

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. А.А. АРДЕНТОВ, канд. техн. наук (aaa@pereslavl.ru),
А.П. МАШТАКОВ, канд. техн. наук (alexey.mashtakov@gmail.com)
(Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН,
Переславль-Залесский)

УПРАВЛЕНИЕ МОБИЛЬНЫМ РОБОТОМ С ПРИЦЕПОМ НА ОСНОВЕ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ¹

Рассматривается кинематическая модель мобильного робота с прицепом, движущегося по однородной плоскости. Робот может двигаться вперед-назад и вращаться на месте. Для рассматриваемой модели ставится задача оптимального управления: требуется перевести систему “робот с прицепом” из произвольно заданной начальной конфигурации в произвольно заданную конечную конфигурацию так, чтобы величина маневра была минимальна. Под маневром понимается функционал, задающий компромисс между линейным и угловым перемещением робота. В зависимости от способа сцепки прицепа с роботом такая задача соответствует двухпараметрическому семейству задач оптимального управления в 4-мерном пространстве с 2-мерным управлением.

Предлагается метод нильпотентной аппроксимации для приближенного решения задачи. Разработан ряд итерационных алгоритмов и программ, успешно решающих поставленную задачу в идеальном случае — при условии отсутствия фазовых ограничений. На основе этих алгоритмов предлагается специализированный алгоритм перепарковки, решающий частный случай задачи, когда начальное и конечное положение робота совпадают, и учитывающий фазовое ограничение на угол поворота прицепа, возникающее в реальных системах.

Ключевые слова: робот с прицепом, кинематическая модель, оптимальное управление, нильпотентная аппроксимация, субриманова задача.

DOI: 10.31857/S0005231021010050

1. Введение

Рассмотрим мобильный колесный робот с прицепом, движущийся по горизонтальной плоскости. Сила трения колес, масса и форма робота и прицепа в расчет не берутся. Под роботом будем понимать ведущую колесную пару с центром в точке $(x, y) \in \mathbb{R}_{x,y}^2$ и углом $\theta \in S_\theta^1$, задающим направление движения колес относительно оси абсцисс. Под прицепом понимается пассивная колесная пара, которая сцепливается с ведущей в некоторой точке, см.

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387-П) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна РАН.

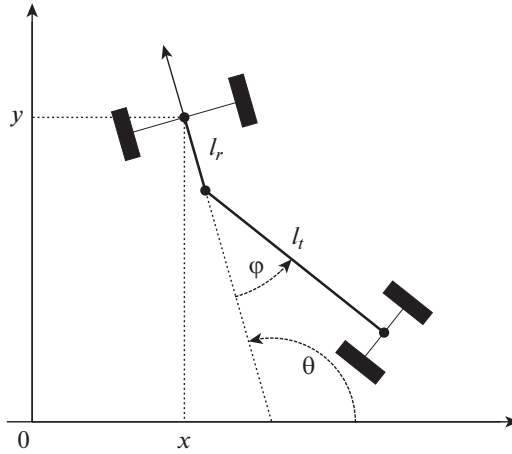


Рис. 1. Модель мобильного колесного робота с прицепом и ее параметры.

рис. 1. Положение прицепа определяется углом $\varphi \in S^1_\varphi$ ориентации относительно робота. Таким образом, положение робота с прицепом задается точкой $q = (x, y, \theta, \varphi)$ в пространстве $M = \mathbb{R}^2_{x,y} \times S^1_\theta \times S^1_\varphi$. Параметры $l_r \geq 0$, $l_t > l_r$ задают расстояния от точки сцепки до центра робота и до центра прицепа, определяя конфигурацию сцепки робота с прицепом.

Кинематическая модель задается дифференциальной системой, возникающей, см. [1], из неголономного ограничения на движение без проскальзывания колес робота и прицепа. В данной статье продолжается начатое в [2] изучение модели. Предлагается метод приближенного решения задачи управления системой “робот с прицепом”, основанный на построении нильпотентной аппроксимации — более простой системы, сохраняющей важные свойства исходной системы. Подобный метод применялся в [3] для управления системой “робот с двумя прицепами”.

Рассматривается задача парковки робота с прицепом, формализуемая как двухточечная граничная задача управления, см. [4], в пространстве состояний M . По заданным граничным условиям требуется найти удовлетворяющую им траекторию $q(t) \in M$, $t \in [0, t_1]$, допустимую в смысле неголономных ограничений (т.е. удовлетворяющую дифференциальной системе) и минимизирующую заданный функционал, определяющий взвешенную цену за угловое и линейное перемещение робота.

Задача управления неголономными системами широко известна в робототехнике [1]. Кинематические модели разнообразных мобильных роботов описываются управляемыми системами вида

$$(1) \quad \dot{q} = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i X_i(q), \quad q \in M, \quad \dim M = n \geq k, \quad \mathbf{u}_i \in \mathbb{R},$$

где X_i — гладкие векторные поля на многообразии M .

Решение задачи для систем (1) общего вида неизвестно. Удовлетворительное решение имеется лишь для систем специального вида. Одним из наиболее эффективных считается дифференциально-геометрический подход [5, 6].

В [7, 8] исследовано использование тригонометрических управлений для неголономных систем определенного рода: класс систем, которые могут быть преобразованы в цепную форму. Благодаря специальной форме, существует простое тригонометрическое управление, изменяющее определенный набор координат, в то время как другие координаты остаются неизменными. В [9] предложено использовать тригонометрические управления для перемещения системы в целевое состояние одновременно по всем координатам для систем с двумерным управлением. Кроме того, они показали, как для достижения этой цели могут быть использованы полиномиальные управления. В [10] показано, что кусочно–постоянные управления доставляют точное решение задачи управления системами в цепной форме. Техника приведения системы к цепной форме описана в [8, 11]. Заметим, что системы общего положения и, в частности, систему, возникающую в рассматриваемой задаче управления роботом с прицепом, нельзя привести к цепной форме, однако метод нильпотентизации [12], описанный далее, порождает систему в цепной форме.

В исключительных случаях для управляемых систем можно найти точный закон оптимального управления (в смысле минимума заданного функционала качества). Одним из возможных подходов к решению задачи оптимального управления системами, линейными по управлению, с фиксированным временем является метод, разработанный в [13]. Метод основан на разложении функции управления в ряд Фурье и отбрасывании слагаемых выше некоторого порядка N . Решение новой конечномерной задачи сходится к решению исходной задачи при N , стремящимся к бесконечности [13]. Найденное решение называется близким к оптимальному. Задачу оптимального управления можно также решать с помощью инвариантных геометрических методов [6, 14], развитых при решении задач оптимального управления на группах Ли. Численное решение для систем, моделирующих различные типы мобильных роботов на плоскости и в пространстве, предложено в [15].

Один из классов управляемых систем, допускающих точное решение, задается нильпотентными системами. Напомним, что управляемая система является нильпотентной, если скобки Ли управляемых векторных полей обнуляются, начиная со скобок некоторой длины. Метод управления нильпотентными системами был представлен в [16]. Он основан на возможности перемещения в направлении произвольно заданной голономной кривой (априори не удовлетворяющей неголономному ограничению (1)) на основе формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа–Бэйкера–Дынкина. Благодаря этому, становится возможным вычисление допустимых кусочно–постоянных управлений, переводящих неголономную систему точно в конечное состояние.

В [17] А. Беллаш с соавторами разработали технику нильпотентизации, которую впоследствии применили к задаче управления неголономными системами. В [18] показано, как перевести любую управляемую систему в каноническую форму, соответствующую нильпотентной аппроксимирующей системе в специальной треугольной форме, позволяющей искать тригонометрические управления.

Представленное в данной статье решение задачи оптимального управления также опирается на нильпотентизацию исходной системы и основано на построении итерационного процесса, на каждой итерации которого решает-

ся задача оптимального управления приближенной системой. Итоговый закон управления формируется последовательным применением найденных на каждой итерации управлений. Будем называть такое управление *субоптимальным*.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится постановка задачи 1, а именно задачи оптимального управления роботом с прицепом без фазовых ограничений. В разделе 3 при помощи алгоритма 1 устанавливается связь между рассматриваемой задачей 1 и более простой задачей (определяемой полиномиальной системой (10)), так называемой нильпотентной субримановой задачей на группе Энгеля [19]¹, которая доставляет нелинейную аппроксимацию исходной задачи. В теореме описывается замена координат между этими задачами. Для решения нильпотентной задачи используется гибридный алгоритм 2. Приводится сравнение известных оптимальных решений с найденными субоптимальными траекториями для близких граничных точек. В разделе 4 уточняется, как построить субоптимальное решение задачи 1 (без фазовых ограничений) в ситуации общего положения (для далеких граничных точек) с помощью алгоритма 3. Раздел 5 посвящен программной реализации представленных алгоритмов. Ставится задача 2 (с ограничением на угол поворота прицепа), а также приводятся несколько примеров ее решения с помощью модифицированного алгоритма 3. В разделе 6 рассматривается частный случай задачи с ограничением — перепарковка прицепа. Для решения этой задачи разработан специализированный алгоритм, протестированный на регулярной сетке значений для угла прицепа и соотношения длин плеч робота l_r, l_t . Результаты тестирования приведены в таблице. В Приложение вынесены определения основных терминов, используемых в работе.

2. Постановка задачи оптимального управления

Задача 1 (без ограничений). Задана управляемая система

$$(2) \quad \dot{q} = \mathbf{u}_1 X_1(q) + \mathbf{u}_2 X_2(q),$$

$$(3) \quad q = (x, y, \theta, \varphi) \in M = \mathbb{R}_{x,y}^2 \times S_\theta^1 \times S_\varphi^1, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $q, x, y, \theta, \varphi, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ по умолчанию зависят от параметра времени $t \in [0, t_1]$; управления $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ — вещественнозначные кусочно-непрерывные функции, задающие линейную и угловую скорость движения робота с центром в точке (x, y) ; а векторные поля при управлениях имеют следующий вид:

$$(4) \quad \begin{aligned} X_1(q) &= \left(\cos \theta, \sin \theta, 0, -\frac{\sin \varphi}{l_t} \right), \\ X_2(q) &= \left(0, 0, 1, -\frac{l_r \cos \varphi}{l_t} - 1 \right). \end{aligned}$$

¹ Правила умножения на группе приведены в [20], см. главу 15.

Для некоторого заданного $\mu > 0$ требуется найти кривую $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, с заданными граничными значениями в двух точках

$$(5) \quad q(0) = q^0 = (x^0, y^0, \theta^0, \varphi^0), \quad q(t_1) = q^1 = (x^1, y^1, \theta^1, \varphi^1),$$

удовлетворяющую системе (2)–(5) и имеющую минимальное значение функционала

$$(6) \quad J = \int_0^{t_1} \sqrt{\mathbf{u}_1^2(t) + \mu^2 \mathbf{u}_2^2(t)} dt,$$

где коэффициент μ задает компромисс между линейным и угловым перемещением.

Замечание 1. Система (2)–(4) имеет следующую симметрию (растяжение):

$$\delta_\mu : (x, y, \theta, \varphi, l_t, l_r, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \mapsto (\mu x, \mu y, \theta, \varphi, \mu l_t, \mu l_r, \mu \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2).$$

Поэтому минимизация (6) равносильна минимизации субримановой длины [21]

$$(7) \quad \int_0^{t_1} \sqrt{\mathbf{u}_1^2(t) + \mathbf{u}_2^2(t)} dt$$

с пересчитанными граничными значениями и параметрами сцепки робота и прицепа.

Замечание 2. Инвариантность задачи 1 относительно параллельных переносов и поворотов в плоскости \mathbb{R}_{xy}^2 позволяет без ограничения общности фиксировать $q^0 = (0, 0, 0, \varphi^0)$.

Вычислим следующие коммутаторы (скобки Ли):

$$X_3(q) = [X_1, X_2](q) = \left(\sin \theta, -\cos \theta, 0, -\frac{l_r + l_t \cos \varphi}{l_t^2} \right),$$

$$X_4(q) = [X_1, [X_1, X_2]](q) = \left(0, 0, 0, -\frac{l_t + l_r \cos \varphi}{l_t^3} \right).$$

Из теоремы Рашевского–Чжоу [14] следует, что система (2)–(5) вполне управляема, так как в силу начального допущения $l_t > l_r \geq 0$ выполнено условие

$$(8) \quad \det(X_1, X_2, X_3, X_4) = -\frac{l_t + l_r \cos \varphi}{l_t^3} \neq 0.$$

Задача 1 соответствует двухпараметрическому семейству *субримановых задач*, а именно задач оптимального управления с линейной по управлению системой (2), где в качестве критерия оптимальности выступает минимум субримановой длины (7). Решение любой такой задачи с определенными значениями параметров l_r, l_t является открытой проблемой. Цель данной работы — разработать общую схему построения приближенного решения для всего семейства задач.

3. Решение локальной задачи

Локальное приближение управляемой системы другой, более простой системой широко используется в теории управления. Обычно в качестве локальной аппроксимации используется линеаризация управляемой системы. Однако для линейных по управлению систем (2) линеаризация дает слишком грубое приближение. Так как размерность управления меньше размерности состояния, то линеаризация не может быть вполне управляемой. Это следует из теоремы Рашевского–Чжоу [14].

В случае (2)–(4) линеаризация имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \mathbf{u}_1 X_1^0(q) + \mathbf{u}_2 X_2^0(q), \\ X_1^0(q) &= \left(1, 0, 0, -\frac{\sin \varphi^0}{l_t} \right), \\ X_2^0(q) &= \left(0, 0, 1, -1 - \frac{l_r \cos \varphi^0}{l_t} \right).\end{aligned}$$

Легко проверить, что $[X_1^0, X_2^0](q) = (0, 0, 0, 0)$, поэтому линеаризация неуправляема.

Естественную замену линейной аппроксимации в этом случае доставляет нильпотентная аппроксимация — наиболее простая система, сохраняющая свойство полной управляемости. Для системы (2)–(3) она задается управляемой системой вида

$$(9) \quad \dot{\tilde{q}} = \mathbf{u}_1 \widehat{X}_1(\tilde{q}) + \mathbf{u}_2 \widehat{X}_2(\tilde{q}), \quad \tilde{q} \in \mathbb{R}^4, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2,$$

где $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2$ — векторные поля приближающей системы, см. подробнее в Приложении.

Нильпотентная аппроксимация строится по системе (2), записанной в привилегированных координатах (см. определение 6 в Приложении), таким образом, что векторные поля \widehat{X}_i аппроксимирующей системы определяют нильпотентную алгебру Ли, т.е. для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\left[\widehat{X}_{i_1}, [\widehat{X}_{i_2}, \dots, [\widehat{X}_{i_N}, \widehat{X}_{i_{N+1}}, \dots]] \right] = 0, \quad \forall i_1, \dots, i_{N+1} \in \{1, 2\}.$$

В частности, для системы (2)–(4) обнуляются коммутаторы выше 3 порядка ($N = 3$):

$$\left[\widehat{X}_i, [\widehat{X}_j, [\widehat{X}_1, \widehat{X}_2]] \right] = 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2\}.$$

Замечание 3. В отличие от линейной аппроксимации нильпотентная аппроксимация сохраняет такой важный инвариант, как вектор роста, см. определение 1 в Приложении. Для системы (2)–(3) общего положения в точке общего положения вектор роста равен $(2, 3, 4)$, т.е. векторные поля $X_1, X_2, X_3 = [X_1, X_2], X_4 = [X_1, X_3]$ (либо $X_4 = [X_2, X_3]$) формируют базис касательного пространства $T_q M$ в каждой точке $q \in M$. В частности, это выполнено для системы “робот с прицепом” (2)–(4).

Понятие нильпотентной аппроксимации управляемых систем было впервые введено Ж. Стефани [22] и независимо развито А.А. Аграчевым, А.В. Сарычевым [23] и Х. Хермсом [24]. В данной работе использован алгоритм вычисления нильпотентной аппроксимации, предложенный А. Беллаишем [25], конкретизированный для систем (2)–(3) и дополненный переходом в систему координат, в которой нильпотентная аппроксимация имеет канонический вид (10).

Замечание 4. Касательное пространство к субриманову многообразию само является субримановым многообразием. Его можно определить как метрическое пространство, используя определение Громова [26]. Более того, оно имеет алгебраическую структуру нильпотентной группы Ли. Ключевое наблюдение состоит в том, что структура T_qM похожа на структуру вещественного векторного пространства, только группа является не абелевой, а нильпотентной.

3.1. Вычисление нильпотентной аппроксимации

Предложенный А. Беллаишем [25] способ построения нильпотентной аппроксимации в привилегированных координатах конкретизируется для систем с вектором роста (2, 3, 4) в следующем алгоритме 1. В нем получено явное выражение векторных полей аппроксимирующей системы в канонических привилегированных координатах, позволяющих искать оптимальное управление для нильпотентной аппроксимации.

Алгоритм 1. Замена координат $\tau = \Phi \circ \mathcal{A}$, приводящая систему (2)–(3) к каноническому виду, строится следующим образом:

1. Через исходные координаты q вычисляются привилегированные координаты \tilde{q} :

$$\mathcal{A} : \tilde{q} = g(q) - \frac{1}{2} \left(0, 0, 0, \sigma_1(g_1(q))^2 + 2\sigma_2g_1(q)g_2(q) + \sigma_3(g_2(q))^2 \right),$$

где $g(q) = (g_1(q), \dots, g_4(q)) = \Gamma^{-1}(q - q^0)$, а Γ — это 4×4 матрица, составленная из элементов Γ_{ij} , определяемых соотношением $X_j(q^0) = \sum_{i=1}^4 \Gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i} |_{q^0}$, при этом коэффициенты σ_i вычисляются по формулам

$$\sigma_1 = X_1(X_1(g_4))(q^0), \quad \sigma_2 = X_1(X_2(g_4))(q^0), \quad \sigma_3 = X_2(X_2(g_4))(q^0).$$

При такой замене q^0 переходит в начало координат $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$, а векторные поля X_i переходят в поля $\tilde{X}_i = \mathcal{A}_* X_i$, формирующие привилегированный базис.

2. С использованием разложения векторных полей $\tilde{X}_i(\tilde{q})$ в ряд Маклорена строится нильпотентная аппроксимация в координатах \tilde{q} :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \mathbf{u}_1 \hat{X}_1(\tilde{q}) + \mathbf{u}_2 \hat{X}_2(\tilde{q}), \quad \tilde{q} \in \mathbb{R}^4, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2, \\ \hat{X}_i &= \tilde{X}_i^1(\mathbf{0}) \partial_{\tilde{q}_1} + \tilde{X}_i^2(\mathbf{0}) \partial_{\tilde{q}_2} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \tilde{X}_i^3}{\partial \tilde{q}_k}(\mathbf{0}) \tilde{q}_k \partial_{\tilde{q}_3} + \\ &+ \left(\frac{\partial \tilde{X}_i^4}{\partial \tilde{q}_3}(\mathbf{0}) \tilde{q}_3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 \tilde{X}_i^4}{\partial \tilde{q}_k^2}(\mathbf{0}) \tilde{q}_k^2 + \frac{\partial^2 \tilde{X}_i^4}{\partial \tilde{q}_1 \partial \tilde{q}_2}(\mathbf{0}) \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \right) \partial_{\tilde{q}_4}. \end{aligned}$$

3. Вычисляется замена переменных $\Phi : \tilde{q} \rightarrow \bar{q} : \bar{q} = e^{T_4 \tilde{X}_4} \circ \dots \circ e^{T_1 \tilde{X}_1}(\mathbf{0})$, где параметры $T_i \geq 0$ находятся из условия $\tilde{q} = e^{T_4 \tilde{X}_4} \circ \dots \circ e^{T_1 \tilde{X}_1}(\mathbf{0})$, для перехода от привилегированных координат \tilde{q} в координаты \bar{q} , в которых

нильпотентная аппроксимация имеет канонический вид:

$$(10) \quad \begin{cases} \dot{\bar{q}}_1 = \mathbf{u}_1, \\ \dot{\bar{q}}_2 = \mathbf{u}_2, \\ \dot{\bar{q}}_3 = \frac{1}{2}(\bar{q}_1 \mathbf{u}_2 - \bar{q}_2 \mathbf{u}_1), \\ \dot{\bar{q}}_4 = \frac{1}{2}(\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2) \mathbf{u}_2, \end{cases} \quad \bar{q} \in \mathbb{R}^4,$$

т.е. векторные поля \bar{X}_1, \bar{X}_2 имеют вид

$$\bar{X}_1 = \left(1, 0, -\frac{\bar{q}_2}{2}, \frac{\bar{q}_1}{2}\right), \quad \bar{X}_2 = \left(0, 1, 0, \frac{\bar{q}_1^2 + \bar{q}_2^2}{2}\right).$$

Теорема. Для системы (2)–(4) отображение τ имеет вид

$$(11) \quad \begin{aligned} \bar{q}_1 &= x, & \bar{q}_2 &= \theta, & \bar{q}_3 &= \frac{1}{2} x \theta - y, \\ \bar{q}_4 &= \left(l_t \left((l_r^2 + 2) \theta^3 + 6 \theta x (x - l_r) + 6 y (2l_r - x) - 12 l_t^2 (\varphi - \varphi^0 + \theta) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin(\varphi^0) \left(-3x (l_r^2 \theta^2 + 4l_t^2) - 6l_r l_t^2 \theta^2 + x^3 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\varphi^0) \left(l_r \theta \left((l_r^2 + 2) \theta^2 + 2l_t^2 (\theta^2 - 6) + 9x^2 \right) + 12y (l_t^2 - l_r x) \right) \right. \\ &\quad \left. + 3l_t \cos(2\varphi^0) \left(l_r^2 \theta^3 + 2l_r \theta x - 2xy \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3l_t \sin(2\varphi^0) \left(-l_r^2 \theta^2 + l_r \theta (\theta x + 2y) + x^2 \right) - x \sin(3\varphi^0) \left(x^2 - 3l_r^2 \theta^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + l_r \theta \cos(3\varphi^0) \left(l_r^2 \theta^2 - 3x^2 \right) \right) / \left(12 (l_r \cos(\varphi^0) + l_t) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Вычислим коммутаторы

$$X_3 = \left(\sin \theta, -\cos \theta, 0, -\frac{l_r + l_t \cos \varphi}{l_t^2} \right), \quad X_4 = \left(0, 0, 0, -\frac{l_t + l_r \cos \varphi}{l_t^3} \right).$$

Заметим, что в силу (8) система векторных полей \tilde{X}_i образуют в каждой точке базис. Вычислим коэффициенты σ_i :

$$\sigma_1 = -\frac{l_t \cos \varphi^0 \sin \varphi^0}{l_t + l_r \cos \varphi^0}, \quad \sigma_2 = \frac{l_r l_t \sin^2 \varphi^0}{l_t + l_r \cos \varphi^0}, \quad \sigma_3 = l_r l_t \sin \varphi^0.$$

Известно [28], что любые две нильпотентные системы с вектором роста (2, 3, 4) диффеоморфны. Замена переменных, переводящая одну такую систему в другую, строится следующим образом. Пусть \hat{X}_1, \hat{X}_2 — векторные

поля первой, а \bar{X}_1, \bar{X}_2 — векторные поля второй нильпотентной системы с вектором роста $(2, 3, 4)$. Вычислив коммутаторы \hat{X}_3, \hat{X}_4 и \bar{X}_3, \bar{X}_4 , можно построить диффеоморфизм, переводящий поля \hat{X}_i в окрестности точки \hat{q}^0 в поля \bar{X}_i в окрестности \bar{q}^0 :

$$\Phi : O(\hat{q}^0) \rightarrow O(\bar{q}^0), \quad \Phi_*(\hat{X}_i) = \bar{X}_i.$$

Определим отображения F и G как композицию потоков векторных полей \hat{X}_i и \bar{X}_i соответственно за время T_i :

$$\begin{aligned} F(T_1, \dots, T_4) &= e^{T_4 \hat{X}_4} \circ \dots \circ e^{T_1 \hat{X}_1}(\hat{q}^0), \\ G(T_1, \dots, T_4) &= e^{T_4 \bar{X}_4} \circ \dots \circ e^{T_1 \bar{X}_1}(\bar{q}^0). \end{aligned}$$

Тогда искомым диффеоморфизм имеет вид $\Phi = G \circ F^{-1}$.

Применим пункты 2) и 3) алгоритма 1 к точке $q^0 = (0, 0, 0, \varphi^0)$. Прямые вычисления и элементарные упрощения приводят к замене переменных (11) для перехода в канонические привилегированные координаты.

3.2. Поиск корней для нильпотентной задачи

Алгоритм 1 позволяет отыскать приближенное решение задачи 1 как решение нильпотентной субримановой задачи на группе Энгеля, заданной задачей оптимального управления дифференциальной системой (10) с критерием качества — минимумом функционала субримановой длины (7). Эта задача активно исследуется в последние годы [19, 29–32], ее оптимальный синтез описан в [30]. В общем случае задача сведена к решению четырехмерной системы алгебраических уравнений в эллиптических функциях Якоби sn , cn , dn и эллиптических интегралах I и II рода (F и E). Левая часть этой системы определяется из параметризации экстремальных траекторий, заданной с помощью так называемого *экспоненциального* отображения

$$\begin{aligned} \text{Exp}(u_1, u_2, k, \alpha) &= \\ &= (\bar{q}_1(u_1, u_2, k, \alpha), \bar{q}_2(u_1, u_2, k, \alpha), \bar{q}_3(u_1, u_2, k, \alpha), \bar{q}_4(u_1, u_2, k, \alpha)). \end{aligned}$$

Явные выражения вычисляются непосредственно из формул, приведенных в [19]. Правая часть системы определяется конечной точкой $\bar{q}(t_1) = \bar{q}^1 = (\bar{q}_1^1, \bar{q}_2^1, \bar{q}_3^1, \bar{q}_4^1)$. Кроме того, имеющаяся в задаче симметрия растяжения по параметру α позволяет избавиться от него и редуцировать систему до трехмерной. В результате для решения задачи в общем случае $\bar{q}_1^1 \bar{q}_3^1 \neq 0$ необходимо решить трехмерную систему следующего вида:

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\bar{q}_2(u_1, u_2, k, 1)}{\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1)} = \frac{\bar{q}_2^1}{\bar{q}_1^1}, \\ \frac{\bar{q}_3(u_1, u_2, k, 1)}{(\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1))^2} = \frac{\bar{q}_3^1}{(\bar{q}_1^1)^2}, \\ \frac{\bar{q}_4(u_1, u_2, k, 1)}{(\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1))^3} = \frac{\bar{q}_4^1}{(\bar{q}_1^1)^3}. \end{cases}$$

При этом искомый вектор (u_1, u_2, k) единственен и лежит в некотором подмножестве ограниченного множества $(0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, 1)$. Соответствующие подмножества подробно описаны в [30]. Для поиска корня (u_1, u_2, k) системы (12) с фиксированной правой частью использовались различные известные численные методы, такие как метод Ньютона и метод хорд. Так как система (12) задается неэлементарными функциями, то для сходимости стандартных методов необходимы начальные приближения, близкие к искомому корню. Использование стохастических методов в комбинации с мультистартом не дает требуемого эффекта. Поэтому для приближенного решения системы (12) разработан следующий алгоритм.

Алгоритм 2 (гибридный). Рассматривается система алгебраических уравнений $Q(\nu) = Q^1$, имеющая единственное решение $\nu \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ при каждом значении $Q^1 \in \Xi \subset \mathbb{R}^n$. Гибридный алгоритм численного поиска решения с некоторой точностью $\epsilon_e > 0$ и некоторыми константами $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ состоит из следующих шагов:

1. Задаются множества $\Omega_j \subset \Omega$, $j = 0, 1$, каждое из которых состоит из дискретного набора случайных точек ν_i^j , $i = 1, \dots, m_1$.
2. Из каждого множества Ω_j , $j = 0, 1$, выбирается точка, имеющая наименьшую невязку $d_e(\nu) = (Q(\nu) - Q^1)w(Q(\nu) - Q^1)^T$, где $w \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица весовых коэффициентов. Обозначим соответствующие точки: $\nu_j = \arg \min_{\nu_i^j \in \Omega_j} d_e(\nu_i^j)$.
3. На выбранных точках ν_0, ν_1 запускается метод хорд [33] для решения системы $Q(\nu) = Q^1$. Результатом вычисления является точка ν_2 .
4. Для $i = 1, \dots, m_2 - 1$ итеративно запускается метод Ньютона [33] для модифицированной системы $Q(\nu) = \frac{Q^1 + (m_2 - i)Q(\nu_{i+1})}{m_2 - i + 1}$ с начальным приближением $\nu = \nu_{i+1}$. Результатом является точка ν_{i+2} , которая подается в качестве начального приближения для следующей итерации. После выполнения $m_2 - 1$ итераций получается точка ν_{m_2+1} . Если при этом соответствующая невязка достаточно мала $d_e(\nu_{m_2+1}) < \epsilon_e$, то искомый корень найден: $\nu = \nu_{m_2+1}$ является приближенным решением исходной системы $Q(\nu) = Q^1$. Иначе перейдем к п. 1) алгоритма и повторим все шаги заново, пока нужная точность не будет достигнута.

Замечание 5. Алгоритм 2 был реализован в программной системе Wolfram Mathematica для решения системы уравнений (12), при этом выбрана диагональная матрица весовых коэффициентов $w = \text{diag}(\bar{q}_1^1, (\bar{q}_1^1)^2, (\bar{q}_1^1)^3)$. Программа находит вектор $\nu = (u_1, u_2, k)$. При этом возможны два общих случая $\nu \in N_1 \cup N_2$, которые определяют формулы для оптимального управления и соответствующей кривой $\bar{q}(t)$ [19].

3.3. Построение управления для исходной задачи

Итак, предложен алгоритм 1, который позволяет локально свести задачу 1 к нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля. Чтобы построить оптимальное управление в нильпотентной задаче в общем случае используется алгоритм 2 для решения системы алгебраических уравнений (12). Полу-

ченный корень $\nu = (u_1, u_2, k) \in N_c$, $c \in \{1, 2\}$, определяет искомое управление следующим образом:

- вычисляются параметры $p_1 = F(u_1, k)$, $p_2 = F(u_2, k)$ и $\alpha = \frac{\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1) |\bar{q}_1(u_1, u_2, k, 1)|}{\bar{q}_1^+ |\bar{q}_1^-|}$, где F – нормальный эллиптический интеграл Лежандра I рода; параметр k задает модуль эллиптического интеграла;
- параметры t_1 , ϕ_0 определяются с помощью выражений [19]

$$\begin{aligned} c = 1 &\Rightarrow t_1 = \frac{2p_1}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad \phi_0 = \frac{p_2 - p_1}{\sqrt{|\alpha|}}, \\ c = 2 &\Rightarrow t_1 = \frac{2kp_1}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad \phi_0 = \frac{k(p_2 - p_1)}{\sqrt{|\alpha|}}; \end{aligned}$$

- оптимальное управление определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} (13) \quad c = 1 &\Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= -\frac{2k \operatorname{sign} \alpha}{\mu} \operatorname{sn} \left(\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t), k \right) \operatorname{dn} \left(\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t), k \right), \\ \mathbf{u}_2 &= -\operatorname{sign} \alpha \left(1 - 2\operatorname{dn}^2 \left(\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t), k \right) \right); \end{aligned} \\ c = 2 &\Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mp \frac{2 \operatorname{sign} \alpha}{\mu} \operatorname{sn} \left(\frac{\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t)}{k}, k \right) \operatorname{cn} \left(\frac{\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t)}{k}, k \right), \\ \mathbf{u}_2 &= -\operatorname{sign} \alpha \left(1 - 2\operatorname{cn}^2 \left(\frac{\sqrt{|\alpha|}(\phi_0 + t)}{k}, k \right) \right), \end{aligned} \end{aligned}$$

где функции sn , cn и dn суть эллиптический синус, эллиптический косинус и дельта амплитуда.

3.4. Сравнение с оптимальными решениями

Задача 1 в общем случае не решена, однако известны оптимальные (в смысле минимума функционала (7)) управления для парковки робота (без прицепа), см. [34–36]. Соответствующая субриманова задача вкладывается в задачу 1: взяв оптимальные управления $(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t))$, $t \in [0, t_1]$ для робота (без прицепа) и подставив их в систему (2), можно ее численно проинтегрировать при фиксированных значениях φ^0, l_r, l_t и получить траекторию $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, приходящую в точку $q^1 = q(t_1)$. Заметим, что эта траектория будет оптимальна в задаче 1 при $\mu = 1$.

Этот класс оптимальных траекторий был использован для сравнения с найденными в данной работе субоптимальными траекториями, построенными методом нильпотентной аппроксимации. Для этого получившиеся значения $q^1 = (x^1, y^1, \theta^1, \varphi^1)$ подставлялись в формулу (11) для вычисления конечной точки \bar{q}^1 в нильпотентной задаче. С использованием алгоритма 2 находились соответствующие значения корня ν , определяющего искомое управление по формулам (13). Наконец интегрированием системы (2) с полученным управлением вычислялось субоптимальное решение для задачи 1.

Для сравнения полученных решений введем следующую меру близости между конечной точкой и точкой на найденной субоптимальной траектории:

$$d(q(t), q^1) := \left((x(t) - x^1)^2 + (y(t) - y^1)^2 + (\theta(t) - \theta^1)^2 + (\varphi(t) - \varphi^1)^2 + 4l_r^2 \sin^2 \frac{\theta(t) - \theta^1}{2} + 4l_t^2 \sin^2 \frac{\varphi(t) - \varphi^1}{2} \right).$$

Дополнительно будем выбирать конечное время T на субоптимальной траектории

$$(14) \quad T = \arg \min_t d(q(t), q^1).$$

Замечание 6. При выборе натуральной параметризации $\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 \equiv 1$ при $\mu = 1$ имеем $J = t_1$ для оптимального решения и $J = T$ для субоптимального.

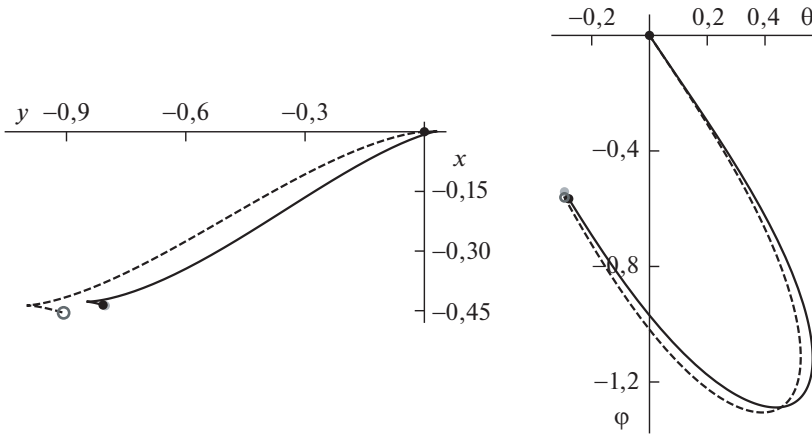


Рис. 2. $q^1 = (-0,90724; -0,45537; -0,29433; -0,5608)$, точность $d(q(T), q^1) = 0,1025$, для оптимального решения $J = 2$ (для субоптимального $J = 1,975927$).

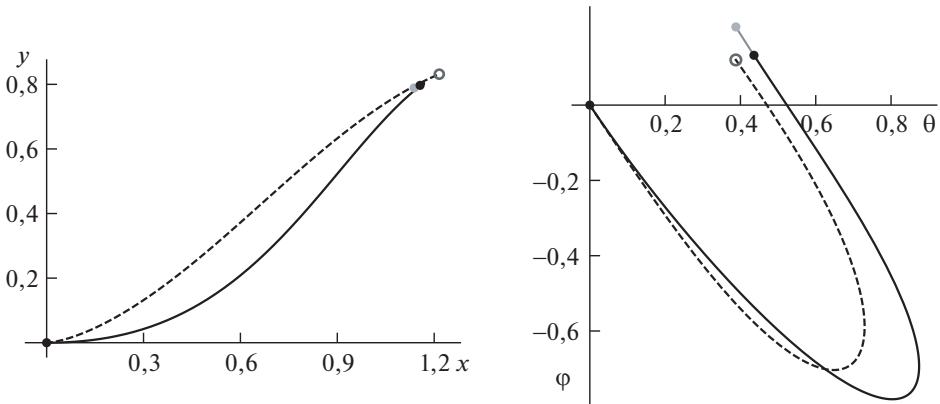


Рис. 3. $q^1 = (1,21571; 0,831468; 0,387799; 0,119918)$, точность $d(q(T), q^1) = 0,08905$, для оптимального решения $J = 2$ (для субоптимального $J = 2,10794$).

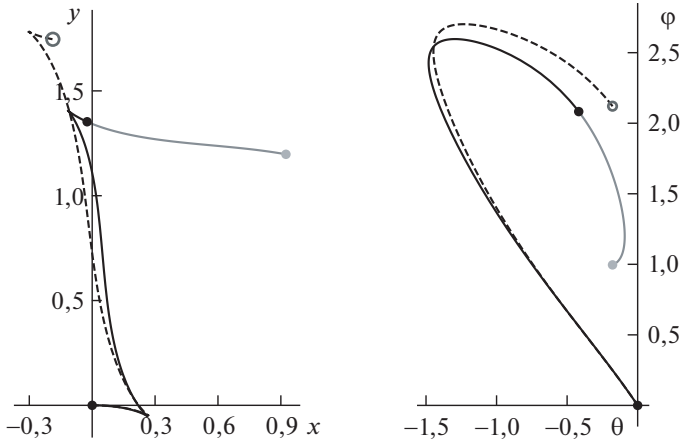


Рис. 4. $q^1 = (-0,18761; 1,74623; -0,178081; 2,12067)$, точность $d(q(T), q^1) = 0,50614$, для оптимального решения $J = 4$ (для субоптимального $J = 3,51347$).

На рис. 2–4 приведено сравнение найденных траекторий: пунктирной линией обозначено оптимальное решение, сплошной линией — субоптимальное, серая окружность малого размера задает конечную точку q^1 , серая точка соответствует исходной конечной точке на субоптимальном решении, черная точка есть $q(T)$, вычисленное по формуле (14). Рисунки 2, 3 с малым временем $t_1 = 2$ показывают достаточно близкое соответствие между оптимальным и субоптимальным решением, однако как видно из рис. 4 при достаточно большом t_1 такое соответствие нарушается. Поэтому возникает необходимость в создании алгоритма глобального решения.

4. Общая схема решения: сведение к серии локальных задач

На основе алгоритма 1, приближенно решающего задачу 1 локально, разработан глобальный алгоритм для общего случая далеких граничных точек q^0, q^1 .

Алгоритм 3. Рассмотрим задачу управления (2)–(5), в которой условие попадания траектории $q(t)$ в конечную точку $q(t_1) = q^1$ заменено на условие попадания в некоторую ϵ -окрестность точки q^1 , т.е. $d(q(t_1), q^1) < \epsilon$.

Пусть $m_3 \in \mathbb{N}$ — некоторая константа, тогда субоптимальное управление рассматриваемой задачи строится следующим образом.

1. Воспользуемся алгоритмом 1 и вычислим точку \bar{q}^1 с помощью формулы (11) для $q = q^1$. С помощью алгоритма 2 находим корень ν^1 системы (12) и по формулам (13) строим управление. Далее, подставив его в систему (2)–(5) и проинтегрировав полученные выражения численно, получаем траекторию $q_0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$ с начальным условием $q_0(0) = q^0$.
2. Если расстояние $d_0 = d(q_0(t_1^0), q^1) < \epsilon$, то траектория $q_0(t)$, $t \in [0, t_1^0]$, доставляет приближенное решение с требуемой точностью. Иначе отрезок $[0, t_1^0]$ делится на m_3 одинаковых частей. После чего последовательно за-

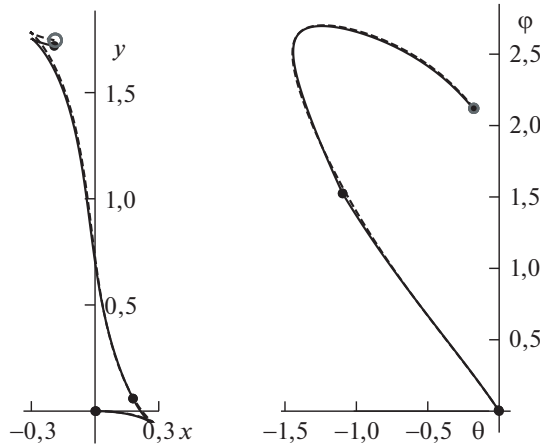


Рис. 5. $q^1 = (-0,18761; 1,74623; -0,178081; 2,12067)$, точность $d(q(t_1), q^1) = 0,02739$, для оптимального решения $J = 4$ (для субоптимального $J = 3,9688$).

пускается вычисление нильпотентных аппроксимаций в точках $q_0 \left(\frac{it_1^0}{m_3} \right)$, $i = 1, \dots, m_3$, как это сделано в первом пункте для точки q^0 . Обозначим соответствующие траектории через $q_i(t)$, $t \in [0, t_1^i]$, для которых выполнено начальное условие $q_i(0) = q_0 \left(\frac{it_1^0}{m_3} \right)$, и соответствующие расстояния через $d_i = d(q_i(t_1^i), q^1)$. Затем выбирается номер $j = \arg \min_{i=0 \dots m_3} d_i$ и процедура, описанная в данном пункте, применяется уже для траектории $q_j(t)$, $t \in [0, t_1^j]$.

На рис. 5 приведен пример улучшения решения с помощью алгоритма 3, черная точка на траектории соответствует некоторой промежуточной точке $q_i(0)$, в которой была вычислена дополнительная аппроксимация. Как видно из рисунка, в этом случае достаточно одной дополнительной итерации, чтобы получить приемлемую близость оптимального и субоптимального решений.

5. Программная реализация и примеры работы алгоритма для парковки

В среде Wolfram Mathematica разработаны программы построения субоптимального управления для приближенного решения задачи 1 на основе нильпотентной аппроксимации. Программы по входным данным l_r , l_t , φ^0 , x^1 , y^1 , θ^1 , φ^1 , ϵ строят функции управления \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 и соответствующую траекторию движения робота с прицепом $q(t)$, выходящую из точки $q^0 = (0, 0, 0, \varphi^0)$ и приходящую в ϵ -окрестность точки $q^1 = (x^1, y^1, \theta^1, \varphi^1)$.

Программа парковки была протестирована для различных конфигураций робота $0 \leq l_r < l_t$. В результате тестирования оказалось, что для большинства тестов программа строит управление, при котором имеет место эффект складного ножа (от англ. jackknifing [37]), означающий столкновение робота с прицепом. На практике такие решения не допустимы, поэтому дополнительно

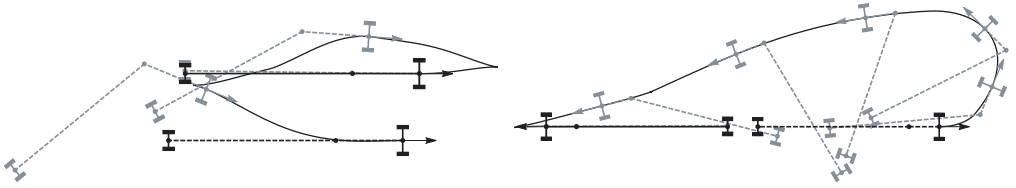


Рис. 6. Пример парковки. Слева: $(l_t, l_r) = (10, 4)$, $x^1 = 1$, $y^1 = 4$, $\theta^1 = \varphi^1 = \varphi^0 = 0$, $\varphi_{\max} = \pi/2$ с $\mu = 0,15$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,061644$. Справа: $(l_t, l_r) = (10, 2)$, $x^1 = -26$, $\theta^1 = \pi$, $y^1 = \varphi^1 = \varphi^0 = 0$, $\varphi_{\max} = 3\pi/4$ с $\mu = 0,05$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,0264575$.

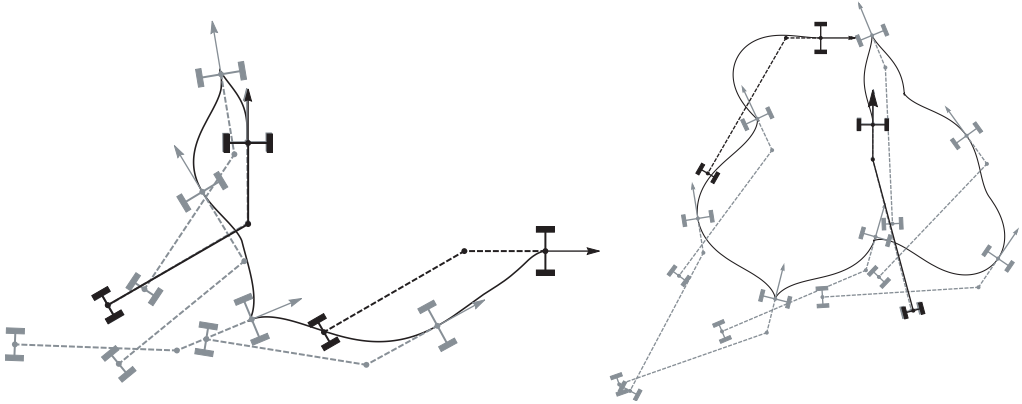


Рис. 7. Пример парковки. Слева: $(l_t, l_r) = (6, 3)$, $x^1 = -11$, $y^1 = 4$, $\theta^1 = \pi/2$, $\varphi^1 = -\pi/3$, $\varphi^0 = \pi/6$, $\varphi_{\max} = 3\pi/4$ с $\mu = 0,5$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,057446$. Справа: $(l_t, l_r) = (9, 2)$, $x^1 = 3$, $y^1 = -5$, $\theta^1 = \pi/2$, $\varphi^1 = \pi/12$, $\varphi^0 = \pi/3$, $\varphi_{\max} = 3\pi/4$ с $\mu = 0,512$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,046904$.

была рассмотрена следующая задача, учитывающая естественное ограничение на угол поворота прицепа.

Задача 2 (с ограничениями). Дана система “робот с прицепом” (2)–(4). Задано следующее ограничение на угол поворота прицепа:

$$(15) \quad |\varphi(t)| \leq \varphi_{\max} < \pi.$$

Требуется найти кривую $q(t) = (x(t), y(t), \theta(t), \varphi(t))$, удовлетворяющую граничным условиям (5) и минимизирующую функционал качества (6).

Для решения задачи 2 использовалась естественная модификация алгоритма 3, в которой соответствующие траектории $q_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, строятся на урезанном интервале $t \in [0, \tilde{t}_1^i]$, $\tilde{t}_1^i \leq t_1^i$, на котором выполнено условие (15). В программной реализации параметр μ считается свободным, его значение подбирается в начале работы программы так, что невязка $d(q_0(t_1^0), q^1)$ имеет наименьшее значение. На рис. 6–8 представлено несколько примеров парковки с помощью разработанной программы. Черным пунктиром обозначено начальное положение робота; требуемое конечное положение обозначено черным сплошным цветом; черная линия соответствует траектории движения

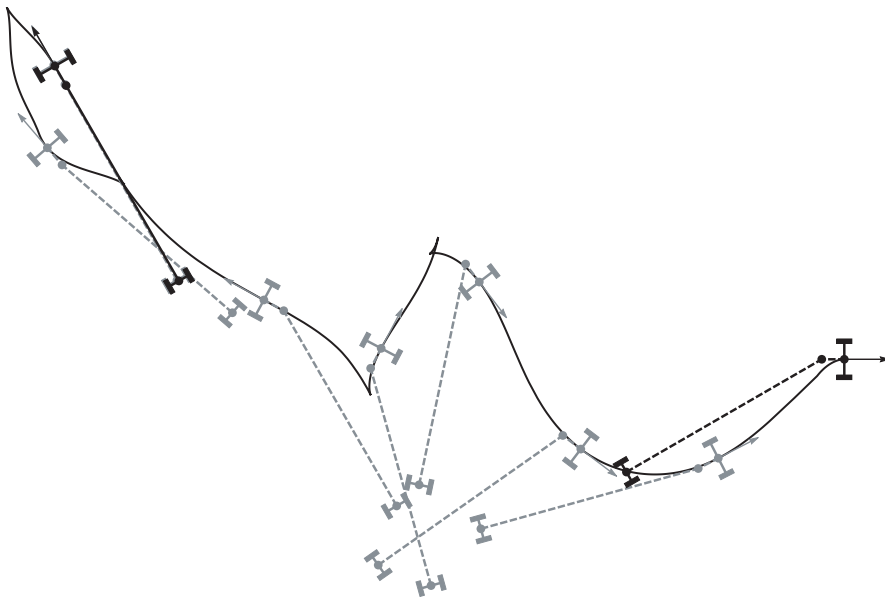


Рис. 8. Пример парковки: $(l_t, l_r) = (10, 1)$, $x^1 = -35$, $y^1 = 13$, $\theta^1 = 2\pi/3$, $\varphi^1 = 0$, $\varphi^0 = \pi/6$, $\varphi_{\max} = 3\pi/4$ с $\mu = 0,5$ и $d(q(t_1), q^1) = 0,042426$.

робота, построенной с помощью программы; серым пунктиром обозначены некоторые промежуточные состояния робота с прицепом вдоль построенной траектории (в том числе конечное состояние). Отметим, что задача 1 до сих пор остается открытой, а существующие методы решения задачи управления (2)–(5) не учитывают критерий оптимальности (6). Сравнение найденных траекторий парковки с траекториями, полученными другими методами, требует отдельного исследования. Известные методы решения [37, 38] задачи управления (2)–(5) нацелены в основном на учет фазовых ограничений в плоскости (x, y) , которые зачастую и определяют искомую траекторию. А именно, в плоскости (x, y) ищется так называемая голономная траектория, соединяющая граничные значения (5) без учета неголономных ограничений, представленных дифференциальной системой (2). Затем на построенной голономной траектории выделяется набор промежуточных значений и с помощью различных локальных методов ищется неголономная траектория, соединяющая близкие друг к другу промежуточные значения. В ситуации общего положения такой подход приводит к решению с большой величиной маневра.

Далее рассматривается частный случай задачи 2, в котором начальное и конечное положение робота совпадают.

6. Тестирование алгоритма перепарковки прицепа

На основе общего алгоритма парковки был разработан специальный алгоритм для перепарковки прицепа, т.е. для случая парковки с условием $x^1 = y^1 = \theta^1 = 0$. Конечная точка для нильпотентной аппроксимации перепар-

ковки в каноническом виде вычисляется по формуле

$$\bar{q}^1 = \left(0, 0, 0, \frac{l_t^3(\varphi^1 - \varphi^0)}{l_t + l_r \cos \varphi^1} \right).$$

Этот случай интересен тем, что для нильпотентной задачи в каждую точку такого вида приходит однопараметрическое семейство оптимальных траекторий (в отличие от ситуации общего положения, в котором существует лишь единственное оптимальное решение) — эластик, имеющих форму восьмерки (лемнискаты Бернулли). Вместе с вариацией по параметру μ в этом случае имеется двухпараметрическое семейство нильпотентных аппроксимаций, среди которых возможно отыскать то решение, которое переводит исходную систему из начального положения в конечное достаточно точно и которое удовлетворяет фазовому ограничению (15). Решение такой задачи с помощью алгоритма 3 находится в виде траектории $q_0(t)$ без рассмотрения траекторий $q_i(t)$, $i = 1, \dots, m_3$.

Заметим, что выбор масштаба позволяет без ограничения общности зафиксировать значение $l_t > 0$ произвольным образом.

В программной системе Wolfram Mathematica разработана программа, которая строит решение задачи перепарковки $q(t)$, $t \in [0, t_1]$ с точностью $d(q(t_1), q^1) < 1/10$ и дополнительным условием на максимальный угол прицепа

$$\max_{t \in [0, t_1]} |\varphi(t)| - \varphi_{\max} < 1/10.$$

Программа для поиска подходящего решения использует стандартные функции программной системы ParametricNDSolveValue и FindMinimum.

Рассмотрен следующий набор тестов. Пусть $l_t = 10$, а $l_r = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, 5$. Зададим максимальный угол $\varphi_{\max} = 3\pi/4$, а также сетку для угла прицепа

$$\varphi^0, \varphi^1 \in \Phi = \{\pi i/12 \mid i \in \{-6, \dots, 6\}\}, \quad \varphi^0 \neq \varphi^1.$$

Обозначим траекторию, которую строит программа по параметрам $l_r, \varphi^0, \varphi^1$, через

$$q_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t), \quad t \in [0, t_1]$$

(формально значение t_1 также зависит от $l_r, \varphi^0, \varphi^1$, далее будем это подразумевать).

Определим максимальную погрешность

$$d_{\Phi}(l_r) = \max_{\varphi^0, \varphi^1 \in \Phi} d(q_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t_1), q^1),$$

а также максимальное отклонение от максимального угла:

$$\max_{\Phi}(l_r) = \max_{\varphi^0, \varphi^1 \in \Phi} \left(\max_{t \in [0, t_1]} |\varphi_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t)| - \varphi_{\max} \right),$$

где $\varphi_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t)$ — соответствующая компонента траектории $q_{(l_r, \varphi^0, \varphi^1)}(t)$.

Тестирование перепарковки прицепа

l_r	0	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4	9/2	5
d_Φ	0,027	0,028	0,027	0,03	0,078	0,03	0,026	0,03	0,038	0,071	0,058
\max_Φ	0	0	0	0	0	0	0	0	0,059	0,085	0,038

В таблице приведены результаты тестирования в виде максимальной погрешности и максимального отклонения от φ_{\max} .

Проведенное тестирование показало, что при любых $l_t > 2l_r$ и $\varphi^0, \varphi^1 \in [-\pi/2, \pi/2]$ найдется нильпотентная аппроксимация, позволяющая перевести робота со связкой (l_t, l_r) из состояния $(0, 0, 0, \varphi^0)$ в состояние $(0, 0, 0, \varphi^1)$ с погрешностью $d_\Phi(l_r) < 1/10$ и максимальным абсолютным значением угла поворота прицепа $3\pi/4 + 1/10$. Для конкретных значений (l_t, l_r) , которые вычисляются из реальной модели робота, можно разработать более точный специализированный алгоритм перепарковки.

Известно решение для субримановой задачи, описывающей оптимальное управление роботом без прицепа [34–36]. Соответствующая субриманова длина доставляет нижнюю грань для субримановой длины (7) в задаче, рассматриваемой в данной работе. При этом случай перепарковки позволяет описать верхнюю грань для субримановой длины (7), что поможет при дальнейшем анализе рассматриваемой задачи.

7. Заключение

В данной работе рассмотрена задача управления мобильным роботом с прицепом, движущимся по плоскости. Получены следующие основные новые результаты:

- предложен алгоритм построения нильпотентной аппроксимации для системы “робот с прицепом” в канонических координатах (алгоритм 1);
- в явном виде найдена замена переменных, приводящая нильпотентную аппроксимацию к каноническому виду (теорема); при этом замена оптимального управления нильпотентной аппроксимацией системы “робот с прицепом” сводится к нильпотентной задаче на группе Энгеля;
- разработан гибридный алгоритм и программа решения системы алгебраических уравнений, определяющие оптимальное управление в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля (алгоритм 2);
- разработан алгоритм и программа глобального решения задачи парковки робота с прицепом без ограничений на фазовые переменные (алгоритм 3);
- на основе разработанных алгоритмов созданы специализированный алгоритм и программа перепарковки, решающие частный случай задачи и учитывающие фазовое ограничение на угол поворота прицепа.

Для поиска оптимального управления в нильпотентной субримановой задаче используется алгоритм 2 для решения системы из трех уравнений, зависящих от эллиптических интегралов первого и второго рода. Следует отметить, что при введении фазовых ограничений на угол прицепа, могут возникнуть случаи, когда глобальный алгоритм 3, модифицированный для решения

задачи 2 с ограничением, требует слишком много итераций. Для устранения этой проблемы перспективным направлением представляется разработка алгоритма, использующего нильпотентную аппроксимацию в субримановом случае только для перепарковки прицепа: сначала робот с прицепом переводится в конечное положение без учета прицепа при движении только вперед (например, вдоль пути машины Дубинса, состоящего из комбинации дуг окружностей и отрезков прямых [39], либо вдоль элаستيку Эйлера [40]), а затем переводит прицеп в нужное положение с помощью алгоритма перепарковки. В дальнейшем планируется сравнение предложенных алгоритмов согласно критерию (6) и апробация разработанных программ для управления реальной моделью робота в рамках решения задачи 2 с ограничением на угол поворота прицепа исходя из конкретной модели робота.

В данной статье подразумевается, что у робота есть возможность задавать произвольную скорость приводных колес и соответственно свою линейную и угловую скорость. Математическая модель, учитывающая ограничение на скорости колес робота естественным образом приводит к понятию субфинслеровой структуры на M . Соответствующая субфинслерова задача по определению задается системой (2)–(5) с минимизацией времени $t_1 \rightarrow \min$ (или длины траектории на плоскости (x, y)) и ограничением управления на некоторое выпуклое множество $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ [41]. Заметим, что рассматриваемая задача 1 эквивалентна субфинслеровой задаче при $\Omega = \Omega_\mu := \{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{u}_1^2 + \mu^2 \mathbf{u}_2^2 \leq 1\}$. В общем субфинслеровом случае множество Ω определяется исходя из конкретной модели, например случай, когда Ω есть выпуклый многоугольник (четырёхугольник), представляет собой важный подкласс субфинслеровых задач, в котором оптимальное управление, как правило, кусочно-постоянно.

В завершение отметим, что предложенные алгоритм 1 и теорему можно использовать не только для приближения субримановых задач, т.е. задач без ограничения на управление и с минимизацией субримановой длины (7), но и для более общего класса субфинслеровых задач.

Авторы благодарны проф. Ю.Л. Сачкову за ценные замечания и поддержку на протяжении всего исследования задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть M — гладкое многообразие размерности $\dim M = n$.

Обозначим через $T_q M$ касательное пространство к M в точке $q \in M$.

Пусть на M задано семейство $\mathcal{F} = \{X_1, X_2\}$ из двух гладких векторных полей $X_1, X_2 \in \text{Vec}(M)$, удовлетворяющих условию полного ранга, т.е. для которых выполнено

$$\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q M, \quad \forall q \in M,$$

где $\text{Lie}_q \mathcal{F}$ обозначает алгебру Ли, порождаемую системой \mathcal{F} в точке q

$$\begin{aligned} \text{Lie}_q \mathcal{F} = \text{span}(X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q), \dots \\ \dots, [X_i, [\dots, [X_1, X_2] \dots]](q) \mid X_i \in \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Здесь квадратные скобки обозначают коммутатор (скобку Ли) векторных полей

$$[X_1, X_2](q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(e^{-\sqrt{t}X_2} \circ e^{-\sqrt{t}X_1} \circ e^{\sqrt{t}X_2} \circ e^{\sqrt{t}X_1}(q) \right) \in \text{Vec}(M),$$

где через $e^{tX_i}(q)$ обозначен поток векторного поля $X_i \in \text{Vec}(M)$ из точки $q \in M$ за время t , т.е. решение задачи Коши $\dot{\gamma}(t) = X_i(\gamma(t))$, $\gamma(0) = q$.

Обозначим через $\mathbf{L}^s(q)$, $s \in \mathbb{N}$, векторные пространства, порождаемые значениями в точке q скобок Ли полей X_1, X_2 длины $\leq s$, (сами поля X_i — скобки длины 1):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^1(q) &= \text{span}(X_1(q), X_2(q)), \\ \mathbf{L}^2(q) &= \text{span}(\mathbf{L}^1(q) + [\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^1](q)), \\ &\dots \\ \mathbf{L}^s(q) &= \text{span}(\mathbf{L}^{s-1}(q) + [\mathbf{L}^1, \mathbf{L}^{s-1}](q)). \end{aligned}$$

Условие полного ранга гарантирует, что для любой точки $q \in M$ существует наименьшее целое число $r = r(q)$ такое, что $\dim \mathbf{L}^r(q) = n$. Другими словами, система \mathcal{F} задает распределение в касательном пространстве с флагом

$$(P.1) \quad \mathbf{L}^1(q) \subseteq \mathbf{L}^2(q) \subseteq \dots \subseteq \mathbf{L}^{r-1}(q) \subset \mathbf{L}^r(q) = T_q M.$$

Определение 1. Вектором роста системы \mathcal{F} в точке q называется вектор

$$(\dim \mathbf{L}^1(q), \dots, \dim \mathbf{L}^r(q)).$$

Зафиксируем размерность $\dim M = 4$ и рассмотрим управляемую систему

$$(P.2) \quad \dot{q} = \mathbf{u}_1 X_1(q) + \mathbf{u}_2 X_2(q),$$

где траектория $q = q(t) \in M$, $t \geq 0$ — кусочно-гладкая кривая, управления $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ — вещественнозначные кусочно-непрерывные функции, а гладкие векторные поля $X_1, X_2 \in \text{Vec}(M)$ образуют систему с вектором роста (2, 3, 4):

$$\text{span}(X_1(q), X_2(q), [X_1, X_2](q), [X_1, [X_1, X_2]](q)) = T_q M, \quad \forall q \in M.$$

Далее для системы (P.2) будет описана конструкция нильпотентной аппроксимации — в некотором смысле простейшей системы с вектором роста (2, 3, 4), траектории которой локально приближают траектории исходной системы. Под простейшей понимается следующее свойство: векторные поля приближенной системы образуют нильпотентную алгебру Ли, все скобки Ли которой обнуляются начиная с третьего порядка. Такая приближенная система наиболее легко строится в специальных координатах, описывающих перемещение системы в направлениях базовых векторных полей и их коммутаторов — так называемых привилегированных координатах. Перед описанием самой конструкции введем несколько определений, см. подробнее в [27].

Определение 2. Заменой координат для системы (П.2) называется диффеоморфизм $\sigma : M \rightarrow M : q \mapsto \sigma(q)$. Дифференциал этой замены обозначим через $\sigma_* : T_q M \rightarrow T_{\sigma(q)} M : X_i \mapsto \sigma_*(X_i)$, $i = 1, \dots, 4$.

Определение 3. Для системы (П.2) порядком дифференциального оператора X в точке q^0 называется такое минимальное число $s \in \mathbb{N}$, что для любой функции σ , имеющей порядок $p = \min \{p \in \mathbb{N} \mid X_{k_1} \dots X_{k_p}(\sigma)(q^0) = 0, k_j \in \{1, 2\}\}$, все производные порядка $s + p$ вдоль полей X_1, X_2 от $X(\sigma)$ обнуляются в этой точке:

$$X_{k_1} \dots X_{k_{s+p}} X(\sigma)(q^0) = 0, \quad k_j \in \{1, 2\}.$$

Определение 4. Система локальных координат $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_4)$ на M с центром в точке q^0 , определяемая заменой $(\tilde{q}_1(q), \dots, \tilde{q}_4(q)) = (\sigma_1(q), \dots, \sigma_4(q))$, называется линейно адаптированной в точке q^0 , если дифференциалы $d\tilde{q}_1, \dots, d\tilde{q}_4$ образуют базис $T_{q^0}^* M$, адаптированный к флагу $\{0\} = \mathbf{L}^0(q^0) \subset \mathbf{L}^1(q^0) \subset \mathbf{L}^2(q^0) \subset \mathbf{L}^3(q^0)$, т.е. $\mathbf{L}^i(q^0) = \text{span}(\frac{\partial}{\partial \tilde{q}_1}|_{q^0}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_i}|_{q^0})$, $i = 1, 2, 3$. При этом порядком координаты \tilde{q}_i в точке q^0 называется минимальное число $p \in \mathbb{N}$, такое что все производные порядка p вдоль полей X_{k_j} от σ_i обнуляются в этой точке: $X_{k_1} \dots X_{k_p}(\sigma_i)(q^0) = 0$, $k_j \in \{1, 2\}$, где $X_{k_j}(f) = \langle \nabla f, X_{k_j} \rangle$ обозначает производную функции f по направлению поля X_{k_j} , оператор \langle, \rangle — скалярное произведение, а ∇ — взятие градиента.

Определение 5. Для системы (П.2), записанной в линейно адаптированных координатах \tilde{q} , весом координаты \tilde{q}_i называется наименьшее число $\omega_i \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbf{L}^{\omega_i}(q^0)$ не обнуляется тождественно.

Определение 6. Система локальных координат $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_4)$ с центром в точке q^0 называется привилегированной для системы (П.2), если выполнено

- $(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_4)$ линейно адаптированы в точке q^0 ;
- порядок координаты \tilde{q}_i в точке q^0 равен весу ω_i .

Теперь, когда даны все необходимые определения, опишем конструкцию нильпотентной аппроксимации. Нильпотентная аппроксимация для системы (П.2) строится в пространстве \mathbb{R}^4 следующим образом:

1) система (П.2) записывается в привилегированных координатах \tilde{q}

$$(П.3) \quad \dot{\tilde{q}} = \mathbf{u}_1 X_1(\tilde{q}) + \mathbf{u}_2 X_2(\tilde{q}), \quad \tilde{q} \in M, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2;$$

2) векторные поля $X_i(\tilde{q})$ раскладываются в ряд Маклорена с последующей группировкой слагаемых одинакового порядка

$$X_i(\tilde{q}) = X_i^{(-1)}(\tilde{q}) + X_i^{(0)}(\tilde{q}) + X_i^{(1)}(\tilde{q}) + X_i^{(2)}(\tilde{q}) + \dots;$$

3) отбрасываются слагаемые начиная с нулевого порядка, и оставшиеся слагаемые порядка -1 формируют базисные векторные поля $\widehat{X}_i(\tilde{q}) = X_i^{(-1)}(\tilde{q})$ приближенной системы — нильпотентной аппроксимации

$$(П.4) \quad \dot{\hat{q}} = \mathbf{u}_1 \widehat{X}_1(\hat{q}) + \mathbf{u}_2 \widehat{X}_2(\hat{q}), \quad \hat{q} \in \mathbb{R}^4, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Нильпотентная аппроксимация (П.4) для исходной системы (П.3) обладает следующими ключевыми свойствами:

- 1) все коммутаторы порядка ≥ 3 векторных полей $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2$ равны нулю;
- 2) вектор роста системы (П.4) равен $(2, 3, 4)$;
- 3) под действием управлений $\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)$ траектория $\hat{q}(t)$ системы (П.4) локально (при малых $t > 0$) приближает траекторию $\tilde{q}(t)$ системы (П.3).

В главе 8 книги Р. Монтогомери [21] объясняется связь между исходной системой и ее нильпотентизацией (нильпотентной аппроксимацией), она дана теоремой Громова–Митчелла (8.4.1). Оценка на близость траекторий приведена в разделе 8.7. Более детально с конструкцией нильпотентной аппроксимации можно познакомиться в работе Беллаиша [25]. Раздел 7 посвящен оценкам на расстояния, в частности см. Утверждение 7.29 о близости траекторий исходной и приближающей систем.

Замечание 7. В общем случае $\dim M = n$, для исходной $\tilde{q}(t) = (\tilde{q}_1(t), \dots, \tilde{q}_n(t))$ и приближающей траекторий $\hat{q}(t) = (\hat{q}_1(t), \dots, \hat{q}_n(t))$ в привилегированных координатах, выходящих из одной точки, выполнена локальная оценка $|\tilde{q}_i(t) - \hat{q}_i(t)| \leq Ct^{w_i+1}$, где C — константа, w_i — вес координаты \tilde{q}_i (степень неголономности в направлении \tilde{q}_i , которая вычисляется как наименьшая глубина флага распределения (П.1), не обнуляющая i -е направление).

В данной работе для траекторий $\tilde{q}(t)$ и $\hat{q}(t)$ систем (П.3) и (П.4) выполнена оценка

$$|\tilde{q}_i(t) - \hat{q}_i(t)| \leq Ct^{w_i+1}, \quad w = (1, 1, 2, 3),$$

где C — константа, определяемая видом векторных полей X_i и начальной точкой q^0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Laumond J.-P.* Nonholonomic Motion Planning for Mobile Robots. Tutorial notes. LAAS-CNRS. Toulouse, 1998.
2. *Ardentov A.A.* Controlling of a Mobile Robot with a Trailer and Its Nilpotent Approximation // Regular. Chaot. Dynam. 2016. V. 21. No. 7–8. P. 775–791.
3. *Маштаков А.П.* Алгоритмическое и программное обеспечение решения конструктивной задачи управления неголономными пятимерными системами // Программные системы: теория и приложения. 2012. Т. 3. № 1(10). С. 3–29.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
5. *Chitour Y., Jean F., Long R.* A Global Steering Method for Nonholonomic Systems // J. Differ. Equat. 2013. V. 254. P. 1903–1956.
6. *Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N.* Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
7. *Murray R.M., Sastry S.* Steering Nonholonomic Systems Using Sinusoids // IEEE Int. Conf. on Decision and Control. 1990. P. 2097–2101.
8. *Murray R.M.* Robotic Control and Nonholonomic Motion Planning // PhD Thesis. Memorandum No. UCB/ERL M90/117. University of California. Berkeley. 1990.
9. *Tilbury D., Murray R., Sastry S.* Trajectory Generation for the n-Trailer Problem Using Goursat Normal Form // IEEE TAC. 1995. V. 40. No. 5. P. 802–819.

10. Monaco S., Norman-Cyrot D. On Carnot-Carathéodory Metrics // J. Differ. Geometry. 1985. V. 21. P. 35–45.
11. Murray R.M. Nilpotent Bases for a Class on Nonintegrable Distributions with Applications to Trajectory Generation for Nonholonomic Systems // Math. Control Signal Syst. University of California. Berkeley, 1990.
12. Venditelli M., Oriolo G., Jea F., Laumond J.P. Nonhomogeneous Nilpotent Approximations for Nonholonomic Systems with Singularities // Transact. Autom. Control. 2004. V. 49. No. 2. P. 261–266.
13. Fernandes C., Gurvits L., Li Z.X. A Variational Approach to Optimal Nonholonomic Motion Planning // IEEE ICRA. Sacramento. 1991. P. 680–685.
14. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
15. Duits R., Meesters S.P.L., Mirebeau J.M., Portegies J.M. Optimal Paths for Variants of the 2D and 3D Reeds-Shepp Car with Applications in Image Analysis // J. Math. Imaging and Vision. 2018. V. 60. No. 6. P. 816–848.
16. Lafferriere G., Sussmann H.J. A Differential Geometric Approach to Motion Planning. Nonholonomic Motion Planning. 1992. Editors: Zexiang Li, J.F. Canny.
17. Bellaïche A., Laumond J. P., Chyba M. Canonical Nilpotent Approximation of Control Systems: Application to Nonholonomic Motion Planning. 32nd IEEE CDC. 1993.
18. Bellaïche A., Laumond J.P., Riser J.J. Nilpotent Infinitesimal Approximations to a Control Lie Algebra // IFAC NCSDS. Bordeaux. 1992. P. 174–181.
19. Ардентов А.А., Сачков Ю.Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 11. С. 31–54.
20. Сачков Ю.Л. Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. М.: Физматлит, 2007.
21. Montgomery R. A Tour of Sub-Riemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. Vol. 91 of Mathematical Surveys and Monographs. 2002.
22. Stefani G. Polynomial Approximations to Control Systems and Local Controllability // Proc. 24th. I.E.E.E. Conference on Decision and Control. Ft. Lauderdale. Fla. 1985. P. 33–38.
23. Аграчев А.А., Сарычев А.В. Фильтрация алгебры Ли векторных полей и нильпотентная аппроксимация управляемых систем // ДАН СССР. 1987. Т. 295. С. 777–781.
24. Hermes H. Nilpotent and High-Order Approximations of Vector Fields Systems // SIAM. 1991. V. 33. P. 238–264.
25. Bellaïche A. The Tangent Space in Sub-Riemannian Geometry // Sub-Riemannian Geometry. Birkhauser. Basel. P. 1–78.
26. Gromov, M. (avec J. Lafontaine, P. Pansu), Structures métriques pour les variétés riemanniennes / Textes Mathématiques. Paris: CEDIC/Fernand Nathan. 1981.
27. Jean F. Control of Nonholonomic Systems: from Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning. Springer, 2014.
28. Sachkov Yu.L. Symmetries of Flat Rank Two Distributions and Sub-Riemannian Structures // Transact. Amer. Math. Soc. 2004. V. 356. P. 457–494.
29. Ardentov A.A., Sachkov Yu.L. Conjugate Points in Nilpotent Sub-Riemannian Problem on the Engel Group // JMS. 2013. V. 195. No. 3. P. 369–390.
30. Ardentov A.A., Sachkov Yu.L. Cut Time in Sub-Riemannian Problem on Engel Group // ESAIM: COCV. 2015. V. 21. No. 4. P. 958–988.

31. *Ardentov A.A., Sachkov Yu.L.* Maxwell Strata and Cut Locus in Sub-Riemannian Problem on Engel Group // RCD. 2017. V. 22. No. 8. P. 909–936.
32. *Ардентов А.А., Сачков Ю.Л.* Множество разреза в субримановой задаче на группе Энгеля // ДАН. 2018. Т. 478. № 6. С. 623–626.
33. *Уиттекер Ю.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. М.: УРСС, 2002.
34. *Moiseev I., Sachkov Yu.L.* Maxwell Strata in Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of a Plane // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2010. V. 16. P. 380–399.
35. *Sachkov Yu.L.* Conjugate and Cut Time in the Sub-Riemannian Problem on the Group of Motions of a Plane // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2010. V. 16. P. 1018–1039.
36. *Sachkov Yu.L.* Cut Locus and Optimal Synthesis in the Sub-Riemannian Problem on the Group Of Motions of a Plane // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2011. V. 17. P. 293–321.
37. *David J., Manivannan P.V.* Control of Truck-Trailer Mobile Robots: A Survey // Intelligent Service Robotics. 2014. V. 7. No. 4. P. 245–258.
38. *Lamirault F., Sekhavat S., Laumond J.-P.* Motion Planning and Control for Hilare Pulling a Trailer // IEEE Transact. Robot. Autom. 1999. V. 15. No. 4. P. 640–652.
39. *Dubins L.E.* On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents // Amer. J. Math. 1957. V. 79. No. 3. P. 497–516.
40. *Ardentov A.A., Karavaev Y.L., Yefremov K.S.* Euler Elastics for Optimal Control of the Motion of Mobile Wheeled Robots: the Problem of Experimental Realization // RCD. 2019. V. 24. No. 3. P. 312–328.
41. *Локуцевский Л.В.* Выпуклая тригонометрия с приложениями к субфинслеровской геометрии // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 8. С. 120–148.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 13.10.2019

После доработки 14.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020