

© 2021 г. А.В. ЮРЧЕНКОВ, канд. физ.-мат. наук
(alexander.yurchenkov.@yandex.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва)

ЛЕММА ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ ДЛЯ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ ПРИ НЕЦЕНТРИРОВАННОМ ВОЗМУЩЕНИИ¹

Рассмотрена дискретная линейная нестационарная система с мультипликативными шумами, на которую действует окрашенное внешнее возмущение с ненулевым первым моментом. Мультипликативные шумы моделируются в виде линейных комбинаций детерминированных матриц с взаимно независимыми случайными коэффициентами. Для указанной системы описан способ вычисления анизотропийной нормы, использующий реализацию в пространстве состояний, в терминах уравнений Риккати.

Ключевые слова: мультипликативные шумы, нестационарная система, нецентрированные возмущения, анизотропия, анизотропийная норма.

DOI: 10.31857/S0005231021010037

1. Введение

В теории управления одна из центральных проблем связана с решением задачи подавления влияния внешних возмущений. Интерес к упомянутой задаче появился еще в середине XX в. [1]. Позднее была сформулирована и решена задача о подавлении ограниченных возмущений [2–4]. Синтезируемые оптимальные регуляторы при указанном подходе не лишены недостатков — они имеют большой порядок. Более того, как указано в [5], построение оптимальных регуляторов для непрерывных систем в случае ограниченных внешних возмущений вызывает дополнительные сложности. В рамках \mathcal{H}_2 -оптимизации возмущение предполагается случайным с известными статистическими характеристиками, при решении задач \mathcal{H}_∞ -оптимизации внешнее возмущение выбирается из класса квадратично интегрируемых (для непрерывных систем) или квадратично суммируемых (для дискретных систем) функций времени [6]. Принадлежность возмущений к тому или иному классу влияет на выбор критерия оптимальности, а с ним и на выбор регуляторов. При этом \mathcal{H}_∞ -регуляторы вносят излишний консерватизм в динамику системы со слабо окрашенными возмущениями на входе, тогда как \mathcal{H}_2 -регуляторы не обеспечивают робастность по отношению к неопределенностям в системе и сильно окрашенным возмущениям.

Наряду с работами по смешанному $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ критерию [7, 8], около четверти века назад появились первые исследования, использующие стохастический

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-31-00067 мол_а, 18-07-00269 А).

подход к \mathcal{H}_∞ -оптимизации [9–12]. Введенное понятие анизотропии случайного вектора позволило ввести меру неопределенности возмущения, таким образом смягчая требования точного знания статистических характеристик внешнего возмущения и не внося излишний консерватизм, свойственный \mathcal{H}_∞ -оптимальным регулятором. Средняя анизотропия (в пределе на единицу времени неограниченно растущих фрагментов) стационарных гауссовских последовательностей и связанная с ней анизотропийная норма линейных стационарных систем позволили ставить и решать задачи анизотропийного анализа и синтеза для таких систем в установившемся режиме, что впоследствии было обобщено в [13, 14] и на нестационарные постановки на конечных интервалах.

За последние несколько лет значительно возрос интерес к моделям систем с мультипликативными шумами, поскольку такие модели эффективно описывают динамику популяций, химических реакций, финансовой математики, биомеханические системы [15, 16], а также работу сети датчиков со случайными отказами [17]. Были решены задачи анализа и фильтрации в рамках \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ теорий как для непрерывных, так и для дискретных систем [18–21]. Также были предприняты попытки использования анизотропийного анализа и синтеза для систем с мультипликативными шумами в публикации [22], но приведенные там результаты нуждаются в разработке численного алгоритма для решения полученной системы уравнений. В [23, 24] был рассмотрен вопрос анизотропийного анализа стационарных систем с мультипликативными шумами, на основе которого был предложен синтез управления по состоянию и выходу в [25, 26]. Упомянутые публикации рассматривали мажоранту анизотропийной нормы замкнутой системы, поэтому результаты носили оценочный характер. В [27] был предложен метод анизотропийного анализа стохастической системы, на основе которого в данной статье будет исследован вопрос вычисления анизотропийной нормы нестационарной системы с мультипликативными шумами на конечном горизонте при ненулевом среднем возмущения. Также вопрос анализа для нецентрированных возмущений ранее уже рассматривался в [28–30], но для обыкновенных систем без мультипликативного шума.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 содержатся основные сведения и обозначения, необходимый минимум из анизотропийной теории управления, в разделе 3 ставится и решается задача вычисления анизотропийной нормы, раздел 4 содержит численный пример, в разделе 5 дается краткое заключение.

2. Элементы анизотропийной теории

Рассмотрим сначала класс тех случайных векторов W со значениями в \mathbb{R}^m , которые отличны от нуля с вероятностью единица и при этом единичный случайный вектор направления $\xi = W/|W|$ имеет абсолютно непрерывное вероятностное распределение Q на единичной сфере \mathbb{S}_m в \mathbb{R}^m . Для любого такого W определен функционал анизотропии [10]:

$$(1) \quad \mathbf{A}_o(W) = \mathbf{D}(Q||U_m) = \mathbf{E}[\ln g(\xi)] = \int_{\mathbb{S}_m} g(s) \ln g(s) U_m(ds),$$

где $\mathbf{E}[\cdot]$ — математическое ожидание, $\mathbf{D}(Q||U_m)$ — относительная энтропия Q относительно равномерного распределения U_m на \mathbb{S}_m (совпадающая со взятой с противоположным знаком дифференциальной энтропией Q относительно U_m) и $g = \frac{dQ}{dU_m}$ — производная Радона—Никодима (плотность распределения вероятности для единичного случайного вектора ξ относительно U_m). Таким образом, $\mathbf{A}_o(W)$ характеризует неравномерность распределения случайного вектора W по направлениям. Величина $\mathbf{A}_o(W)$ всегда неотрицательна, причем равенство ее нулю достигается лишь в случае, когда единичный вектор направления ξ равномерно распределен на сфере \mathbb{S}_m .

Однако вместо величины (1) обычно используют ее верхнюю границу $\mathbf{A}(W)$, введенную в [13, 14] (как многомерную версию рассмотренного в [31] функционала энергии-энтропии) для более узкого класса абсолютно непрерывно распределенных случайных векторов W в \mathbb{R}^m с конечными вторыми моментами следующим образом:

$$(2) \quad \mathbf{A}(W) = \inf_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f||p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m} \mathbf{E}[|W|^2] \right) - h(W),$$

где f — плотность распределения вероятностей вектора W относительно лебеговой меры в \mathbb{R}^m , $h(W) = -\mathbf{E}[\ln f(W)] = -\int_{\mathbb{R}^m} f(w) \ln f(w) dw$ — дифференциальная энтропия, λ — положительный параметр, определяющий плотность

$$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\lambda}\right), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

изотропного гауссовского распределения в \mathbb{R}^m с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m , где I_m — единичная матрица порядка m . Величину $\mathbf{A}(W)$ называют анизотропией случайного вектора W , причем эта величина имеет простой содержательный смысл: она показывает насколько “велико” отклонение распределения вектора W от класса изотропных гауссовских распределений в \mathbb{R}^m . Если случайный вектор имеет гауссовское распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ , то анизотропия такого вектора может быть посчитана согласно формуле из [14]:

$$\mathbf{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m\Sigma}{\text{tr}\Sigma} \right),$$

здесь и далее $\text{tr}(\cdot)$ обозначает след соответствующей матрицы.

В [28] определение анизотропии вектора (2) применялось к нецентрированным возмущениям. Если случайный m -мерный вектор распределен по нормальному закону с математическим ожиданием μ и ковариационной матрицей Σ , то его анизотропию можно вычислить следующим образом [29]:

$$(3) \quad \mathbf{A}(W) = -\frac{1}{2} \ln \det \left(\frac{m\Sigma}{\text{tr}\Sigma + |\mu|^2} \right).$$

В анизотропийной теории используют свой критерий качества — анизотропийную норму. Чтобы ввести это понятие, рассмотрим произвольную матрицу F из пространства $\mathbb{R}^{p \times m}$. Эта матрица будет играть роль линейного оператора для случайного m -мерного вектора $W \in \mathcal{L}_2^m$. Здесь и далее через \mathcal{L}_2^m

обозначается гильбертово пространство случайных векторов со значениями в \mathbb{R}^m и конечными вторыми моментами. Рассмотрим коэффициент усиления

$$(4) \quad \mathbf{Q}(F, W) = \frac{\|FW\|}{\|W\|},$$

где $FW \in \mathcal{L}_2^p$, $\|x\| = \sqrt{\mathbf{E}[|x|^2]}$ для случайного вектора x и $\|X\| = \sqrt{\text{tr } \mathbf{E}[X^T X]}$ для случайной матрицы X . В данной статье предполагается, что матрица F и вектор W взаимно независимы, вследствие чего имеет место равенство $\mathbf{E}[FW] = \mathbf{E}[F] \mathbf{E}[W]$, а также используется инвариантность следа произведения матриц относительно их циклической перестановки:

$$\|FW\|^2 = \text{tr } \mathbf{E}[W^T F^T FW] = \text{tr } \mathbf{E}[F^T FWW^T] = \text{tr}(\mathbf{E}[F^T F] \mathbf{E}[WW^T]).$$

Последнее равенство, являющееся следствием предположения о независимости F и W , позволяет привести (4) к виду

$$(5) \quad \mathbf{Q}(F, W) = \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda \Sigma)}{\text{tr } \Sigma}},$$

где $\Lambda = \mathbf{E}[F^T F]$, $\Sigma = \mathbf{E}[WW^T]$. Максимальное значение $\mathbf{Q}(F, W)$ совпадает со стохастической операторной нормой матрицы F :

$$\max_{W \in \mathcal{L}_2^m} \mathbf{Q}(F, W) = \|F\|_\infty = \bar{\sigma}(F),$$

где $\bar{\sigma}(F) = \max_{1 \leq k \leq m} \sqrt{\lambda_k(\Lambda)}$ — стохастическая интерпретация максимального сингулярного значения F . Этот случай реализуется, если вектор W имеет направление, совпадающее с направлением собственного вектора матрицы Λ , отвечающего максимальному собственному значению этой матрицы.

В некотором смысле “нейтральное” значение коэффициент усиления $\mathbf{Q}(F, W)$ принимает для случайных векторов W с изотропными вероятностными распределениями. В этом случае он совпадает с масштабированным стохастическим аналогом фробениусовой нормы матрицы F :

$$\mathbf{Q}(F, W) = \frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2 = \sqrt{\frac{\text{tr } \Lambda}{m}},$$

такое значение достигается на векторах с равномерным распределением на единичной сфере.

Введем множество векторов с ограниченным уровнем анизотропии:

$$(6) \quad \mathbf{W}_a = \left\{ W \in \mathcal{L}_2^m : \mathbf{A}(W) \leq a \right\}.$$

Аналогично [11] показывается, что при увеличении уровня анизотропии a от 0 до ∞ в пределах от $\|F\|_2 / \sqrt{m}$ до $\|F\|_\infty$ изменяется соответствующее максимальное значение коэффициента усиления (4), описываемое анизотропийной нормой. Сама анизотропийная норма вводится следующим образом:

$$(7) \quad \|F\|_a = \sup_{W \in \mathbf{W}_a} \mathbf{Q}(F, W).$$

Для случая нецентрированного вектора W с произвольной матрицей Σ оптимизационная задача (7) рассматривается при дополнительных ограничениях на первые два момента, см. [28]. Представим вектор W в виде суммы центрированного вектора \widetilde{W} и постоянного вектора $\mu = \mathbf{E}[W]$. Тогда коэффициент усиления $\mathbf{Q}(F, W)$ принимает вид:

$$(8) \quad \mathbf{Q}(F, W) = \sqrt{\frac{\mathbf{E}[|F\widetilde{W}|^2] + \mathbf{E}[|F\mu|^2]}{\mathbf{E}[|\widetilde{W}|^2] + |\mu|^2}}.$$

Соответственно в [28] показано, что анизотропийная норма для системы F с дополнительными ограничениями на первые два момента относительно внешнего возмущения будет равняться следующему:

$$(9) \quad \|F\|_a = \sup_{W \in \mathbf{W}_a} \sqrt{\frac{\text{tr}(\Lambda\Sigma) + \mathbf{E}[|F\mu|^2]}{\text{tr}\Sigma + |\mu|^2}}$$

при дополнительном ограничении на первые два момента:

$$|\mu| \geq \tau, \quad \text{tr}\Sigma \leq \sigma,$$

где $\tau \in [0; 1)$ представляет собой заданный параметр нецентрированности, описывающий условие $\frac{|\mu|}{\sqrt{|\mu|^2 + \text{tr}\Sigma}} \geq \tau$.

В [28] было показано, что при введенных ограничениях на первые два момента возможно масштабированием добиться выполнения условия $\sigma + \tau^2 = 1$, поскольку анизотропия последовательности инвариантна относительно поворота системы координат и масштабирования. Тогда условие (9) можно привести к виду

$$(10) \quad \|F\|_{a,\tau} = \sup_{\Sigma, e_0} \left\{ \left(\text{tr}(\Lambda\Sigma) + \mathbf{E}[|Fe_0|^2] \tau^2 \right)^{1/2} \left| - \frac{1}{2} \ln \det(m\Sigma) \leq a, \sigma + \tau^2 = 1 \right. \right\},$$

где $\tau = |\mu|$, e_0 — направляющий единичный вектор среднего. Поскольку целевой функционал в (10) зависит от двух параметров Σ и e_0 , то поиск супремума может быть разделен на поиск супремума каждого слагаемого в отдельности. Второе слагаемое достигает своего максимального значения, когда единичный вектор e_0 совпадает с собственным вектором матрицы $\mathbf{E}[F^T F]$, отвечающим максимальному собственному числу, при этом $\mathbf{E}[|Fe_0|^2] = \bar{\sigma}^2(\Lambda)$.

Первое слагаемое $\text{tr}(\Lambda\Sigma)$ при условии $-\frac{1}{2} \ln \det(m\Sigma) \leq a$, $\text{tr}\Sigma + \tau^2 = 1$ представляет собой задачу условной максимизации, которая может быть решена методом множителей Лагранжа. Подробно решение описано в [28], здесь же приводится только результат.

Теорема 1 [28]. Если анизотропия внешнего возмущения с ненулевым средним μ не превосходит порогового значения a , то для некоторого положительного параметра $\tau \in [0; 1)$ анизотропийная норма системы F при дополнительных ограничениях на возмущение вида $|\mu| \geq \tau$, $\text{tr } \Sigma \leq 1 - \tau^2$ может быть вычислена с помощью следующих функций:

$$\|F\|_{a,\tau} = \mathcal{N}(A_\tau^{-1}(a), \tau),$$

где

$$(11) \quad \Phi(q) = \frac{1}{m} \text{tr} \left((I_m - q\Lambda)^{-1} \right),$$

$$(12) \quad \Psi(q) = \frac{1}{m} \ln \det \left((I_m - q\Lambda)^{-1} \right),$$

$$(13) \quad \mathcal{A}_\tau(q) = \frac{m}{2} \left(\ln \left(\frac{\Phi(q)}{1 - \tau^2} \right) - \Psi(q) \right),$$

$$(14) \quad \mathcal{N}_\tau(q) = \left(\frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)} (1 - \tau^2) + \|F\|_\infty^2 \tau^2 \right)^{1/2},$$

параметр $q \in [0; \|F\|_\infty^{-2})$, m – размерность возмущения, $\Lambda = F^T F$, в случае случайной матрицы F , $\Lambda = \mathbf{E}[F^T F]$.

3. Основной результат

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему с мультипликативными шумами с нулевыми начальными условиями $x(0) = 0$ на конечном временном интервале:

$$(15) \quad F \sim \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k, \\ z_k = C_k x_k + D_k w_k, \end{cases}$$

где $A_k \in \mathcal{L}_2^{n \times n}$, $B_k \in \mathcal{L}_2^{n \times m}$, $C_k \in \mathcal{L}_2^{p \times n}$, $D_k \in \mathcal{L}_2^{p \times m}$, индекс времени принадлежит интервалу $k \in \{0, \dots, N\}$. Каждая из матриц в (15) представляет собой линейную комбинацию зависящих от времени детерминированных матриц со случайными коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^A A_{i,k}, & B_k &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^B B_{i,k}, \\ C_k &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^C C_{i,k}, & D_k &= \sum_{i=0}^M \xi_{i,k}^D D_{i,k}. \end{aligned}$$

Слагаемые $A_{i,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{i,k} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_{i,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ и $D_{i,k} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ – неслучайные действительные матрицы; одномерные случайные величины $\xi_{i,k}^\Omega$,

$\Omega = \{A, B, C, D\}$, $i = \overline{0, M}$, нормально распределены, имеют нулевое среднее и единичную дисперсию; величины $\xi_{0,k}^\Omega = 1$ по обозначению. Последнее условие приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[A_k] &= A_{0,k}, & \mathbf{E}[B_k] &= B_{0,k}, \\ \mathbf{E}[C_k] &= C_{0,k}, & \mathbf{E}[D_k] &= D_{0,k}, \end{aligned}$$

которые будут в дальнейшем использованы. Все случайные величины $\xi_{i,k}^\Omega$ полагаются независимыми в совокупности для всех значений индексов $i = \overline{0, M}$, $k = \overline{0, N}$, $\Omega = \{A, B, C, D\}$, т.е. $\mathbf{E}[\xi_{i,k}^\alpha \xi_{j,t}^\beta] = (\delta_{i,j} \delta_{k,t} \delta_{\alpha,\beta})$, где $\delta_{i,j}$, $\delta_{k,t}$ и $\delta_{\alpha,\beta}$ — символы Кронекера.

Введем обозначение $W_{0:N} = (w_0^T, \dots, w_N^T)^T$, $Z_{0:N} = (z_0^T, \dots, z_N^T)^T$, тогда систему (15) можно переписать в виде

$$Z_{0:N} = F_{0:N} W_{0:N},$$

где $F_{0:N}$ — блочно-нижнетреугольная матрица с блоками

$$f_{k,j} = \begin{cases} C_k T_{k,j} B_j, & \text{если } k > j, \\ D_k, & \text{если } k = j, \\ 0, & \text{если } k < j, \end{cases} \quad T_{k,j} = \begin{cases} I_n, & k = j + 1, \\ A_{k-1} T_{k-1,j}, & k > j + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу вычисления анизотропийной нормы (9) системы (15) с некоррелированными мультипликативными шумами и нецентрированным возмущением из класса (6) при условии $|\mathbf{E}(W)| > \tau$.

3.2. Критерий изометричности

В дальнейшем для некоторой вспомогательной системы, описываемой уравнениями типа (15) на том же временном интервале, понадобится использование условия изометричности, означающей равенство норм входа и выхода (для удобства формулируемое далее в терминах исходной системы):

$$\|Z_{0:N}\| = \|F_{0:N} W_{0:N}\| = \|W_{0:N}\|.$$

Последнее равенство с учетом взаимной независимости W и F будет выполняться, если $\mathbf{E}[F_{0:N}^T F_{0:N}] = \Lambda_{0:N}$ является единичной матрицей соответствующей размерности. Критерий изометричности можно получить в терминах матриц исходной системы (15).

Лемма 1. Чтобы система с мультипликативными шумами вида (15) была изометричной, необходимо и достаточно, чтобы для всех значений $k = \overline{0, N}$ матрицы реализации в пространстве состояний этой системы удовлетворяли уравнениям

$$(16) \quad \sum_{i=0}^M (B_{i,k}^T Q_{k+1} B_{i,k} + D_{i,k}^T D_{i,k}) = I_m,$$

$$(17) \quad P_k (A_{0,k}^T Q_{k+1} B_{0,k} + C_{0,k}^T D_{0,k}) = 0,$$

где грамианоподобные матрицы P_k и Q_{k+1} удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(18) \quad P_{k+1} = A_{0,k} P_k A_{0,k}^T + B_{0,k} B_{0,k}^T,$$

$$(19) \quad Q_k = \sum_{i=0}^M (A_{i,k}^T Q_{k+1} A_{i,k} + C_{i,k}^T C_{i,k})$$

с граничными условиями $P_0 = 0$, $Q_{N+1} = 0$.

Доказательства леммы 1 и последующих леммы 2 и теоремы 2 приводятся в Приложении.

3.3. Наихудшее возмущение

Рассмотрим концепцию так называемого наилучшего возмущения, предложенная еще в [11], суть которой заключается в поиске такого линейного динамического объекта, генерирующего возмущение из класса (6), на котором достигается супремум выражения (9).

На каждом шаге вектор наилучшего возмущения w_k имеет вид

$$(20) \quad w_k = L_k \xi_k + S_k^{1/2} v_k + \nu_k,$$

где $L_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $S_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\nu_k \in \mathbb{R}^m$ — некоторые подлежащие определению величины, v_k — гауссовский “белый шум”, ξ_k — состояние следующей системы:

$$(21) \quad \xi_{k+1} = (A_{0,k} + B_{0,k} L_k) \xi_k + B_{0,k} S_k^{1/2} v_k.$$

Последнее слагаемое ν_k в (20) обеспечивает выполнение условия $|\mathbf{E}(W)| > \tau$. Если обозначить в качестве $\Sigma_{0:N}$ ковариационную матрицу последовательности $\{w_k\}$, то для некоторого параметра $q \in [0, \|F\|_\infty^{-2})$ будет верно соотношение

$$\Sigma_{0:N}^{-1} + q \Lambda_{0:N} = I_{m_N},$$

или

$$(22) \quad \Sigma_{0:N} = (I_{m_N} - q \Lambda_{0:N})^{-1},$$

где $m_N = m(N+1)$. Соотношение (22) соответствует условию изометричности системы

$$\Theta = \begin{bmatrix} \sqrt{q} F_{0:N} \\ G_{0:N}^{-1} \end{bmatrix},$$

где $F_{0:N}$ и $G_{0:N}$ — переходные матрицы системы (15) и (20) соответственно. Следующая лемма 2 позволяет рассчитать параметры L_k , S_k , соответствующие наилучшему возмущению (20).

Лемма 2. Для нестационарной системы с мультипликативными шумами на конечном временном интервале (15) наилучшее возмущение генерируется фильтром

$$(23) \quad G \sim \begin{cases} \xi_{k+1} = (A_{0,k} + B_{0,k}L_k)\xi_k + B_{0,k}S_k^{1/2}v_k, \\ w_k = L_k\xi_k + S_k^{1/2}v_k + \nu_k, \end{cases}$$

где $\xi_0 = 0$, а матрицы которого соответствуют решениям уравнений

$$(24) \quad R_{1,k} = \sum_{i=0}^M A_{i,k}^T R_{1,k+1} A_{i,k} + q \sum_{i=0}^M C_{i,k}^T C_{i,k}, \quad R_{1,M+1} = 0,$$

$$(25) \quad R_{2,k} = A_{0,k}^T R_{2,k+1} A_{0,k} + L_k^T S_k^{-1} L_k, \quad R_{2,M+1} = 0,$$

$$(26) \quad S_k = \left(I_m - q \sum_{i=0}^M D_{i,k}^T D_{i,k} - \sum_{i=0}^M B_{i,k}^T R_{1,k+1} B_{i,k} - B_{0,k}^T R_{2,k+1} B_{0,k} \right)^{-1},$$

$$(27) \quad L_k = S_k (q D_{0,k}^T C_{0,k} + B_{0,k}^T R_{1,k+1} A_{0,k} + B_{0,k}^T R_{2,k+1} A_{0,k}),$$

для некоторого значения параметра q , удовлетворяющего условию $\mathcal{A}_\tau(q) = a$.

3.4. Вычисление анизотропной нормы

Чтобы воспользоваться теоремой 1, необходимо получить выражения для специальных функций (11)–(14) через матрицы пространства состояний системы (15). Сформулируем этот результат в следующем виде.

Теорема 2. Для системы (15) анизотропная норма при ненулевом среднем возмущения, анизотропия которого не превышает значения a , может быть вычислена согласно выражению $\|F\|_{a,\tau} = \mathcal{N}_\tau(\mathcal{A}_\tau^{-1}(a))$, где $\mathcal{A}_\tau(q)$ и $\mathcal{N}_\tau(q)$ определяются согласно (13) и (14) соответственно, функции $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ имеют вид

$$(28) \quad \Phi(q) = \frac{1}{m_N} \sum_{k=0}^N \text{tr} (L_k \Upsilon_k L_k^T + S_k),$$

$$(29) \quad \Psi(q) = \frac{1}{m_N} \sum_{k=0}^N \ln \det S_k,$$

где S_k , L_k связаны с уравнениями (24)–(27), матрицы Υ_k удовлетворяют уравнению

$$\Upsilon_{k+1} = (A_{0,k} + B_{0,k}L_k)\Upsilon_k(A_{0,k} + B_{0,k}L_k)^T + B_{k,0}S_kB_{k,0}^T$$

с начальным условием $\Upsilon_0 = 0$.

Замечание. Чтобы воспользоваться результатом теоремы 2, необходимо вычислить значение стохастической операторной нормы системы F , определив границу параметра q ; далее численно найти значение параметра q^* , для которого выполнено $\mathcal{A}_\tau(q^*) = a$, при фиксированном τ (это можно сделать, например, с помощью метода Ньютона), и вычислить $\mathcal{N}_\tau(q^*) = \|F\|_{a,\tau}$.

4. Численный пример

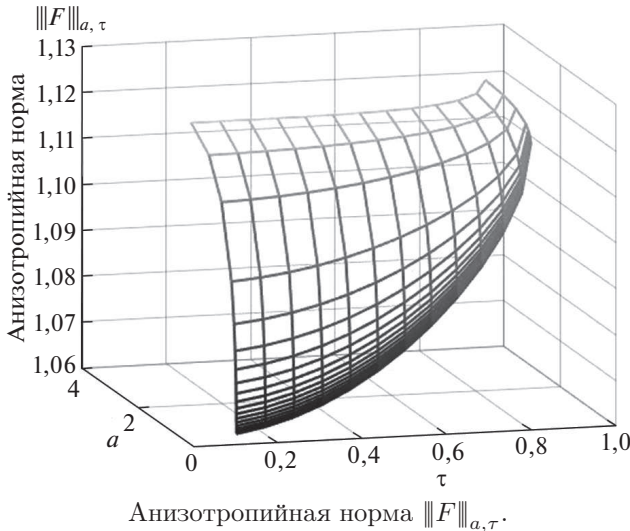
Работоспособность алгоритма вычисления анизотропийной нормы проиллюстрирована далее. В качестве объекта анализа выбрана видеоизмененная модель из [17]. Динамика модели описывается разностными уравнениями

$$F \sim \begin{cases} x_{k+1} = (A_{0,k} + \xi_k^A A_{1,k}) x_k + (B_{0,k} + \xi_k^B B_{1,k}) w_k, \\ z_k = (C_{0,k} + \xi_k^C C_{1,k}) x_k + (D_{0,k} + \xi_k^D D_{1,k}) w_k, \end{cases}$$

где условия относительно случайных величин ξ_k^* как и в системе (15), а матрицы имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{0,k} &= \begin{bmatrix} 0 & -0,4 \\ 0,6 & 0,7 \sin(6k) \end{bmatrix}, & A_{1,k} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{0,k} &= \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}, & B_{1,k} &= 0_{2 \times 1}, \\ C_{0,k} &= [0,3 \quad 0,2 \sin(6k)], & C_{1,k} &= [1 \quad 0], \\ D_{0,k} &= 1, & D_{1,k} &= 0. \end{aligned}$$

Поверхность, описывающая анизотропийную норму системы F в зависимости от параметров τ и a , представлена на рисунке. Для $N = 10$ были подсчитаны масштабированная \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -норма, они оказались равны $\|F\|_2 = 1,0611$ и $\|F\|_\infty = 1,1235$ соответственно. На рисунке можно заметить, что при фиксированном параметре τ анизотропийная норма с ростом анизотропии a также будет увеличиваться, приближаясь к значению \mathcal{H}_∞ -нормы, при стремлении параметров a и τ к нулю значение анизотропийной нормы близко к масштабированной \mathcal{H}_2 -норме.



5. Заключение

В статье решается задача анизотропийного анализа для системы с мультипликативными шумами при нецентрированном возмущении. Получены формулы вычисления анизотропийной нормы с помощью специальных функций и в пространстве состояний, основанные на лемме о вещественной ограниченности. Рассмотрен иллюстративный пример. Полученный результат может быть в дальнейшем применен к решению задачи фильтрации в рамках анизотропийной теории для систем с мультипликативными шумами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Для доказательства рассмотрим блочную матрицу $\mathbf{E}[F_{0:N}^T F_{0:N}] = \Lambda_{0:N}$, которая для изометричной системы будет единичной порядка $m(N+1)$. Блоки этой матрицы имеют вид

$$\lambda_{i,j} = \sum_{k=\max\{i,j\}}^N \mathbf{E}[f_{k,i}^T f_{k,j}],$$

последний блок матрицы равен

$$\lambda_{N,N} = \mathbf{E}[D_N^T D_N] = \sum_{i=0}^M D_{i,N}^T D_{i,N} = I_m$$

вследствие взаимной независимости величин $\xi_{i,k}^D$ и $\xi_{j,k}^D$, блок с номером $N-1$ соответственно равен

$$\lambda_{N-1,N-1} = \sum_{i=0}^M (D_{i,N-1}^T D_{i,N-1} + B_{i,N-1}^T C_{i,N}^T C_{i,N} B_{i,N-1}) = I_m,$$

где

$$\sum_{i=0}^M C_{i,N}^T C_{i,N} = Q_N,$$

очевидно, что для последнего блока $\lambda_{N,N}$ необходимым является условие $Q_{N+1} = 0$. Далее по индукции легко показать, что соотношения (16) и (19) выполнены.

Рассмотрим элемент $\lambda_{i,j}$, где $i < j$,

$$\lambda_{i,j} = \mathbf{E} \left[B_{i-1}^T T_{i-1,j-1}^T (C_{j-1}^T D_{j-1} + A_{j-1}^T Q_j B_{j-1}) \right],$$

это равенство может быть приведено к виду

$$\lambda_{i,j} = B_{0,i-1}^T A_{0,i}^T \cdots A_{0,j-2}^T (C_{0,j-1}^T D_{0,j-1} + A_{0,j-1}^T Q_j B_{0,j-1}),$$

из-за предположения о независимости в совокупности величин $\xi_{i,k}^\Omega$, $\Omega = \{A, B, C, D\}$. Первые $j - 1$ элементов j -го столбца матрицы $\Lambda_{0:N}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} & [A_{0,j-2}A_{0,j-3} \cdots A_{0,1}B_{0,0}, \dots, A_{0,j-4}B_{0,j-3}, B_{0,j-2}]^T \times \\ & \times (C_{0,j-1}^T D_{0,j-1} + A_{0,j-1}^T Q_j B_{0,j-1}) = 0_{m(j-1) \times m}, \end{aligned}$$

умножив последнее равенство на

$$[A_{0,j-2}A_{0,j-3} \cdots A_{0,1}B_{0,0}, \dots, A_{0,j-4}B_{0,j-3}, B_{0,j-2}],$$

получаем выражение, аналогичное (17), с обозначением

$$P_{j-1} = B_{0,j-2}B_{0,j-2}^T + A_{0,j-2}P_{j-2}A_{0,j-2}^T,$$

совпадающее с (18).

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Доказательство основывается на обратимости матрицы S_k вследствие ее положительной определенности [27]. Далее следует применить лемму 1 к системе $[\sqrt{q}F^T, G^{-T}]$ с учетом обозначений (27) и (26), параметр q определяется в соответствии (22).

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы повторяет предложенные в [28] рассуждения о вычислении анизотропийной нормы случайной матрицы.

Рассмотрим фильтр (23), генерирующий возмущение, на котором достигается супремум коэффициента усиления (8). Поскольку будет верно соотношение (22), будет достаточным связать вычисление специальных функций $\Phi(q)$ и $\Psi(q)$ с ковариационной матрицей возмущения $\Sigma_{0:N}(q)$. Рассмотрим отдельные блоки симметричной матрицы $G_{0:N}G_{0:N}^T$:

$$g_{i,j} = \begin{cases} L_i \Delta_{i,j+1} B_{0,j} S_j^{1/2}, & i > j, \\ S_j^{1/2}, & i = j, \\ 0, & i < j, \end{cases}$$

где $\Delta_{i,j} = (A_{0,i-1} + B_{0,i-1}L_{i-1})\Delta_{i-1,j}$ с граничным условием $\Delta_{i,i} = I_n$. Исходя из такого представления, получаем

$$\text{tr } \Sigma_{0:N} = \text{tr } \text{block}_{0 \leq i, 0 \leq j} \left\{ \sum_{k=0}^{\min\{i,j\}} g_{i,k} g_{j,k}^T \right\} = \sum_{k=0}^N \text{tr} (L_k \Upsilon_k L_k^T + S_k).$$

Последнее равенство означает справедливость формулы (28). Чтобы доказать (29), используем инвариантность определителя матрицы при ее транспонировании:

$$\det(G_{0:N}G_{0:N}^T) = \det(G_{0:N}^T G_{0:N}) = (\det G_{0:N})^2 = \prod_{k=0}^N \det S_k.$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. С. 339–342.
2. *Уланов Г.М.* Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления. М.: Машиностроение, 1971.
3. *Якубович Е.Д.* Решение задачи оптимального управления для линейных дискретных систем // АиТ. 1975. № 9. С. 73–79.
Yakubovich Ye.D. Solving One Problem of Optimal Control for a Discrete Linear System // Autom. Remote Control. 1975. V. 36. No. 9. P. 1447–1453.
4. *Vidyasagar M.* Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. P. 527–535.
5. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // АиТ. 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Autom. Remote Control. 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
6. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space Solutions to Standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Control Problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.
7. *Doyle J.C., Zhou K., Bodenheimer B.* Optimal Control with Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Performance Objectives // Proc. ACC. Pittsburg, 1989. P. 2065–2070.
8. *Steinbuch M., Bosgra O.H.* Necessary Conditions for Static and Fixed Order Dynamic Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Optimal Control // Proc. ACC. Boston, 1991. P. 1137–1142.
9. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.* Stochastic Approach to \mathcal{H}_∞ -Optimization // Proc. 33rd IEEE Conf. Decision and Control. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
10. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Doklady Math. 1995. V. 51. P. 388–390.
11. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 179–184.
12. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space Solution to Anisotropy-based Stochastic \mathcal{H}_∞ -Optimization Problem // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 427–432.
13. *Vladimirov I., Diamond P., Kloeden P.* Anisotropy-based Robust Performance Analysis of Linear Discrete Time Varying Systems // CADSMAP Research Report, 2001 (http://www.maths.uq.edu.au/research/research_centres/cadsmap/reports.html).
14. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анзотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2006. № 8. С. 92–111.
Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P. Anisotropy-based Robust Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 8. P. 1265–1282.
15. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* \mathcal{H}_∞ Control and Filtering of Discrete-Time Stochastic Systems with Multiplicative Noise // Automatica. 2001. V. 37. P. 409–417.
16. *Gershon E., Shaked U., Yaesh I.* \mathcal{H}_∞ Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems // Lecture Notes in Control and Information Sciences, V. 318. Springer-Verlag, 2005.

17. *Shen B., Wang Z., Hung Y.S.* Distributed \mathcal{H}_∞ -consensus Filtering in Sensor Networks with Multiple Missing Measurements: The Finite-horizon Case // *Automatica*. 2010. V. 46. P. 1682–1688.
18. *Домбровский В.В., Ляшенко Е.А.* Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля // *АиТ*. 2003. № 10. С. 50–65.
Dombrovskii V.V., Lyashenko E.A. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization // *Autom. Remote Control*. 2003. V. 64. No. 10. P. 1558–1570.
19. *Barbosa K.A., de Souza C.E., Trofino A.* Robust filtering for uncertain linear systems with state-dependent noise // *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*. 2003. V. 1. P. 880–885.
20. *Stoica A.-M., Dragan V., Yaesh I.* Kalman-Type Filtering for Stochastic Systems with State-Dependent Noise and Markovian Jumps // *Proc. 15th IFAC Symp. Syst. Ident.* 2009. P. 1375–1380.
21. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.-M.* *Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems*. Springer, 2010.
22. *Stoica A.-M., Yaesh I.* On the anisotropic norm of discrete time stochastic systems with state dependent noises // *Ann. Acad. Rom. Sci.* 2012. Ser. Math. Appl. V. 4. P. 209–220.
23. *Kustov A.Yu., Kurdyukov A.P., Yurchenkov A.V.* On the Anisotropy-Based Bounded Real Lemma Formulation for the Systems with Disturbance-Term Multiplicative Noise // *IFAC-PapersOnLine*, 2016, V. 49(13). P. 65–69.
24. *Кустов А.Ю.* Условия ограниченности анизотропной нормы системы с мультипликативными шумами // *Матер. 13-й Междунар. конф. “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (конф. Пятницкого)*. М.: ИПУ РАН, 2016. С. 235–237.
25. *Юрченко А.В.* Вычисление границы анизотропной нормы для дискретной системы с мультипликативными шумами // *Математика и математическое моделирование*. 2017. № 4. С. 28–41.
26. *Yurchenkov A.V.* Anisotropy-Based Controller Design for Linear Discret-Time Systems with Multiplicative Noise // *J. of Comput. and Syst. Sci. Int.* 2018. V. 57. No. 6. P. 864–873.
27. *Kustov A.Yu.* State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic Systems // *Proc. 15th Int. Conf. on Electrical Eng., Comp. Science and Aut. Control (CCE)*. 2018. P. 6.
28. *Кустов А.Ю., Тимин В.Н.* Анизотропный анализ нестационарных систем на конечном интервале времени при нецентрированном возмущении // *АиТ*. 2017. № 6. С. 18–35.
Kustov A.Yu., Timin V.N. Anisotropy-based Analysis for Finite Horizon Time-varying Systems with Non-centered Disturbances // *Autom. Remote Control*. 2017. V. 78. No. 6. P. 974–988.
29. *Kustov A.Yu.* Anisotropy-based Analysis and Synthesis Problems for Input Disturbances with Nonzero Mean // *Proc. 15th Int. Carpathian Control Conf. (ICCC-2014)*. 2014. P. 291–295.
30. *Yurchenkov A.V.* On the Control Design for Linear Time-Invariant Systems with Moments Constraints of Disturbances in Anisotropy-based Theory // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. V. 51. No. 32. С. 160–165.

31. *Bernhard H.P.* A Tight Upper Bound on the Gain of Linear and Nonlinear Predictors for Stationary Stochastic Processes // IEEE Trans. Signal Process. 1998. V. 46. No. 11. P. 2909–2917.
32. *Belov I.R., Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case // Proc. Med. Conf. Control and Autom. (MED'19). 2019. P. 148–152.

Статъа представена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 23.02.2020

После доработки 10.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020