Автоматика и телемеханика, № 1, 2021

Нелинейные системы

© 2021 г. М.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (miguel@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

КРИТЕРИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СЕЛЕКТОРНО-ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Рассмотрено периодическое селекторно-линейное дифференциальное включение. Доказано, что для равномерной асимптотической устойчивости такого включения необходимо и достаточно существования периодической по времени функции Ляпунова квазиквадратичного вида. Получены оценки функции Ляпунова, которые гарантируют ее положительную определенность и существование у нее бесконечно малого высшего предела.

Ключевые слова: периодическое селекторно-линейное дифференциальное включение, функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231021010049

1. Введение

Изучение систем управления привело к применению теории дифференциальных включений. Использованию дифференциальных включений в теории систем управления посвящена монография [1].

В некоторых случаях, например, таких как задача абсолютной устойчивости, исследование линейных нестационарных систем, матрица правой части которых удовлетворяет интервальным ограничениям, исследование устойчивости систем управления, которые содержат элементы с неполной информацией, могут быть использованы селекторно-линейные дифференциальные включения.

Автономным селекторно-линейным включением называется включение вида

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \{y : y = Ax,\ A \in \Psi\}, \tag{1}$$

где $x, y \in \mathrm{R}^n$, Ψ – множество в пространстве $(n \times n)$-матриц. Включение вида (1) называют селекторно-линейным включением, поскольку многозначное отображение $F(x)$ в (1) представляет собой объединение линейных однозначных отображений (селекторов) Ax, $A \in \Psi$. В случае автономного селекторно-линейного включения правая часть включения (1) $F(x)$, матрица A, множество Ψ не зависят от времени. Говорят, что селекторно-линейное включение (1) асимптотически устойчиво, если его тривиальное решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Автономным селекторно-линейным включениям посвящен ряд публикаций. В [2] для автономного селекторно-линейного дифференциального включения, у которого множество Ψ является выпуклым многогранником, разработан итерационный алгоритм построения фунции Ляпунова из класса квадратичных форм. В [3, 4] для автономных селекторно-линейных дифференциальных включений, у которых множество Ψ является компактом, получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения в виде существования функций Ляпунова различного вида. В [5–8] получены различные алгебраические критерии асимптотической устойчивости автономных селекторно-линейных дифференциальных включений, у которых множество Ψ является выпуклым многогранником.

В публикациях [9–11], посвященных периодическим по времени дифференциальным включениям, в основном рассматриваются вопросы существования периодических решений. Немного публикаций посвящено исследованию свойств решений и вопросу устойчивости периодических по времени дифференциальных включений. Так, например, в [12, 13] исследуются свойства слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости положения равновесия периодического по времени дифференциального включения. Согласно приведенным в [12, 13] определениям положение равновесия рассматриваемого периодического дифференциального включения слабо асимптотически (слабо экспоненциально) устойчиво, если существует хотя бы одно решение включения, удовлетворяющее условиям обычных определений асимптотической (экспоненциальной) устойчивости положения равновесия дифференциального включения. В [12, 13] разработан метод исследования слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости положения равновесия периодического по времени дифференциального включения, состоящий в построении включения первого приближения и исследовании свойств его решений.

В [14] рассмотрен ряд примеров, приводящих к системам с периодически меняющимися параметрами. В [15, 16] решены задачи абсолютной и робастной устойчивости систем управления с периодически изменяющимися параметрами. В частности, установлено, что рассматриваемые системы управления с периодическими параметрами эквивалентны, в смысле совпадения множеств абсолютно непрерывных решений, периодическим по времени селекторно-линейным дифференциальным и разностным включениям. В [17] для периодических селекторно-линейных дифференциальных включений с помощью вариационного подхода были получены критерии асимптотической устойчивости в общей форме, в виде некоторых предельных соотношений. Настоящая статья посвящена получению критерия асимптотической устойчивости периодических селекторно-линейных дифференциальных включений с помощью метода функций Ляпунова.

2. Постановка задачи

Рассмотрим селекторно-линейное периодическое дифференциальное включение вида

$$(2)\quad \dot{x} \in F(t,x), \quad F(t,x) = \{y : y = B(t)x, \;\; B(t) \in \Omega(t)\}, \quad \Omega(t+T) = \Omega(t),$$

где $x, y \in \mathrm{R}^n$, $F : \mathrm{R}^{n+1} \to \mathrm{R}^n$ – многозначное отображение, функция $x(t) \equiv 0$ – положение равновесия дифференциального включения (2). $\Omega(t)$ – выпуклое, компактное множество действительных $(n \times n)$-матриц. Предполагается, что элементы матрицы $B(t)$ являются периодическими с периодом $T > 0$, ограниченными и измеримыми функциями. Решением включения (2) будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $x(t)$, определенную на интервале или отрезке I, которая почти всюду на I удовлетворяет (2). Многозначная функция $F(t, x)$ в некоторой области $G = \{0 \le t \le T,\ x \in G_R,\ G_R = \{x_0 : \|x_0\| \le R\}\}$ удовлетворяет основным условиям [18, с. 60], т.е. при всех $(t, x) \in G$ множество $F(t, x) \subset \mathrm{R}^n$ непустое, ограниченное, замкнутое, выпуклое и функция $F(t, x)$ полунепрерывна сверху [18, с. 52] по (t, x). В силу периодичности по t многозначной функции $F(t, x)$ при исследовании свойств решений $x(t, t_0, x_0)$ включения (2) без ограничения общности можно считать, что $t_0 \in [0, T]$.

Определение 1. *Включение (2) называется равномерно устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что как только начальные условия $x(t_0) = x_0$ удовлетворяют условию $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, решение $x(t, t_0, x_0)$ включения (2) с начальным условием x_0 удовлетворяет неравенству $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0 \ge 0$ и при любой матрице $B(t) \in \Omega(t)$.*

Определение 1 требует наличия такой окрестности нуля, что решения, начинающиеся в этой окрестности, существуют для всех $t \ge 0$.

Определение 2. *Включение (2) называется равномерно асимптотически устойчивым если выполнены условия определения 1 и равномерно относительно $B(t) \in \Omega(t)$, $t_0 \ge 0$ и x_0 из всякого шара $G_R = \{x_0 : \|x_0\| \le R\}$ выполняется предельное соотношение $\lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = 0$, т.е. для любых $\eta > 0$ и $R > 0$ существует такое $\tau(\eta, R) \ge 0$, что при всех $t \ge t_0 + \tau(\eta, R)$ для решений $x(t, t_0, x_0)$ включения (2) выполняется неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \eta$ при любом выборе $B(t) \in \Omega(t)$, начального момента времени t_0 и начального условия $x_0 \in G_R$.*

Определение 3. *Включение (2) называется равномерно экспоненциально устойчивым, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\beta \ge 1$, что для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ включения (2) выполнено неравенство*

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \le \beta \|x_0\| \exp(-\alpha(t - t_0))$$

при любой матрице $B(t) \in \Omega(t)$ и любых $t_0 \ge 0$ и $x_0 \in \mathrm{R}^n$.

Заметим, что определение неравномерной асимптотической устойчивости отличалось бы от определения 2 тем, что число δ зависело бы от $B(t) \in \Omega(t)$ и $t_0 \ge 0$, а величина τ зависела бы от $B(t) \in \Omega(t)$, $t_0 \ge 0$ и $x_0 \in \mathrm{R}^n$. Определение неравномерной экспоненциальной устойчивости отличалось бы от определения 3 тем, что числа α и β зависели бы от $B(t) \in \Omega(t)$, $t_0 \ge 0$ и $x_0 \in \mathrm{R}^n$.

В [17] для включения (2) доказана эквивалентность свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости и с использованием вариационного подхода получено необходимое и достаточное условие равномерной асимптотической устойчивости в виде некоторого предельного соотношения.

В настоящее время основными методами анализа устойчивости дифференциальных включений являются метод функций Ляпунова и метод, основанный на исследовании первого приближения. В качестве первого приближения могут рассматриваться, например, выпуклые процессы — многозначные отображения специального вида [12, 13]. Центральное место в рамках метода функций Ляпунова занимает вопрос о построении функций Ляпунова с требуемыми свойствами, гарантирующими выполнение всех условий соответствующего определения устойчивости того или иного типа. Задача состоит в выделении класса функций Ляпунова, определяющих необходимые и достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости включения (2).

3. Основной результат

Нестационарная функция Ляпунова $v(t,x)$, которая строится далее, является локально липшицевой, периодической (с периодом T) по $t \geq 0$, выпуклой по $x_0 \in \mathrm{R}^n$ и, вообще говоря, не является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных (t,x), что обычно предполагается в классических теоремах Ляпунова для нестационарного случая. По этой причине необходимо использовать понятие обобщенной производной функции Ляпунова $v(t,x)$ в силу дифференциального включения (2).

Под производной функции Ляпунова $v(t,x)$ в силу включения (2) будем понимать функцию

$$w(t,x) = \max_{y \in F(t,x)} D_y^+ v(t,x), \tag{3}$$

где функция

$$D_y^+ v(t,x) = \overline{\lim_{h \to +0}} \; h^{-1}[v(t+h, x+hy) - v(t,x)] \tag{4}$$

непрерывна по y, поскольку функция $v(t,x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Для того чтобы включение* (2) *было равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы существовала периодическая по t с периодом T функция Ляпунова $v(t,x)$ вида*

$$\begin{gathered} v(t,x) = x' L(t,x) x, \\ L'(t,x) = L(t,x) = L(t,\mu x), \quad x \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad v(t,0) \equiv 0, \\ L(t+T,x) = L(t,x), \end{gathered} \tag{5}$$

удовлетворяющая локальному условию Липшица при $t \geq 0$, $x \in \mathrm{R}^n$, строго выпуклая по $x \in \mathrm{R}^n$, положительно однородная (второй степени), производная которой в силу включения (2) *удовлетворяет неравенству*

$$w(t,x) = \max_{y \in F(t,x)} D_y^+ v(t,x) \leq -\gamma \|x\|^2, \quad \gamma > 0, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \tag{6}$$

при всех $t \geq 0$, $x \in \mathrm{R}^n$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Функция Ляпунова (5) является выпуклой, и, вообще говоря, не является непрерывно дифференцируемой. Поэтому применение такой функции при исследовании устойчивости включения (2) связано с использованием обобщения классических теорем прямого метода Ляпунова. Применительно к случаю выпуклых функций Ляпунова такое обобщение сводится к тому, что вместо производной гладкой функции $v(t,x)$ в силу системы необходимо рассматривать одностороннюю производную по направлению векторного поля в соответствии с формулами (3), (4), поскольку выпуклая функция $v(t,x)$, вообще говоря, может не быть непрерывно дифференцируемой функцией, но имеет производные по любому направлению. В выпуклом случае производная (3), (4) в обобщенных теоремах Ляпунова второго метода Ляпунова играет ту же роль, что и производная в силу системы в случае гладких функций Ляпунова. При построении функции Ляпунова с помощью формулы (П.2) определяется функция $S(t,t_0,x_0)$, а затем с помощью формулы (П.11), в виде интеграла, определяется функция Ляпунова $v(t,x)$. Такая конструкция обеспечивает строгую выпуклость, положительную определенность $v(t,x)$ и отрицательную определенность ее производной $w(t,x)$. Свойство $L'(t,x) = L(t,x) = L(t,\mu x)$ непосредственно вытекает из выбранной конструкции функции Ляпунова. Оценка (6) гарантирует отрицательную определенность производной $w(t,x)$, что в соответствии с методом Ляпунова, примененным к включению (2), обеспечивает его равномерную асимптотическую устойчивость.

В отличие от классических теорем об асимптотической устойчивости [19], в которых требуется положительная определенность функции Ляпунова и существование у нее бесконечно малого высшего предела, в теореме ничего не говорится о таких свойствах функции $v(t,x)$. Это связано с тем, что в условиях теоремы указанные свойства функции $v(t,x)$ вида (5) вытекают из следующей леммы.

Лемма. *Пусть непрерывная при $t \geq 0$, $x \in \mathrm{R}^n$ периодическая по t функция $v(t,x)$ строго выпукла и положительно однородна (степени $s \geq 2$) по $x_0 \in \mathrm{R}^n$ (т.е. $v(t,\mu x) = \mu^s v(t,x)$ при всех $t \geq 0$, $x \in \mathrm{R}^n$, $\mu > 0$). Тогда существуют такие константы $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$, что справедливы неравенства*

$$\lambda_1 \|x\|^s \leq v(t,x) \leq \lambda_2 \|x\|^s \tag{7}$$

при всех $t \geq 0$, $x_0 \in \mathrm{R}^n$.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

В условиях леммы свойства положительной определенности и существования бесконечно малого предела функции $v(t,x)$ вытекают непосредственно из оценок (7).

4. Заключение

В публикациях, посвященных автономным селекторно-линейным дифференциальным включениям (1) со стационарным множеством Ψ, использовались стационарные функции Ляпунова. В данной статье впервые рассмотрены периодические селекторно-линейные дифференциальные включения (2), где $\Omega(t)$ – периодическое, выпуклое, компактное множество действительных $(n \times n)$-матриц. В [15] в связи с задачей абсолютной устойчивости был рассмотрен частный случай таких включений. Задача построения нестационарной функции Ляпунова для включения (2) ранее не рассматривалась.

Доказано, что для равномерной асимптотической устойчивости таких включений необходимо и достаточно существования единой, нестационарной (периодической по времени) функции Ляпунова квазиквадратичного вида. Получены оценки выбранной функции Ляпунова, которые гарантируют ее положительную определенность и существование у нее бесконечно малого высшего предела.

Класс функций Ляпунова (5) является обобщением на случай включения (2) квадратичных функций Ляпунова $v(t,x) = x'P(t)x$, $P(t) = P(t+T)$, определяющих необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости линейных периодических систем вида $\dot{x} = A(t)x$ с однозначной правой частью [19], и обобщением квазиквадратичных функций Ляпунова $v(x) = x'P(x)x$, построенных для автономного селекторно-линейного включения в (3).

В [17] для включения (2) установлена эквивалентность свойств равномерной асимптотической устойчивости и равномерной экспоненциальной устойчивости. Таким образом, доказанная в Приложении теорема является также критерием равномерной экспоненциальной устойчивости включения (2).

Полученный результат может найти применение при изучении устойчивости систем управления с периодическими параметрами, в частности следящих систем, элементы которых работают на переменном токе, систем управления с амплитудно-импульсной модуляцией и систем, используемых при решении задач, связанных с исследованием вибраций фрезерных станков.

Дальнейшее исследование рассмотренного в данной статье включения (2) может быть связано с получением условий слабой асимптотической и слабой экспоненциальной устойчивости. Представляет также интерес выделение класса функций Ляпунова, устанавливающих необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости периодических селекторно-линейных разностных включений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Из условий леммы следует, что $v(t,0) \equiv 0$ для всех $t \geq 0$ в силу положительной однородности функции $v(t,x)$. Так как функция $v(t,x)$ строго выпукла по $x \in \mathrm{R}^n$, то при любых $x \neq 0$ и μ $(0 < \mu < 1)$ выполнено неравенство $v(t, \mu x + (1-\mu)0) < \mu v(t,x) + (1-\mu)v(t,0)$ или $v(t, \mu x) < \mu v(t,x)$. Последнее неравенство можно переписать в виде $\mu(1-\mu^{s-1})v(t,x) > 0$. Следовательно, $v(t,x) > 0$ для всех $x \neq 0$ и $t \geq 0$. Пусть $t \in [0,T]$. Так как функция $v(t,x)$ непрерывна, то функции $w_1(x) = \min_{t\in[0,T]} v(t,x)$, $w_2(x) = \max_{t\in[0,T]} \nu(t,x)$ непрерывны и положительно определены в R^n, причем для всех $x \in \mathrm{R}^n$, $t \in [0,T]$ справедливы неравенства $w_1(x) \leq v(t,x) \leq w_2(x)$. В силу периодичности функции $v(t,x)$ по t последние неравенства выполнены для всех $t \geq 0$. Заметим, что справедливо равенство $w_1(x) = w_1\left(\|x\|\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|^s w_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$, $x \neq 0$. Аналогичное равенство выполнено для функции $w_2(x)$. В силу непрерывности функций $w_1(x)$, $w_2(x)$ в R^n и компактности единичной сферы $S^n = \{x : \|x\| = 1\}$ следует неравенство (7), где $\lambda_1 = \min_{x\in S^n} w_1(t,x)$, $\lambda_2 = \max_{x\in S^n} w_2(t,x)$, $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Необходимость. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\text{(П.1)} \qquad \dot{x} = B(t)x, \quad x_0 \in \mathrm{R}^n, \quad B(t) \in \Omega(t), \quad \Omega(t+T) = \Omega(t).$$

Заметим, что любое решение $x_B(t,t_0,x_0)$ включения (2) при $x_B(t_0) = x_0$ и $B(t) \in \Omega(t)$, $t \geq t_0$ можно представить в виде $x_B(t,t_0,x_0) = \Phi_B(t,t_0)x_0$, где $\Phi_B(t,t_0)$ – матрицант системы (П.1).

Рассмотрим функцию

$$\text{(П.2)} \qquad S(t,t_0,x_0) = \max_{B(t)\in\Omega(t)} \|x_B(t,t_0,x_0)\|^2 = \max_{B(t)\in\Omega(t)} \|\Phi_B(t,t_0)x_0\|^2.$$

Функцию $S(t,t_0,x_0)$ можно записать в виде

$$\text{(П.3)} \qquad S(t,t_0,x_0) = \max_{x\in X(t,t_0,x_0)} \|x\|^2 = H^2(X(t,t_0,x_0),0),$$

где $X(t,t_0,x_0)$ – сечение в момент $t \geq t_0$ интегральной воронки включения (2), выпущенной из точки (t_0,x_0), $H(X(t,t_0,x_0),0)$ – хаусдорфово расстояние от сечения $X(t,t_0,x_0)$ до нуля. Функция $S(t,t_0,x_0)$ определена при при всех $x_0 \in \mathrm{R}^n$ и $t \geq t_0 \geq 0$, поскольку множество решений $\{x(t,t_0,x_0)\}$ включения (2) компактно [20] на любом конечном интервале $[t_0,t]$. Из неравенства

$$\left|\sqrt{S(t,t_1,x_1)} - \sqrt{S(t,t_0,x_0)}\right| \leq H(X(t,t_1,x_1), X(t,t_0,x_0)),$$

вытекающего из (П.3) и теорем 15, 18 в [20], следует, что функция $S(t,t_0,x_0)$ непрерывна по (t_0,x_0), $t \geq 0$, $x_0 \in \mathrm{R}^n$ при всяком фиксированном $t \geq t_0$ и непрерывна по $t \geq t_0$ при фиксированных (t_0,x_0).

Докажем, что функция $S(t,t_0,x_0)$ строго выпукла по $x_0 \in \mathrm{R}^n$. Пусть $x_0 \neq y_0$, $\lambda \in (0,1)$. Условие строгой выпуклости функции $S(t,t_0,x_0)$ имеет вид

$$\text{(П.4)} \qquad \begin{gathered} S(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0) = \max_{B(t)\in\Omega(t)} \|\Phi_B(t,t_0)(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0)\|^2 < \\ < \lambda \max_{B(t)\in\Omega(t)} \|\Phi_B(t,t_0)x_0\|^2 + (1-\lambda)\max_{B(t)\in\Omega(t)} \|\Phi_B(t,t_0)y_0\|^2. \end{gathered}$$

Покажем, что неравенство (П.4) выполнено. Заметим, что справедливо неравенство

$$\text{(П.5)} \qquad \begin{gathered} \|\Phi_B(t,t_0)(\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0)\|^2 \leq \\ \leq (\lambda\|\Phi_B(t,t_0)x_0\| + (1-\lambda)\|\Phi_B(t,t_0)y_0\|)^2. \end{gathered}$$

Оценим правую часть неравенства (П.5). Так как $x_0 \neq y_0$, выполнено неравенство

$$\text{(П.6)} \qquad \Big(\|\Phi_B(t,t_0)x_0\|^2 - \|\Phi_B(t,t_0)y_0\|^2 \Big)^2 > 0.$$

Из условия $\lambda \in (0,1)$ и неравенства (П.6) следует

$$\text{(П.7)} \qquad \begin{gathered} 2\lambda(1-\lambda) \|\Phi_B(t,t_0)x_0\| \, \|\Phi_B(t,t_0)y_0\| - \\ - \lambda(1-\lambda) \Big(\|\Phi_B(t,t_0)x_0\|^2 + \|\Phi_B(t,t_0)y_0\|^2 \Big) < 0. \end{gathered}$$

Преобразуя неравенство (П.7), получим

$$\text{(П.8)} \qquad \begin{gathered} (\lambda \|\Phi_B(t,t_0)x_0\| + (1-\lambda) \|\Phi_B(t,t_0)y_0\|)^2 < \\ < \lambda \|\Phi_B(t,t_0)x_0\|^2 + (1-\lambda) \|\Phi_B(t,t_0)y_0\|^2 . \end{gathered}$$

Из (П.8) и (П.5) следует неравенство (П.4), что и доказывает строгую выпуклость функции $S(t,t_0,x_0)$ по x_0.

Из обобщенной теоремы Филиппова [21] следует, что функция $S(t,t_0,x_0)$ является локально Липшицевой по (t_0,x_0) равномерно по $t \geq t_0$.

Как уже отмечалось выше, для включения (2) равномерная абсолютная устойчивость эквивалентна равномерной экспоненциальной абсолютной устойчивости. Поэтому для ее решений $x_B(t,t_0,x_0)$ справедлива оценка

$$\text{(П.9)} \qquad \|x_B(t,t_0,x_0)\| \leq \beta \|x_0\| \exp(-\alpha(t-t_0)), \quad t \geq t_0,$$

где числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ не зависят от $B(t) \in \Omega(t)$, $t \geq t_0$, $x_0 \in \mathrm{R}^n$. Из (П.2) и (П.9) следует неравенство

$$\text{(П.10)} \qquad S(t,t_0,x_0) \leq \beta^2 \|x_0\|^2 \exp(-2\alpha(\tau - t_0)), \quad \tau \geq t_0.$$

В каждой точке (t_0,x_0), $x_0 \in \mathrm{R}^n$, $t_0 \geq 0$ функцию Ляпунова $v(t_0,x_0)$ определим соотношением

$$\text{(П.11)} \qquad v(t_0,x_0) = \int\limits_{t_0}^{t_0+T_1} S(\tau,t_0,x_0)d\tau, \quad T_1 > \alpha^{-1}\ln\beta.$$

Из строгой выпуклости функции $S(t,t_0,x_0)$ по x_0 следует строгая выпуклость функции $v(t_0,x_0)$ по $x_0 \in \mathrm{R}^n$ при всяком фиксированном $t_0 \geq 0$. В силу (П.3) $S(\tau,t_0,0) \equiv 0$, $0 \leq t_0 \leq \tau$.

Пусть $B_1(\tau,t_0,x_0) \in \Omega(\tau)$ – решение вариационной задачи (П.3), а $\Phi_{B_1}(\tau,t_0,x_0)$ – матрициант системы (П.1) при $B(\tau) = B_1(\tau,t_0,x_0)$. Тогда при $x_0 \neq 0$

$$\text{(П.12)} \qquad \begin{gathered} S(t,t_0,x_0) = x_0'\Phi_{B_1}'(\tau,t_0,x_0)\Phi_{B_1}(\tau,t_0,x_0)x_0 = x_0'P(\tau,t_0,x_0)x_0, \\ P'(\tau,t_0,x_0) = P(\tau,t_0,x_0). \end{gathered}$$

Из (П.11), (П.12) следует, что $v(t_0, 0) \equiv 0$ при всех $t_0 \geq 0$ и

$$v(t_0, x_0) = x_0' \left(\int\limits_{t_0}^{t_0+T_1} P(\xi, t_0, x_0) d\xi \right) x_0 = x_0' L(t_0, x_0) x_0, \quad L'(t_0, x_0) = L(t_0, x_0). \tag{П.13}$$

Пусть $X_{B_1}(t, t_0, x_0)$ – сечение в момент $t \geq t_0$ интегральной воронки включения (2), выходящей из точки (t_0, x_0). В силу периодичности включения (2) $X_{B_1}(t, t_0, x_0) = X_{B_1} \times (t + T, t_0 + T, x_0)$ (см. [22]). Из (П.11)–(П.13) и последнего равенства следует, что $L(t_0, x_0) = L(t_0 + T, x_0)$ при всех $x_0 \in \mathrm{R}^n$, $t_0 \geq 0$.

Так как $S(\tau, t_0, \mu x_0) = \mu^2 S(\tau, t_0, x_0)$, то $v(t_0, \mu x_0) = \mu^2 v(t_0, x_0)$ и

$$v(t, x) = x' L(t, x) x = x' L(t, \mu x) x, \quad x \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad t \geq 0. \tag{П.14}$$

Пусть $x \neq 0$, $\tau_1 = \|x\|^{-1}$, $\tau_2 = -\|x\|^{-1}$. Тогда функцию $v(t, x)$ можно представить в виде $v(t, x) = x' L_1(t, x) x$, где

$$L_1(t, x) = 2^{-1} [L(t, \tau_1 x) + L(t, \tau_2 x)]. \tag{П.15}$$

При этом матрица $L_1(t, x)$ удовлетворяет условию $L_1(t, \mu x) = L_1(t, x) = L_1'(t, x)$ при всех $x \neq 0$, $\mu \neq 0$, $t \geq 0$.

Следовательно, можно считать, что матрица $L(t, x)$ в (П.14) удовлетворяет равенствам $L(t, x) = L(t, \mu x) = L'(t, x)$ при всех $x \neq 0$, $\mu \neq 0$, $t \geq 0$. Таким образом, функция $v(t, x)$, определенная в соответствии с (П.11), может быть представлена в виде (5).

Перейдем к доказательству неравенства (6). Так как функция $S(t, t_0, x_0)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по (t_0, x_0) равномерно по $t \geq t_0$, то функция $v(t, x)$ также удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому для любых $x_0 \in \mathrm{R}^n$, $t_0 \geq 0$, $y \in F(t_0, x_0)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} D_y^+ v(t_0, x_0) &= \varlimsup_{h \to +0} h^{-1} [v(t_0 + h, x_0 + hy) - v(t_0, x_0)] = \\ &= \varlimsup_{h \to +0} h^{-1} [v(t_0 + h, x_0 + hy + o(h)) - v(t_0, x_0)] = \\ &= \varlimsup_{h \to +0} h^{-1} [v(t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) - v(t_0, x_0)], \end{aligned} \tag{П.16}$$

где $y \in F(t_0, x_0)$, $o(h)$ выбрано из условия $x_0 + hy + o(h) = x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)$, а $x_\Lambda(t, t_0, x_0)$ – решение включения (2) при $B(t) \equiv \Lambda = \mathrm{const}$.

Из (П.11) и (П.16) следует

$$\begin{aligned} &h^{-1} [v(t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) - v(t_0, x_0)] = \\ &= h^{-1} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_0+h+T_1} S(\tau, t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_0+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau \right\} \end{aligned} \tag{П.17}$$

при $h > 0$. Заметим, что сечения $X(t, t_0, x_0)$ интегральной воронки включения (2) удовлетворяют полугрупповому свойству обобщенных динамических систем [23], из которого вытекает включение

$$X(\tau, t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) \subset X(\tau, t_0, x_0). \tag{П.18}$$

Из (П.18) и определения $S(\tau, t_0, x_0)$ следует неравенство

$$S(\tau, t_0 + h, x_\lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) \le S(\tau, t_0, x_0), \quad \tau \le t_0, h > 0.$$

Из (П.17) и последнего неравенства следует

$$\begin{aligned} & h^{-1}[v(t_0 + h, x_\Lambda(t_0 + h, t_0, x_0)) - v(t_0, x_0)] \le \\ & \le h^{-1} \left\{ \int\limits_{t_0+h}^{t_0+h+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_0+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau \right\} = \\ & = h^{-1} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_0+h+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} S(\tau, t_0, x_0) d\tau \right\} \end{aligned} \tag{П.19}$$

при $h > 0$. Из (П.16) и (П.19) получим

$$\begin{aligned} & w(t_0, x_0) = \max_{y \in F(t_0, x_0)} D_y^+ v(t_0, x_0) \le \\ & \le \overline{\lim_{h \to +0}} h^{-1} \left\{ \int\limits_{t_0}^{t_0+h+T_1} S(\tau, t_0, x_0) d\tau - \int\limits_{t_0}^{t_0+h} S(\tau, t_0, x_0) d\tau \right\}. \end{aligned} \tag{П.20}$$

В силу непрерывности функции $S(\tau, t_0, x_0)$ по τ и неравенства (П.20) можно перейти к обычному пределу при $h \to +0$. Поэтому из (П.10) и (П.20) получим следующее неравенство: $w(t, x) \le S(t_0 + T_1, t_0, x_0) - S(t_0, t_0, x_0) \le$ $\le -(1 - \beta^2 \exp(-2\alpha T_1)) \|x_0\|^2$, из которого в силу произвольности $x_0 \in \mathrm{R}^n$ и $t_0 \ge 0$ следует оценка (6) при $\gamma = 1 - \beta^2 \exp(-2\alpha T_1) > 0$.

Достаточность. Рассмотрим любое абсолютно непрерывное решение $x(t) = x_B(t, t_0, x_0)$ включения (2), где x_0 принадлежит шару произвольного радиуса $\rho(\|x_0\| \le \rho)$ и $0 \le t_0 \le t \le T_1$. Поскольку функция $v(t, x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица при всех $x \in \mathrm{R}^n$, $t \ge 0$, функция $V(t) = v(t, x(t))$ будет локально липшицевой, а значит, и абсолютно непрерывной при $t \ge 0$. В силу этого свойства функции $V(t)$ почти всюду на отрезке $[t_0, T_1]$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \frac{dV}{dt} = \lim_{h \to +0} h^{-1}[V(t + h) - V(t)] = \overline{\lim_{h \to +0}} h^{-1}[V(t + h) - V(t)] = \\ & = \overline{\lim_{h \to +0}} h^{-1}[v(t + h, x(t + h)) - v(t, x(t))] = \\ & = \overline{\lim_{h \to +0}} h^{-1}[v(t + h, x(t) + h\dot{x}(t)) - v(t, x(t))] = D^+_{\dot{x}(t)} v(t, x(t)), \end{aligned} \tag{П.21}$$

где $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ – производная исходной функции $x(t)$.

Из (П.21) с учетом (3), (4) и (6) получим неравенство

$$\text{(П.22)} \qquad \frac{dV}{dt} = D^+_{\dot{x}(t)} v(t, x(t)) \le \max_{y \in F(t,x(t))} D^+_y v(t, x(t)) = \\ = w(t, x) \le -\gamma \left\| x(t) \right\|^2, \quad \gamma > 0,$$

которое справедливо почти при всех $t \ge 0$.

Из леммы следует, что в условиях теоремы функция $v(t, x)$ вида (5) удовлетворяет неравенствам $\lambda_1 \left\| x \right\|^2 \le v(t, x) \le \lambda_2 \left\| x \right\|^2$ при всех $t \ge 0$, $x \in \mathrm{R}^n$. Из этих неравенств и (П.22) для решений включения (2) вытекает экспоненциальная оценка (П.9) при $\alpha = \gamma / 2\lambda_2 > 0$ и $\beta = \sqrt{\lambda_2/\lambda_1} \ge 1$. Следовательно, в условиях теоремы включение (2) является равномерно асимптотически устойчивым. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Han Z., Cai X., Huang J.* Theory of Control Systems Described by Differential Inclusions. Springer, 2016.
2. *Kamenetsky V.A., Pyatnitskii E.S.* An Iterative Method of Lyapunov Function Construction for Differential Inclusions // Systems & Control Letters. 1987. No. 8. P. 445–451.
3. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Критерии устойчивости селекторно-линейных дифференциальных включений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 1. С. 37–40.
4. *Molchanov A.P., Pyatnitskii E.S.* Criteria of Asymptotic Stability of Differential and Difference Inclusions Encountered in Control Theory // Systems & Control Letters. 1989. No. 13. P. 59–64.
5. *Rapoport L.B., Pyatnitskii E.S.* Criteria of Asymptotic Stability of Differential Inclusions and Periodic Motions of Time-Varying Nonlinear Control Systems // IEEE Trans. Circ. Syst. I: Fundamental Theory and Applications. 1996. V. 43. No. 3. P. 219–229.
6. *Rapoport L.B.* Asymptotic Stability and Periodic Motions of Selector-Linear Differential Inclusions // In: Garafalo F., Glielmo L. (eds) Robust Control Via Variable Structure and Lyapunov Techniques. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer. Berlin Heidelberg. 1996. V. 217. P. 269–285.
7. *Иванов Г.Г., Алферов Г.В., Ефимова П.А.* Устойчивость селекторно-линейных дифференциальных включений // Вестн. Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 25–30.
8. *Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A.* About Stability of Selector Linear Differential Inclusions // AIP Conference Proceedings. 2004. 150013 (2018); https://doi.org/10.1063/1.5079216.
9. *Li G., Xue X.* On the Existence of Periodic Solutions for Differential Inclusions // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 276. Iss. 1. P. 168–183.
10. *Filippakis M., Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Existence Theorems for Periodic Differential Inclusions in R^N // ACTA MATH APPL SIN-E. 2004. V. 20. No. 2. P. 179–190.
11. *Filippakis M., Gasinski L., Papageorgiou N.S.* Periodic Solutions for Differential Inclusions in R^N // Archivum Mathematicum. 2006. V. 42. No. 2. P. 115–123.

12. *Smirnov G.V.* Weak Asymptotic Stability at First Approximation for Periodic Differential Inclusions // Nonlinear Differential Equations and Applications. 1995. V. 2. No. 4. P. 445–461.

13. *Gama R., Smirnov G.V.* Weak Exponential Stability for Time-Periodic Differential Inclusions Via First Approximation Averaging // Set-Valued and Variational Analysis. 2013. V. 21. Iss. 2. P. 191–200.

14. *Шильман С.В.* Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.

15. *Молчанов А.П., Морозов М.В.* Абсолютная устойчивость нелинейных нестационарных систем управления с периодической линейной частью // АиТ. 1992. № 2. С. 49–59.

Molchanov A.P., Morozov M.V. Absolute Stability of Nonlinear Nonstationary Control Systems with Periodic Linear Sections // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 2. Part 1. P. 189–198.

16. *Морозов М.В.* Критерии робастной устойчивости нестационарных систем с интервальными ограничениями // Тр. ИСА РАН. 2016. Т. 66. Вып. 4. С. 4–9.

17. *Морозов М.В.* Свойства селекторно-линейных периодических дифференциальных включений // Тр. ИСА РАН. 2020. Т. 70. Вып. 1. С. 99–105.

18. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

19. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

20. *Благодатских В.И.* Некоторые результаты по теории дифференциальных включений (обзор) // Summer School on Ordinary Differential Equations. Brno. 1975. С. 29–67.

21. *Frankowska H.* Contingent Cones to Reachable Sets of Control Systems // Siam J. Control Optim. 1989. V. 27. No. 1. P. 170–198.

22. *Kloeden P.E.* Asymtotic Invariance and Limit Sets of General Control Systems // J. Differential Equations. 1975. V. 19. No. 1. P. 91–105.

23. *Roxin E.O.* Stability of General Control Systems // J. Differential Equations. 1965. V. 1. No. 2. P. 115–150.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 19.05.2020

После доработки 07.07.2020

Принята к публикации 09.07.2020