetilde{K}_{\rm sp} y,$$

*где регулятор $\widetilde{K}_{\rm sp}$ строчно-разреженный.*

Различные обобщения и приложения описанной выше техники можно найти в работах [13, 121, 136, 149].

К дальнейшим направлениям исследований, прежде всего, следует отнести иные задачи оптимального управления, такие как $H_\infty$-оптимизация; они также могут быть поставлены и решены в рамках "разреженного" подхода. Эта же техника (с небольшими модификациями) применима к задачам фильтрации, подавления ограниченных внешних возмущений и другим классическим задачам теории управления. Кроме того, на основе использования дискретного неравенства Ляпунова аналогично может быть исследован случай дискретного времени. Наконец, полученные результаты распространимы и на робастные версии задач, в частности, для системы вида

$$\dot{x} = (A + F\Delta H)x + Bu$$

с матричной неопределенностью $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$, ограниченной в спектральной норме $\|\Delta\| \leqslant 1$, и заданными матрицами $F$ и $H$ соответствующих размерностей.

В завершение раздела заметим, что разреженное управление иногда понимается не в форме обратной связи, а как программное управление, см. подобнее [122, 132, 134].

## 8. Некоторые задачи для нелинейных систем

Как уже отмечалось выше, настоящий обзор в основном посвящен технике ЛМН для линейных систем. Нелинейные проблемы гораздо более сложны и разнообразны, и авторы не имеют возможности на них остановиться подробно. Ниже будут рассмотрены лишь отдельные задачи для систем, в том или ином смысле близких к линейным.

### *8.1. Абсолютная устойчивость*

Как уже отмечалось, одна из первых постановок задач о робастной устойчивости для нелинейных систем связана с идеями абсолютной устойчивости. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma), \\ \sigma &= c^\top x, \end{aligned} \tag{53}$$

где $A$ — постоянная матрица, $b$, $c$ — постоянные вектор-столбцы, а $\varphi(\sigma)$ — вектор-функция скалярной переменной $\sigma$. Проверка устойчивости системы (53) в случае *секторных* ограничений

$$\varphi(0) = 0, \quad 0 \leqslant \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \leqslant \overline{k}, \quad \sigma \neq 0,$$

накладываемых на нелинейность $\varphi$, приводит к проблеме абсолютной устойчивости, восходящей к классическим работам А.И. Лурье и В.Н. Постникова [29], М.А. Айзермана и Ф.Р. Гантмахера [2], Е.С. Пятницкого с соавторами [42, 44], В.М. Попова [41]. В этих работах использовалась техника функций

Ляпунова не только квадратичных, но и типа *квадратичная функция плюс интеграл от нелинейности*. Систематическое использование ЛМН-техники применительно к подобным задачам началось с работ В.А. Якубовича [61, 62]. С тех пор эта тематика активно развивалась; не имея возможности на этом остановиться, отсылаем читателя к работам [14, 19, 84, 108, 109] и цитируемым в них исследованиям. Отметим также публикации [43, 45, 46], посвященные численным методам построения функций Ляпунова в задаче абсолютной устойчивости.

### *8.2. Ограниченные внешние возмущения*

Остановимся прежде всего на проблеме влияния ограниченных внешних возмущений на нелинейные системы, близкие к линейным.

Рассмотрим нелинейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + \Phi\varphi(x) + Dw, \quad x(0) = 0,\\ &z = Cx, \end{aligned} \tag{54}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, ограниченное в каждый момент времени:

$$\|w(t)\| \leqslant 1 \quad \text{для всех } t \geqslant 0, \tag{55}$$

а векторная функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ удовлетворяет ограничению

$$\|\varphi(x)\|^2 \leqslant \mu_0 + \mu_1\|x\|^2 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n \tag{56}$$

с заданными параметрами $\mu_0, \mu_1 \geqslant 0$ (отметим, что при $\mu_0 = 0$ появляется секторная нелинейность). Будем полагать, что матрица $A$ гурвицева, пара $(A, D)$ управляема, $C$ — матрица полного ранга.

Для этой ситуации удается выписать инвариантный эллипсоид, используя ту же технику, что и для линейного случая. Достаточное условие инвариантности эллипсоида для системы (54) может быть установлено в терминах ЛМН и полуопределенного программирования, см. [39]. Другие результаты в этом направлении содержатся в [65, 94, 133].

Сходным образом решается и задача синтеза. Рассмотрим непрерывную систему управления

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + \Phi\varphi(x) + B_1u + Dw, \quad x(0) = 0,\\ &z = Cx + B_2u, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Phi \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — регулируемый выход, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — управление, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (55), векторная функция $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ удовлетворяет ограничению (56); пара $(A, B_1)$ управляема, пара $(A, C)$ наблюдаема. Поиск регулятора $K$ в форме статической линейной обратной связи по состоянию $u = Kx$, стабилизирующего замкнутую систему и, в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для выхода $z$, подавляющего воздействие внешних возмущений, сводится к задаче полуопределенного программирования и одномерной минимизации [39].

Методам синтеза управления для нелинейных систем, также использующим линейные матричные неравенства, посвящена работа [30].

### *8.3. Мультипликативные возмущения*

Перейдем к системам с мультипликативным возмущением. Во многих задачах уровень внешних возмущений может зависеть от состояния системы. В частности, нередка ситуация, когда внешние возмущения растут не быстрее, чем линейная функция от вектора состояния системы.

Например, взглянем с несколько иной, чем прежде, точки зрения на системы с ограниченными в норме неопределенностями и ограниченными внешними возмущениями:

$$\dot{x} = \big(A + \Delta A(t)\big)x + Dw(t), \tag{57}$$

где

$$\|\Delta A(t)\| \leqslant \delta, \quad \|w(t)\| \leqslant 1 \quad \text{для всех } t \geqslant 0.$$

Обратим внимание, что, в отличие от робастных постановок задач (см., например, [49, 131]), здесь предполагается, что матричная неопределенность зависит от времени $t$.

Будем трактовать величину $\Delta A(t)x + Dw(t)$ как внешнее возмущение, которое уже будет зависеть от состояния системы. При этом, очевидно, скорость роста ее нормы не превосходит скорости роста нормы состояния системы.

Обсужденные выше подходы, основанные на технике линейных матричных неравенств, могут быть распространены на динамические системы с внешними возмущениями указанной структуры.

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, \quad x(0) = 0, \\ z &= Cx, \end{aligned} \tag{58}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $z(t) \in$ $\in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению

$$\|w(t)\|^2 \leqslant \gamma_0 + \gamma_1\|x(t)\|^2 \quad \text{для всех } t \geqslant 0$$

с известными параметрами $\gamma_0 \geqslant 0$ и $\gamma_1 > 0$ (в частности, для системы (57) имеем $\gamma_0 = \|D\|$, $\gamma_1 = \delta$). Будем полагать, что матрица $A$ гурвицева, пара $(A, D)$ управляема, $C$ — матрица полного ранга.

В отличие от предыдущих результатов этого раздела, условия инвариантности эллипсоида для системы (58) являются необходимыми и достаточными. Аналогичным образом решается и задача синтеза для системы с мультипликативным возмущением [39].

Рассмотренный подход может быть применен и к другим задачам управления, связанным с подавлением внешних возмущений, в частности — при синтезе обратной связи по измеряемому выходу, см. подробнее [37], а также на их различные робастные постановки.

### *8.4. Билинейные системы*

Задачам, связанным со стабилизацией билинейных систем управления, посвящено множество работ; большая их часть была инициирована появлением монографии [119]. Среди разнообразных подходов к решению соответствующих задач отметим поиск линейных преобразований, переводящих билинейную систему в управляемую линейную [87]; вопросам стабилизации билинейных систем управления с помощью релейных управлений посвящена публикация [17]; в работе [144] для стабилизации билинейных систем используются квадратичные функции Ляпунова.

В [110] на основе ЛМН-техники и квадратичных функций Ляпунова для билинейной системы управления строился так называемый эллипсоид стабилизируемости такой, что траектории замкнутой системы, начинаясь внутри эллипсоида, асимптотически стремятся к нулю. В дальнейшем это позволило эффективно конструировать невыпуклые области стабилизируемости билинейных систем управления.

Публикации [51, 52] развивают этот подход: в них рассматривается билинейная система управления, подверженная воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений, и вводится концепция эллипсоида стабилизируемости, обладающего тем свойством, что траектории замкнутой системы, начинаясь внутри эллипсоида, его не покидают (они будут входить во множество достижимости или стремиться к точке на его границе). В публикации [53] рассматривается билинейная система управления, подверженная воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений и содержащая структурированную матричную неопределенность. В статье ставятся и решаются задачи робастного управления билинейными системами при внешних возмущениях; в частности, предложен подход к конструктивному построению эллипсоида робастной стабилизируемости и области робастной стабилизируемости.

## 9. Заключение

В обзоре рассмотрены основные методы использования линейных матричных неравенств для учета разного рода неопределенностей в задачах управления. Видно, что это очень удобный и универсальный аппарат, позволяющий охватить многие задачи анализа и синтеза. Данный обзор ограничивается в основном линейными системами; нелинейный случай затронут лишь кратко; рассмотрены отнюдь не все виды неопределенностей. Обзор литературы также не претендует на полноту; все богатство обозначенной темы невозможно исчерпать в одном обзоре.

Авторы благодарны рецензентам за полезные замечания и библиографические указания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Агиевич В.Н., Парсегов С.Э., Щербаков П.С.* Верхние оценки всплеска в линейных дискретных системах // АиТ. 2018. № 11. С. 32–46.

   *Ahiyevich V.N., Parsegov S.E., Shcherbakov P.S.* Upper Bounds on Peaks in Discrete-Time Linear Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 11. P. 1976–1988.

2. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: АН СССР, 1963.

3. *Афанасьев В.Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008.

4. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

5. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез оптимальных линейно-квадратичных законов управления на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2007. № 3. С. 3–18.

   *Balandin D.V., Kogan M.M.* Synthesis of Linear Quadratic Control Laws on Basis of Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 371–385.

6. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Линейно-квадратичные и $\gamma$-оптимальные законы управления по выходу // АиТ. 2008. № 6. С. 5–14.

   *Balandin D.V., Kogan M.M.* Linear-Quadratic and $\gamma$-Optimal Output Control Laws // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 6. P. 911–919.

7. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 655–664.

   *Balandin D.V., Kogan M.M.* Lyapunov Function Method for Control Law Synthesis under One Integral and Several Phase Constraints // Different. Equat. 2009. V. 45. No. 5. P. 670–679.

8. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Обобщенное $H_\infty$-оптимальное управление как компромисс между $H_\infty$-оптимальным и $\gamma$-оптимальным управлениями // АиТ. 2010. № 6. С. 20–38.

   *Balandin D.V., Kogan M.M.* Generalized $H_\infty$-Optimal Control as a Trade-Off Between the $H_\infty$-Optimal and $\gamma$-Optimal Controls // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 6. P. 993–1010.

9. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез субоптимального регулятора по выходу для гашения ограниченных возмущений // АиТ. 2011. № 4. Р. 3–10.

   *Balandin D.V., Kogan M.M.* Synthesis of a Suboptimal Controller by Output for Dampening Limited Disturbances // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 4. P. 677–683.

10. *Баландин Д.В., Коган М.М., Кривдина Л.Н., Федюков А.А.* Синтез обобщенного $H_\infty$-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // АиТ. 2014. № 1. С. 3–22.

*Balandin D.V., Kogan M.M., Krivdina L.N., Fedyukov A.V.* Design of Generalized Discrete-Time $H_\infty$-Optimal Control Over Finite and Infinite Intervals // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 1. P. 1–17.

11. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Оптимальное по Парето обобщенное $H_2$-управление и задачи виброзащиты // АиТ. 2017. № 8. С. 76–90.

    *Balandin D.V., Kogan M.M.* Pareto Optimal Generalized $H_2$-Control and Vibroprotection Problems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 8. P. 1417–1429.

12. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Многокритериальные робастные обобщенные $H_2$ и $\gamma_0$ управления с приложением к стабилизации ротора в электромагнитных подшипниках // АиТ. 2018. № 6. С. 49–68.

    *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multicriteria Robust Generalized $H_2$ and $\gamma_0$ Controllers with Application to Stabilization of a Rotor in Electromagnetic Bearings // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 996–1012.

13. *Быков А.В., Щербаков П.С.* Синтез разреженной обратной связи в линейных дискретных системах // АиТ. 2018. № 7. С. 3–21.

    *Bykov A.V., Shcherbakov P.S.* Sparse Feedback Design in Discrete-Time Linear Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 7. P. 1175–1190.

14. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

15. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и $S$-процедуры // АиТ. 2006. № 10. С. 77–121.

    *Gusev S.V., Likhtarnikov A.L.* Kalman–Popov–Yakubovich Lemma and the $S$-Procedure: A Historical Essay // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.

16. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М.: Наука, 1997.

17. *Емельянов С.В., Крищенко А.П.* Стабилизируемость билинейных систем канонического вида // ДАН. 2012. Т. 445. № 6. С. 636–639.

    *Emel'yanov S.V., Krishchenko A.P.* Stabilizability of Bilinear Systems of Canonical Form // Dokl. Math. 2012. V. 86. P. 591–594.

18. *Каменецкий В.А., Пятницкий Е.С.* Градиентный метод построения функций Ляпунова в задачах абсолютной устойчивости // АиТ. 1987. № 1. С. 3–12.

    *Kamenetskii V.A., Pyatnitskii E.S.* Gradient Method of Constructing Lyapunov Functions in Problems of Absolute Stability // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 1. Part 1. P. 1–9.

19. *Каменецкий В.А.* Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана // АиТ. 2019. № 8. С. 9–28.

    *Kamenetskiy V.A.* Switched Systems, Lur'e Systems, Absolute Stability, Aizerman Problem // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 8. P. 1375–1389.

20. *Квинто Я.И., Хлебников М.В.* Верхние оценки больших отклонений в линейных системах при наличии неопределенности // Проблемы управления. 2018. № 3. С. 2–7.

    *Kvinto Y.I., Khlebnikov M.V.* Upper Bounds on Large Deviations in Linear Systems in the Presence of Uncertainty // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 5. P. 927–935.

21. *Квинто Я.И., Хлебников М.В.* Верхние границы максимального отклонения траектории в линейных дискретных системах: робастная постановка // Управление большими системами. 2019. Вып. 77. С. 70–84.

22. *Коган М.М., Кривдина Л.Н.* Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях // АиТ. 2011. № 7. С. 83–95.

   *Kogan M.M., Krivdina L.N.* Synthesis of Multipurpose Linear Control Laws of Discrete Objects under Integral and Phase Constraints // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 7. P. 1427–1439.

23. *Коган М.М.* Обобщенная $H_\infty$-норма в анализе и синтезе робастных систем управления // Известия РАН. ТиСУ. 2015. № 6. С. 3–16.

24. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.

25. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.

26. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наук. думка, 2006.

27. *Кунцевич В.М., Пшеничный Б.Н.* Минимальные инвариантные множества динамических систем с ограниченными возмущениями // Кибернетика и системный анализ. 1996. № 1. С. 74–81.

28. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

29. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. № 8. Вып. 3. С. 246–248.

30. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // АиТ. 2019. № 11. С. 59–82.

   *Malikov A.I.* State Estimation and Stabilization of Discrete-Time Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1976–1995.

31. *Мейлахс А.М.* О стабилизации линейных управляемых систем в условиях неопределенности // АиТ. 1975. № 2. С. 182–184.

   *Meilakhs A.M.* Stabilization of Linear Controlled Systems under Uncertainty Conditions // Autom. Remote Control. 1975. V. 36. No. 2. 349–351.

32. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.

   *Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V.* Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.

33. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // ДАН. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.

   *Polyak B.T., Topunov M.V.* Filtering under Nonrandom Disturbances: The Method of Invariant Ellipsoids // Dokl. Math. 2008. V. 77. No. 1. P. 158–162.

34. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72–90.

   *Polyak B.T., Topunov M.V.* Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.

35. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // АиТ. 2015. № 6. С. 18–41.

*Polyak B.T., Tremba A.A, Khlebnikov M.V., et al.* Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Autom. Remote Control. 2016. V. 76. No. 6. P. 957–976.

36. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.

37. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.

38. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Разреженная обратная связь в линейных системах управления // АиТ. 2014. № 12. С. 13–27.

    *Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Sparse Feedback in Linear Control Systems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 12. P. 2099–2111.

39. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями / Проблемы устойчивости и управления. Сб. научн. статей, посв. 80-летию акад. В.М. Матросова. М.: Физматлит, 2013. С. 271–299.

40. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

41. *Попов В.М.* Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // АиТ. 1961. № 8. С. 961–979.

42. *Пятницкий Е.С.* Новые исследования по абсолютной устойчивости систем автоматического регулирования (обзор) // АиТ. 1968. № 6. С. 5–36.

    *Pyatnitskii Ye.S.* New Research on Absolute Stability of Automatic Control Systems (review) // Autom. Remote Control. 1968. V. 29. No. 6. P. 855–881.

43. *Пятницкий Е.С., Скородинский В.И.* Численные методы построения функций Ляпунова и критерии абсолютной устойчивости в форме численных процедур // АиТ. 1983. № 11. С. 52–63.

    *Pyatnitskii E.S., Skorodinskii V.I.* Numerical Methods of Designing Lyapunov Functions and Absolute Stability Criteria as Numerical Procedures // Autom. Remote Control. 1983. V. 44. No. 11. P. 1427–1437.

44. *Пятницкий Е.С.* Избранные труды. Теория управления. Т. 1–3. М.: Наука, 2004.

45. *Рапопорт Л.Б.* О задаче абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // АиТ. 1987. № 5. С. 66–74.

    *Rapoport L.B.* Absolute Stability of Control Systems with Several Nonlinear Stationary Elements // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 5. Part 1. P. 623–630.

46. *Рапопорт Л.Б.* Расширение $S$-процедуры и анализ многомерных систем управления с помощью линейных матричных неравенств // АиТ. 2005. № 1. С. 37–48.

    *Rapoport L.B.* Extension of the $S$-Procedure and Analysis of the Multidimensional Control Systems Using Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2005. V. 66. No. 1. P. 31–42.

47. *Рапопорт Л.Б.* Полуопределенная релаксация и новые условия знакоопределенности квадратичной формы при квадратичных ограничениях // АиТ. 2018. № 11. С. 150–158.

    *Rapoport L.B.* Semidefinite Relaxation and New Conditions for Sign-Definiteness of the Quadratic Form Under Quadratic Constraints // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 11. P. 2073–2079.

48. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.

49. *Хлебников М.В.* Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2009. № 1. С. 147–161.

    *Khlebnikov M.V.* Robust Filtering under Nonrandom Disturbances: The Invariant Ellipsoid Approach // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 1. P. 133–146.

50. *Хлебников М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений: линейный динамический регулятор по выходу // АиТ. 2011. № 4. С. 27–42.

    *Khlebnikov M.V.* Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: A Linear Dynamic Output Controller // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 4. P. 699–712.

51. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: I // АиТ. 2019. № 2. С. 46–63.

    *Khlebnikov M.V.* Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances: I // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 2. P. 234–249.

52. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: II // АиТ. 2019. № 8. С. 29–43.

    *Khlebnikov M.V.* Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances: II // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 8. P. 1390–1402.

53. *Хлебников М.В.* Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: III // АиТ. 2020. № 6. С. 47–61.

    *Khlebnikov M.V.* Optimization of Bilinear Control Systems Subjected to Exogenous Disturbances. III // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 1003–1016.

54. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т., Кунцевич В.М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // АиТ. 2011. № 11. С. 9–59.

    *Khlebnikov M.V., Polyak B.T., Kuntsevich V.M.* Optimization of Linear Systems Subject to Bounded Exogenous Disturbances: The Invariant Ellipsoid Technique // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 11. P. 2227–2275.

55. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной знакоопределенности и ее обобщения // АиТ. 2008. № 11. С. 125–139.

    *Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Petersen's Lemma on Matrix Uncertainty and Its Generalization // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 11. P. 1932–1945.

56. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Инвариантность и нехрупкость при подавлении внешних возмущений // АиТ. 2015. № 5. С. 175–190.

    *Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Invariance and Nonfragility in the Rejection of Exogenous Disturbances // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 5. P. 872–884.

57. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Задача линейно-квадратичного управления. II // АиТ. 2019. № 10. С. 115–131.

    *Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Linear Quadratic Regulator: II // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 10. P. 1847–1860.

58. *Хлебников М.В., Щербаков П.С., Честнов В.Н.* Задача линейно-квадратичного управления. I // АиТ. 2015. № 12. С. 65–79.

    *Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Chestnov V.N.* Linear-Quadratic Regulator. I // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 12. P. 2143–2155.

59. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.

60. *Чурилов А.Н., Гессен А.В.* Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2004.

61. *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304–1307.

*Yakubovich V.A.* Solution of Certain Matrix Inequalities Encountered in Nonlinear Control Theory // Sov. Math. Dokl. 1964. V. 5. P. 652–656.

62. *Якубович В.А.* Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. I // АиТ. 1964. № 7. С. 1017–1029.

63. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 2. С. 384–419.

64. *Abedor J., Nagpal K., Poolla K.* A Linear Matrix Inequality Approach to Peak-to-Peak Gain Minimization // Int. J. Robust Nonlin. Control. 1996. V. 6. P. 899–927.

65. *Amato F., Cosentino C., Merola A.* On the Region of Attraction of Nonlinear Quadratic Systems // Automatica. 2007. V. 43. P. 2119–2123.

66. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Linear Optimal Control. N.Y.: Prentice-Hall, 1971.

67. *Arzelier D., Peaucelle D., Henrion D.* Some Notes on Standard LMI Solvers. URL `http://homepages.laas.fr/publis/prague102.pdf` (2018).

68. *Balandin D.V., Kogan M.M.* LMI-based $H_\infty$-Optimal Control with Transients // Int. J. Control. 2010. V. 83. Iss. 8. P. 1664–1673.

69. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multi-Objective Generalized $H_2$ Control // Automatica. 2019. V. 99. P. 317–322.

70. *Balandin D.V., Kogan M.M.* Multi-Objective Robust Generalised $H_2$ Control // Int. J. Syst. Sci. 2020. V. 51. Iss. 10. P. 1873–1882.

71. *Barmish B.R., Corless M., Leitman G.* A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems // SIAM J. Control Optim. 1983. V. 21. No. 2. P. 246–255.

72. *Barmish B.R.* Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System // J. Optim. Theory Appl. 1985. V. 46. No. 4. P. 399–408.

73. *Barmish B.R.* New Tools for Robustness of Linear Systems. MacMillan, 1993.

74. *Bašar T., Bernhard P.* $H_\infty$-Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Boston: Birkhäuser, 1995.

75. *Bellman R.* Notes on Matrix Theory. X. A Problem in Control // Quarterly of Appl. Math. 1957. V. 14. No. 4. P. 417–419.

76. *Bernhard P.* Survey of Linear Quadratic Robust Control // Macroeconom. Dynam. 2002. No. 6. P. 19–39.

77. *Bernussou J., Peres P.L.D., Geromel J.C.* A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems // Syst. Control Lett. 1989. V. 13. P. 65–72.

78. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* On the Minimax Reachability of Target Sets and Target Tubes // Automatica. 1971. V. 7. P. 233–247.

79. *Bertsekas D.P., Rhodes I.B.* Recursive State Estimation for a Set-Membership Description of Uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. P. 117–128.

80. *Blanchini F.* Set Invariance in Control // Automatica. 1999. V. 35. No. 11. P. 1747–1767.

81. *Blanchini F., Miani S.* Set-Theoretic Methods in Control. Birkhäuser, 2008.

82. *Blanchini F., Sznaier M.* Persistent Disturbance Rejection via Static State Feedback // IEEE Trans. Autom. Control. 1995. V. 40. P. 1127–1131.

83. *Borchers B.* CSDP, a C Library for Semidefinite Programming // Optim. Methods Software. 1999. V. 11. No. 1. P. 613–623.

84. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

85. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.

86. *Caverly R.J., Forbes J.R.* LMI Properties and Applications in Systems, Stability, and Control Theory // arXiv:1903.08599v2 [cs.SY] 12 Jun 2019

87. *Čelikovský S.* On the Stabilization of the Homogeneous Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1993. V. 21. No. 6. P. 503–510.

88. *Chernousko F., Polyak B. (eds.)* Special Issue on Set-Membership Modelling of Uncertainties in Dynamical Systems // Math. Comp. Modelling Dynam. Syst. 2005. V. 11. Iss. 2. P. 123–124.

89. *Donoho D.L.* Compressed Sensing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. P. 1289–1306.

90. *Douglas J., Athans M.* Robust Linear Quadratic Designs with Real Parameter Uncertainty // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 1. P. 107–111.

91. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-Space Solution to Standard $H^2$ and $H^\infty$ Control Problem // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.

92. *Ebihara Y., Peaucelle D., Arzelier D.* $S$-Variable Approach to LMI-Based Robust Control. London: Springer, 2014.

93. *Elia N., Dahleh M.A.* Minimization of the Worst-Case Peak to Peak gain via Dynamic Programming: State Feedback Case // IEEE Trans. Autom. Control. 2000. V. 45. P. 687–701.

94. *Fiacchini M., Alamo T., Camacho E.F.* On the Computation of Convex Robust Control Invariant Sets for Nonlinear Systems // Automatica. 2010. V. 46. P. 1334–1338.

95. *Fradkov A.L.* Cybernetical Physics: From Control of Chaos to Quantum Control. Springer, 2007.

96. *Francis B.A.* A Course in $H_\infty$ Control Theory // Lecture Notes in Control and Information Sciences. V. 88. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

97. *Fu M., Dasgupta S.* Parametric Lyapunov Functions for Uncertain Systems: The Multiplier Approach // Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. SIAM, 2000. P. 95–108.

98. *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to $H_\infty$ Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1994. V. 4. No. 4. P. 421–448.

99. *Gahinet P., Apkarian P., Chilali M., et al.* Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty // IEEE Trans. Automat Control. 1996. V. 41. No. 3. P. 436-442.

100. *Gahinet P., Nemirovskii A., Laub A.J., et al.* LMI Control Toolbox — For Use with Matlab. Natick: The MathWorks Inc., 1995.

101. *El Ghaoui L., Niculescu S.* Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control. SIAM, 2000.

102. *Glover D., Schweppe F.* Control of Linear Dynamic Systems with Set Constrained Disturbances // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. P. 411–423.

103. *Graham S., Kumar P.R.* The Convergence of Control, Communication, and Computation / M. Conti, S. Giordano, E. Gregori, S. Olariu, eds. Personal Wireless Communications, Lecture Notes in Computer Science. V. 2775. Berlin: Springer-Verlag, 2003. P. 458–475.

104. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1. URL `http://cvxr.com/cvx`

105. *Hinrichsen D., Plischke E., Wurth F.* State Feedback Stabilization with Guaranteed Transient Bounds // Proc. 15th Int. Symp. Math. Theory Networks & Syst. South Bend, USA, August 12–16, 2002.

106. *Hollot C.V, Barmish B.R.* Optimal Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems // Proc. 18th Allerton Conf. Commun. Control and Computing. Monticello, USA, 1980. P. 697–706.

107. *Hosoe Y., Peaucelle D.* $S$-Variable Approach to Robust Stabilization State Feedback Synthesis for Systems Characterized by Random Polytopes // Proc. 2016 Eur. Control Conf. (ECC 2016). Aalborg, Denmark, June 29 – July 1, 2016. P. 2023–2028.

108. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London: Springer-Verlag, 1995.

109. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. N.Y.: Prentice Hall, 2002.

110. *Khlebnikov M.V.* Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // Proc. 14 Eur. Control Conf. (ECC'15). Linz, Austria, July 15–17, 2015. IEEE Catalog Number(USB): CFP1590U-USB. P. 160–164.

111. *Kim S.-J., Koh K., Boyd S., Gorinevsky D.* $\ell_1$ Trend Filtering // SIAM Rev. 2009. V. 51. No. 2. P. 339–360.

112. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.

113. *Lin F., Fardad M., Jovanović M.* Sparse Feedback Synthesis via the Slternating Direction Dethod of Multipliers // Proc. 2012 Amer. Control Conf. Montreal, Canada, June 25–27, 2012. P. 4765–4770.

114. *Lin F., Fardad M., Jovanović M.* Augmented Lagrangian Approach to Design of Structured Optimal State Feedback Gains // IEEE Trans. Autom. Control. 2011. V. 56. No. 12. P. 2923–2929.

115. *Löfberg J.* YALMIP: Software for Solving Sonvex (and Nonconvex) Optimization Problems. URL `http://control.ee.ethz.ch/~joloef/wiki/pmwiki.php`

116. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Estimation and Control over Communication Networks. Boston: Birkhäuzer, 2008.

117. *Mittelmann H.D.* An Independent Benchmarking of SDP and SOCP Solvers // Math. Progr. 2002. V. 95. No. 2. P. 407–430.

118. *Mittelmann H.D.* Decision Tree for Optimization Software. URL `http://plato.la.asu.edu/bench.html`

119. *Mohler R.R.* Bilinear Control Processes. N.Y.: Academic Press, 1973.

120. The MOSEK Optimization Software. URL `http://www.mosek.com`

121. *Nagahara M., Chatterjee D., Challapalli N., Vidyasagar M.* CLOT Norm Minimization for Continuous Hands-Off Control // Automatica. 2020. V. 113. Art. 108679.

122. *Nagahara M., Quevedo D.E., Nesic D.* Maximum Hands-Off Control: A Paradigm of Control Effort Minimization // IEEE Trans. Autom. Control. 2016. V. 61. No. 3. P. 735–747.

123. *Nesterov Yu., Nemirovsky A.* Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming. Philadelphia: SIAM, 1994.

124. *De Oliveira M.C., Bernussou J., Geromel J.C.* A New Discrete-Time Robust Stability Condition // Syst. Control Lett. 1999. V. 37 No. 4. P. 261–265.

125. *Peaucelle D., Ebihara Y.* Affine Versus Multi-Affine Models for $S$-Variable LMI Conditions // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. No. 25. P. 453–458.

126. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.

127. *Petersen I.R., McFarlane D.C.* Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 9. P. 1971–1977.

128. *Petersen I., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. 2014. V. 50. P. 1315–1335.

129. *Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* An LMI Approach to Structured Sparse Feedback Design in Linear Control Systems // Proc. 12 Eur. Control Conf. (ECC'13). Zürich, Switzerland, July 17–19, 2013. P. 833–838.

130. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Stability and Performance of Complex Systems Affected by Parametric Uncertainty / Encyclopedia Syst. Control. Second ed. Springer, 2020.

131. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S., Topunov M.V.* Invariant Ellipsoids Epproach to Robust Rejection of Persistent Disturbances // Proc. 17th IFAC World Congr. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 3976–3981.

132. *Polyak B., Tremba A.* Sparse Solutions of Optimal Control via Newton Method for Under-Determined Systems // J. Global Optim. URL https://doi.org/10.1007/s10898-019-00784-z, published on-line May 24, 2019.

133. *Poznyak A., Polyakov A., Azhmyakov V.* Attractive Ellipsoids in Robust Control. Springer, 2014.

134. *Rao C.V.* Sparsity of Linear Discrete-Time Optimal Control Problems with $\ell_1$ Objectives // IEEE Trans. Autom. Control. 2018. V. 63. No. 2. P. 513–517.

135. *Rodrigues L.A., Oliveira R.C.L.F., Camino J.F.* Parameterized LMIs for Robust $H_2$ and $H_\infty$ State Feedback Control of Continuous-Time Polytopic Systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2018. V. 28. Iss. 3. P. 940–952.

136. *Romao L., Margellos K., Papachristodoulou A.* Distributed Actuator Selection: Achieving Optimality via a Primal-Dual Algorithm // IEEE Control Syst. Lett. 2018. V. 2. No. 4. P. 779–784.

137. *Safonov M.G.* Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems. Cambridge: MIT Press, 1980.

138. *Scherer C., Weiland S.* Linear Matrix Inequalities in Control. URL https://www.imng.uni-stuttgart.de/mst/files/LectureNotes.pdf

139. *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. N.J.: Prentice Hall, 1973.

140. *Shcherbakov P.* On Peak Effects in Discrete Time Linear Systems // Proc. 2017 25th Mediterranean Conf. Control Automation (MED 2017). Valletta, Malta, July 3–6, 2017. P. 376–381.

141. *Shcherbakov P., Parsegov S.* Solutions of Discrete Time Linear Systems: Upper Bounds on Deviations // Proc. Int. Conf. System Theory, Control and Computing (ICSTCC 2018). Sinaia, Romania, October 10–12, 2018. P. 152–157.

142. *Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriadis D.E.* A Unified Agebraic Approach to Control Design. CRC Press, 1997.

143. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization over Symmetric Cones // Optim. Methods Software. 1999. No. 11–12. P. 625–653. URL http://sedumi.ie.lehigh.edu

144. *Tarbouriech S., Queinnec I., Calliero T.R., Peres P.L.D.* Control Design for Bilinear Systems with a Guaranteed Region of Stability: An LMI-Based Approach // Proc. 17th Mediterranean Conf. Control Automation (MED'09). Thessaloniki, Greece, June 24–26, 2009. P. 809–814.

145. *Thorp J.S., Barmish B.R.* On Guaranteed Stability of Uncertain Linear Systems via Linear Control // J. Optimiz. Theory Appl. 1981. V. 35. No. 4. P. 559–579.

146. *Tibshirani R.* Regression Shrinkage and Selection via the Lasso // J. Royal Statist. Soc. 1996. V. 58. No. 1. P. 267–288.

147. *Toh K.C., Todd M.J., Tütüncü R.H.* SDPT3 – A MATLAB Software Package for Semidefinite Programming, version 1.3 // Optim. Methods Software. 1999. V. 11. No. 1–4. P. 545–581.

148. *Tropp J.A.* Algorithms for Simultaneous Sparse Approximation. Part II: Convex Relaxation // Signal Proc. (special issue "Sparse approximations in signal and image processing"). 2006. V. 86. P. 589–602.

149. *Wang Y., Lopez J.A., Sznaier M.* Convex Optimization Approaches to Information Structured Decentralized Control // IEEE Trans. Autom. Control. 2018. V. 63. No. 10. P. 3393–3403.

150. *Weinmann A.* Uncertain Models and Robust Control. Springer-Verlag, 1994.

151. *Whidborne J.F., McKernan J.* On Minimizing Maximum Transient Energy Growth // IEEE Trans. Autom. Control. 2007. V. 52. No. 9. P. 1762–1767.

152. *Willems J.S.* The Analysis of Feedback Systems. Cambridge: MIT Press, 1971.

153. *Willems J.S.* Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 621–634.

154. *Yu L., Han Q.-L., Sun M.-X.* Optimal Guaranteed Cost Control of Linear Uncertain Systems with Input Constraints // Int. J. Control Autom. Syst. 2005. V. 3. No. 3. P. 397–402.

155. *Zhou K., Doyle J., Glover K.* Robust and Optimal Control. N.J.: Prentice Hall, 1996.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 30.07.2020

После доработки 08.09.2020

Принята к публикации 10.09.2020