Автоматика и телемеханика, № 1, 2021

© 2021 г. С.А. ВАВИЛОВ, д-р физ.-мат. наук (savavilov@inbox.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ОБ АДАПТИВНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ПОЛЯ

Рассматривается построение адаптивного алгоритма решения краевой задачи, обеспечивающей попадание траектории, выпущенной из некоторой точки, в мишень конечного размера на заданный момент времени, в условиях частичной неопределенности возмущающего поля. Несмотря на то, что некоторая составляющая возмущающего поля неизвестна в явном виде, но существенна для обеспечения попадания в мишень заданного размера, при выполнении ряда условий, построена итерационная процедура решения поставленной задачи за конечное число шагов. Алгоритм основан на использовании пробных траекторий, допускающих в качестве обратной связи измерение их отклонений от центра мишени, что оказывается достаточным для компенсации неполноты информации относительно внешнего поля возмущений.

Ключевые слова: адаптивное управление, двухточечные краевые задачи, условия неопределенности, дифференциальные уравнения.

DOI: 10.31857/S0005231021010062

1. Введение

Примерами адаптивного подхода к решению двухточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) могут служить метод пристрелки [1], а также использование таблиц стрельбы в рамках методологии решения задач внешней баллистики (ЗВБ) [2, 3], когда некоторая составляющая внешнего поля, влияющая на изменение траектории движения и существенная для обеспечения требуемой точности, не поддается точному описанию. В этом случае отсутствие указанной информации пытаются компенсировать использованием "пробных траекторий", когда, исходя из отклонений траекторий, отвечающих всему внешнему полю, ставят вопрос о решении некоторой двухточечной краевой задачи, не прибегая при этом к восстановлению явной структуры всего существенного поля, воздействующего на траекторию движения, а лишь используя определенную модель с неизвестными коэффициентами, подлежащими определению опытным путем. Приведенные соображения лежат в основе полуэмпирических таблиц стрельбы, широко используемых в теории и практике науки о внешней баллистике [4, 5]. Слово "полуэмпирический" в их названии подчеркивает тот факт, что указанные таблицы не претендуют на построение математически строго обоснованных конечносходящихся алгоритмов (КСА) [6], отвечающих решению ЗВБ, а лишь только "подсказывают" рекомендуемую последовательность действий, разработанных частично эмпирическим путем и доказавших свою эффективность на практике. Понятно, что такой подход имеет изъяны не только с теоретической, но и практической точки зрения. В частности, подобные таблицы жестко привязаны к конкретным внешним условиям, что существенно ограничивает географию их применения. Кроме того, наличие большого количества учитываемых в таблицах факторов, вызванных стремлением увеличить точность попадания, может привести к тому, что возможные ошибки в определении параметров одного из них, становятся по своей значимости сопоставимыми с влиянием непосредственно других факторов на траекторию движения. В связи с вышесказанным возникает обоснованное стремление сформулировать и математически строго обосновать, при выполнении определенных условий, КСА решения ЗВБ, адаптированный применительно к широкому классу неизвестных внешних возмущений и не требующий детальной априорной информации о структуре возмущающего поля. Исследованию обозначенной проблемы в рамках определенных, наложенных ниже ограничений, посвящена данная статья.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему ОДУ

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \tag{1}$$

где $x = \begin{pmatrix} r \\ v \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Здесь r имеет смысл координаты, а v – скорости материальной точки, в то время как функция $F(x)$ определяет ее ускорение, при этом предполагается, что $F(x) \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$. Относительно (1) поставим следующую краевую задачу:

$$r(0) = 0, \quad r(T) \in R_c, \tag{2}$$

где величина T задана, R_c представляет собой шар с центром в точке r_c и радиусом d, определяемый нормой вектора b с элементами $(b_1, \dots, b_n)$:

$$\|b\|_1 = \max_i |b_i|.$$

Кроме того, в дальнейшем будет использоваться согласованная с ней норма матрицы A:

$$\|\|A\|\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

где a_{ij} – элементы матрицы $A[n \times n]$.

Наряду с (1) рассмотрим “укороченное” уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F_0(x), \tag{3}$$

где F_0 отвечает явно заданной части внешнего поля, предполагается, что $F_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^{2n})$, остальная часть поля $F - F_0$ является "малой" в определенном далее смысле и, вообще говоря, не известна в явном виде, хотя относительно нее существует некоторая приведенная ниже оценка сверху.

Для уравнения (3) поставим следующую краевую задачу:

$$r(0) = 0, \quad r(T) = r_c. \tag{4}$$

Предположим, что задача (3), (4) разрешима, и обозначим через $\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{r}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix}$ одно из ее решений. Введем в рассмотрение вектор $y(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$, положим $y(t) = \begin{pmatrix} \delta r(t) \\ \delta v(t) \end{pmatrix}$, $\delta r \in \mathbb{R}^n$, $\delta v \in \mathbb{R}^n$ и запишем вместо (1) уравнение в вариациях

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varepsilon f(t, y), \tag{5}$$

где матрица $A(t)[n \times n]$, определяемая зависимостью $A(t) = \frac{\partial F_0}{\partial x}(\tilde{x}(t))$, представляет собой матрицу Якоби, вычисленную на траектории решения задачи (3), (4), и является непрерывной в силу указанной выше гладкости функции F_0, вектор-функция $f(t, y) = F(\tilde{x}(t) + y) - F_0(\tilde{x}(t)) - A(t)y$ непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по y в силу предположенной выше гладкости функций $F_0(x)$ и $F(x)$, при этом $f(t, y)$, вообще говоря, не обязательно должна допускать представление в явном виде, ε – малый параметр, характеризующий малость поля $f(t, y)$ в малой окрестности траектории $\tilde{x}(t)$. Соответственно задача (2) для уравнения (5) перепишется следующим образом:

$$\delta r(0) = 0, \quad \delta r(T) \in R_0, \tag{6}$$

где R_0 – шар в норме $\| \cdot \|_1$ с центром в нуле и диаметром $d = O(\varepsilon^\gamma)$, $\gamma \geqslant 1$. Смысл последнего условия относительно d означает, что размер мишени может быть величиной сколь угодно большого порядка малости относительно величины отклонения траектории от центра мишени под воздействием неизвестной составляющей возмущающего поля.

Используя метод вариации произвольных постоянных, введем в рассмотрение функцию $z(t)$ исходя из соотношения $y(t) = B(t)z(t)$, где $B(t)$ – матрица фундаментальных решений линейной части системы (5), отвечающей $\varepsilon = 0$, при этом $B(0) = E$, где E – единичная матрица. Таким образом, относительно $z(t)$ получим уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon B^{-1}(t) f(t, B(t)z(t)) = \varepsilon g(t, z), \tag{7}$$

где

$$z(t) = \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}^n, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad g(t, z)$$

— введенное для краткости обозначение, при этом матрица фундаментальных решений имеет структуру

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ B_3(t) & B_4(t) \end{pmatrix},$$

где каждая из матриц $B_i(t)$ имеет размерность $[n \times n]$. Соответственно, задача (2) для уравнения (7) примет следующий вид:

$$p(0) = 0, \quad B_1(T)p(T) + B_2(T)q(T) \in R_0. \tag{8}$$

Дополнительно потребуем существования матрицы $B_2^{-1}(T)$ и справедливости оценки

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial z_j} \right| \leqslant K(t), \tag{9}$$

где $K(t)$ – известная непрерывная функция. Кроме того, введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$\delta z(t) = z(t) - z(0), \quad \delta p(t) = p(t) - p(0), \quad \delta q(t) = q(t) - q(0), \tag{10}$$

при этом $p(0) \equiv 0$ и в дальнейшем для удобства будем обозначать $q(0)$ через q_0. Таким образом, окончательно исходная задача (1), (2) сводится к следующей: требуется выяснить условия существования КСА решения задачи (7), (8) для всех достаточно малых ε на основе измерений отклонения траектории системы (5), а именно вектора δr от нулевой точки на момент времени T.

Наряду с основной задачей (8) рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$p(0) = 0, \quad B_1(T)p(T) + B_2(T)q(T) = 0 \tag{11}$$

для уравнения (7), при этом имеет место

Теорема 1. Для всех достаточно малых ε решение задачи (7), (11) *существует и единственно.*

Основной результат данной работы использует утверждение теоремы 1, доказательство которой приводится в Приложении.

3. Основной результат

Введем в рассмотрение следующий итерационный процесс:

$$q_0^{k+1} = q_0^k - B_2^{-1}(T)\delta r(T)\Big|_{q_0^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

при этом $q_0^0 = 0$, $\delta r(T)\Big|_{q_0^k}$ обозначает значение величины δr, отвечающей начальной скорости q_0^k и вычисленной на момент времени T.

Т е о р е м а 2. Для всех достаточно малых ε итерационный процесс (12) *является КСА решения задачи* (7), (8) *при $d = O(\varepsilon^N)$, где $N > 1$ – любое конечное число.*

Доказательство теоремы 2 дано в Приложении.

Таким образом, алгоритм (12) заключается в осуществлении процедуры перенацеливания, т.е. выбора на каждом последующем шаге скорректированной начальной скорости по результатам измерения отклонения пробной траектории на момент времени T от центра мишени, отвечающей значению начальной скорости на предыдущем шаге.

4. Иллюстрирующий пример

Рассмотрим пример возмущенной системы, отвечающей (1), но уже записанной в квазилинейной форме

$$\dot{x} = Ax + b + \varepsilon f(x), \tag{13}$$

где

$$x = (r_1, r_2, v_1, v_2)^T, \quad b = (0, 0, 0, -g)^T, \quad g = 10, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = \left(0, 0, -\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,v_1, -\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,v_2\right).$$

Поставим для (13) краевую задачу, соответствующую (4):

$$r_1(0) = r_2(0) = 0, \quad r_{c1} = 12000, \quad r_{c2} = 4500, \quad T = 30. \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что решение задачи (13), (14) при отсутствии возмущений ($\varepsilon = 0$) обеспечивается значениями $v_1(0) = 400$ и $v_2(0) = 300$. Разложим уравнение (13) в окрестности указанного невозмущенного решения. Соответственно, уравнение в вариациях примет вид

$$\delta\dot{r}_1 = \delta v_1, \quad \delta\dot{r}_2 = \delta v_2,$$

$$\delta\dot{v}_1 = -\varepsilon\sqrt{(\tilde{v}_1(t) + \delta v_1)^2 + (\tilde{v}_2(t) + \delta v_2)^2}(\tilde{v}_1(t) + \delta v_1),$$
$$\delta\dot{v}_2 = -\varepsilon\sqrt{(\tilde{v}_1(t) + \delta v_1)^2 + (\tilde{v}_2(t) + \delta v_2)^2}(\tilde{v}_2(t) + \delta v_2),$$

где

$$\tilde{v}_1(t) = 400, \quad \tilde{v}_2(t) = 300 - 10t,$$

при этом

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_2^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

Величина d_k для различных k и ε

k \ ε	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}
0	0,91	9,12	90,53	839,16	4991,85
1	0,00012	0,01	1,20	101,94	3052,98
2	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$	0,0002	0,016	12,75	2029,26
3	–	$2{,}2 \cdot 10^{-8}$	0,0002	1,601	1402,47
4	–	$3{,}9 \cdot 10^{-11}$	$2{,}85 \cdot 10^{-6}$	0,201	991,13
5	–	–	$3{,}76 \cdot 10^{-8}$	0,025	710,3
6	–	–	$2 \cdot 10^{-9}$	0,0031	513,77

соответственно. Тогда итерационный процесс (12), обеспечивающий корректировку начальных скоростей в данной задаче, примет вид

$$\delta v_1^{k+1}(0) = \delta v_1^k(0) - \frac{1}{T}\delta r_1(T)\Big|_{\delta v_1^k(0),\, \delta v_2^k(0)},$$

$$\delta v_2^{k+1}(0) = \delta v_2^k(0) - \frac{1}{T}\delta r_2(T)\Big|_{\delta v_1^k(0),\, \delta v_2^k(0)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

при этом

$$\delta v_1^0(0) = \delta v_2^0(0) = 0.$$

Введем в рассмотрение величину

$$d_k = \sqrt{[\delta r_1^k(T)]^2 + [\delta r_2^k(T)]^2},$$

где

$$\delta r_1^k(T) = \delta r_1(T)\Big|_{\delta v_1^k(0), \delta v_2^k(0)}, \quad \delta r_2^k(T) = \delta r_2(T)\Big|_{\delta v_1^k(0),\, \delta v_2^k(0)}$$

представляют собой отклонения компонент траектории материальной точки от центра мишени на момент времени T, отвечающие k-й итерации и вариациям начальных скоростей $\delta v_1^k(0)$ и $\delta v_2^k(0)$.

Из анализа приведенных в таблице значений d_k видно, что сходимость итерационного процесса выглядит обоснованной начиная с $\varepsilon = 10^{-5}$, при этом точность проводимых вычислений отвечает 10^{-12}.

5. Заключение

Приведенное в статье решение поставленной задачи не является типичным при сравнении с классическими подходами к решению задач адаптивного управления, поскольку в ее постановке отсутствует набор конечного числа неизвестных параметров, обусловленный выбором конкретной динамической модели. Кроме того, наряду с задачей (2) для уравнения (1) не меньший интерес представляет следующая краевая задача:

$$r(0) = 0, \quad r(T) \in R_c, \quad \|v(0)\| = v^*, \tag{15}$$

где величина T не фиксирована и подлежит определению, $\|\cdot\|$ представляет собой евклидову норму вектора. Смысл задачи (15) заключается в том, что не всегда начальное значение скорости может варьироваться относительно произвольным образом, в данной постановке величина вектора начальной скорости жестко фиксирована. Примечательно, что разрешимость задачи (3), (15) в случае когда $r(T) = r_c$ на основе методов функционального анализа была исследована сравнительно недавно [7–10], включая построение конструктивных методов ее решения. Проблема существования КСА решения задачи (1), (15) может быть поставлена аналогично тому, как это было сделано ранее, тем не менее соответствующая постановка представляется существенно более сложной. С другой стороны, не исключено, что в определенных условиях в основе ее решения может быть использован в качестве вспомогательного алгоритм (12) с последующим варьированием получаемой промежуточной скорости для обеспечения ее требуемой нормировки и одновременной корректировкой величины T с целью сохранения "подкорректированных" траекторий на момент времени T в последовательности вложенных шаров, аналогичной описанной в процессе доказательства теоремы 2 (см. Приложение), причем радиусы шаров относительно центра мишени стремятся к нулю. Здесь же возникает вопрос и о целесообразности измерения не только уклонений пробных траекторий, но и использования оценок флуктуации их скоростей на определенные моменты времени. Кроме того, не менее важной при построении КСА решения задачи (15) является проблема робастности, связанная как с возможной ошибкой в определении величины v^*, так и с допустимыми отклонениями при выборе последовательности промежуточных значений T, что также является предметом дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма 1. Пусть $z(t)$ – решение системы (7). Тогда имеет место оценка

$$\left|\frac{\partial \delta z_i(t)}{\partial z_j(0)}\right| \leqslant \exp\left(2\varepsilon n \int_0^t K(\tau)d\tau\right) - 1 \tag{П.1}$$

относительно всех i, j, равных $1, \ldots, 2n$.

Доказательство леммы. Рассмотрим систему (7) и введем в рассмотрение вектор

$$s = \left(\frac{\partial z_1(t)}{\partial z_k(0)}\ ,\ldots,\ \frac{\partial z_{2n}(t)}{\partial z_k(0)}\right),$$

где k фиксированно. Известно [11], что s_i, $i = 1, \ldots, 2n$ удовлетворяют следующей линейной системе ОДУ:

$$\frac{ds_i}{dt} = \varepsilon \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right) s_j, \tag{П.2}$$

где частные производные вычисляются исходя из (7) и, кроме того,

$$s_i(0) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{П.3}$$

Рассмотрим

$$\|s(t)\|_1 = \max_i \left| \frac{\partial z_i(t)}{\partial z_k(0)} \right|,$$

при этом в силу (П.3) $|s_i(0)| \leqslant 1$. Таким образом, из (П.2) следует оценка

$$\|s(t)\|_1 \leqslant 1 + 2\varepsilon n \int\limits_0^t K(\tau)\|s(\tau)\|_1 \, d\tau.$$

Из последнего соотношения в силу леммы Гронуолла [12] вытекает неравенство

$$\|s(t)\|_1 \leqslant \exp\left(2\varepsilon n \int\limits_0^t K(\tau)\, d\tau\right). \tag{П.4}$$

Введем в рассмотрение величину

$$e_i = \frac{\partial \delta z_i(t)}{\partial z_{k0}},$$

где

$$\delta z_i(t) = z_i(t) - z_i(0).$$

Соответственно $e_i(0) = 0$ для любых i и k. С другой стороны,

$$\frac{de_i}{dt} = \varepsilon \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right) \frac{\partial z_j}{\partial z_k(0)}$$

и в силу (П.4) справедливо неравенство

$$|e_i| \leqslant \int\limits_0^t 2\varepsilon n K(\tau) \exp\left(2\varepsilon n \int\limits_0^\tau K(s) ds\right) d\tau = \exp\left(2\varepsilon n \int\limits_0^t K(\tau)\, d\tau\right) - 1.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Разрешимость краевой задачи (7), (11) эквивалентна разрешимости относительно q_0 следующего уравнения:

$$0 = B_2(T)q_0 + B_1(T)\delta p(T)\Big|_{q_0} + B_2(T)\delta q(T)\Big|_{q_0}, \tag{П.5}$$

где символы $\delta p(T)\Big|_{q_0}$ и $\delta q(T)\Big|_{q_0}$ обозначают величины соответствующих компонент (10), отвечающих начальному условию q_0 и вычисляемых на момент времени T. Соотношение (П.5) можно переписать следующим образом:

$$q_0 = -B_2^{-1}(T)B_1(T)\delta p(T)\Big|_{q_0} - \delta q(T)\Big|_{q_0} = F(q_0), \tag{П.6}$$

где под $F(q_0)$ понимается обозначение правой части (П.6). Заметим, что в силу формулы Тейлора для случая функций нескольких переменных можно записать

$$F(q_1) - F(q_2) =$$
$$= -B_2^{-1}(T)B_1(T)\left(\frac{\partial \delta p(T)}{\partial q_0}\right)\Big|_{\bar{q}}(q_1 - q_2) - \left(\frac{\partial \delta q(T)}{\partial q_0}\right)\Big|_{\bar{q}}(q_1 - q_2),$$

где соответствующие частные производные вычисляются вдоль траекторий (7), отвечающих некоторым начальным условиям $\bar{q}$, расположенным на прямой, соединяющей точки q_1 и q_2. Соответственно, в силу леммы имеет место оценка

$$\|F(q_1) - F(q_2)\|_1 \leqslant n\Big[\big\|\big|B_2^{-1}(T)B_1(T)\big\|\big|_1 + 1\Big]\times$$
$$\times\left[\exp\left(2\varepsilon n\int\limits_0^T K(\tau)d\tau\right) - 1\right]\|q_1 - q_2\|_1 = C_1(\varepsilon)\|q_1 - q_2\|_1,$$

где $C_1(\varepsilon)$ – введенное для краткости обозначение. Поскольку $C_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то для всех достаточо малых ε таких, что выполняется неравенство $C_1(\varepsilon) < 1$, уравнение (П.6) в силу принципа сжимающих отображений [13] имеет единственное решение, что доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Обозначим начальное значение, обеспечивающее решение задачи (7), (11), через q_0^*, существование и единственность которого следует из теоремы 1. Соответственно имеет место соотношение

$$0 = B_2(T)q_0^* + B_1(T)\delta p(T)\Big|_{q_0^*} + B_2(T)\delta q(T)\Big|_{q_0^*}. \tag{П.7}$$

Имея в виду рассматриваемый алгоритм пристрелки (12), можем записать

$$\delta r(T)\Big|_{q_0^k} = B_2(T)q_0^k + B_1(T)\delta p(T)\Big|_{q_0^k} + B_2(T)\delta q(T)\Big|_{q_0^k}. \tag{П.8}$$

Введем в рассмотрение обозначение $\delta q_0^k = q_0^k - q_0^*$. С учетом процедуры (12) справедливо равенство

$$\delta q_0^{k+1} = \delta q_0^k - B_2^{-1}(T)\delta r(T)\Big|_{q_0^k}. \tag{П.9}$$

Вычитая (П.7) из (П.8) получим

$$\delta r(T)\Big|_{q_0^k} = B_2(T)\delta q_0^k + B_1(T)\left[\delta p(T)\Big|_{q_0^k} - \delta p(T)\Big|_{q_0^*}\right] + \tag{П.10}$$
$$+ B_2(T)\left[\delta q(T)\Big|_{q_0^k} - \delta q(T)\Big|_{q_0^*}\right],$$

или

$$\delta q_0^k = B_2^{-1}(T)\delta r(T)\Big|_{q_0^k} - B_2^{-1}(T)B_1(T)\left[\delta p(T)\Big|_{q_0^k} - \delta p(T)\Big|_{q_0^*}\right] - \tag{П.11}$$
$$-\left[\delta q(T)\Big|_{q_0^k} - \delta q(T)\Big|_{q_0^*}\right].$$

Из (П.9) и (П.11) следует, что

$$\delta q_0^{k+1} = -B_2^{-1}(T)B_1(T)\left[\delta p(T)|_{q_0^k} - \delta p(T)|_{q_0^*}\right] - \left[\delta q(T)|_{q_0^k} - \delta q(T)|_{q_0^*}\right],$$

откуда, повторяя предыдущие рассуждения, приходим к оценке

$$\|\delta q_0^{k+1}\|_1 \leqslant n\Big[\big|\!\big|\!\big|B_2^{-1}(T)B_1(T)\big|\!\big|\!\big|_1 + 1\Big]\left[\exp\left(2\varepsilon n\int\limits_0^T K(\tau)\,d\tau\right) - 1\right]\|\delta q_0^k\|_1,$$

или с учетом предыдущих обозначений

$$\|\delta q_0^{k+1}\|_1 \leqslant C_1(\varepsilon)\|\delta q_0^k\|_1. \tag{П.12}$$

С другой стороны, из (П.11) вытекает соотношение

$$\delta q_0^k = h + D\delta q_0^k,$$

где вектор

$$h = B_2^{-1}(T)\delta r(T)|_{q_0^k},$$

матрица

$$D = -B_2^{-1}(T)B_1(T)\left(\frac{\partial \delta p(T)}{\partial q_0}\right)\Big|_{\bar q} - \left(\frac{\partial \delta q(T)}{\partial q_0}\right)\Big|_{\bar q}.$$

Соответственно, имеет место оценка

$$|\!|\!|D|\!|\!|_1 \leqslant C_1(\varepsilon).$$

Тогда в случае достаточно малых ε, когда $|||D|||_1 < 1$, можно записать цепочку неравенств [14]

$$\|\delta q_0^k\|_1 - \|h\|_1 \leqslant \|\delta q_0^k - h\|_1 \leqslant \frac{|||D|||_1}{1 - |||D|||_1}\|h\|_1,$$

или

$$\begin{gathered}\|\delta q_0^k\|_1 \leqslant \frac{1}{1 - |||D|||_1}\|h\|_1 \leqslant \\ \leqslant \frac{\left|\left|\left|B_2^{-1}(T)\right|\right|\right|_1}{1 - |||D|||_1}\left\|\delta r(T)\Big|_{q_0^k}\right\|_1 = C_2\left\|\delta r(T)\Big|_{q_0^k}\right\|_1,\end{gathered} \tag{П.13}$$

где C_2 – введенное для краткости обозначение. Аналогично (П.10) имеет место соотношение

$$\begin{gathered}\delta r(T)\Big|_{q_0^{k+1}} = B_2(T)\delta q_0^{k+1} + B_1(T)\left[\delta p(T)\Big|_{q_0^{k+1}} - \delta p(T)\Big|_{q_0^*}\right] + \\ + B_2(T)\left[\delta q(T)\Big|_{q_0^{k+1}} - \delta q(T)\Big|_{q_0^*}\right].\end{gathered}$$

С учетом (П.12), (П.13) имеет место последовательность оценок

$$\begin{gathered}\left\|\delta r(T)\Big|_{q_0^{k+1}}\right\|_1 \leqslant \\ \leqslant \left\{|||B_2(T)|||_1 + n\Big(|||B_1(T)|||_1 + |||B_2(T)|||_1\Big)\left[\exp\left(2\varepsilon n\int\limits_0^T K(\tau)d\tau\right) - 1\right]\right\} \times \\ \times \|\delta q_0^{k+1}\|_1 = C_3\|\delta q_0^{k+1}\|_1 \leqslant C_3\, C_1(\varepsilon)\|\delta q_0^k\|_1 \leqslant C_3\, C_2\, C_1(\varepsilon)\left\|\delta r(T)\Big|_{q_0^k}\right\|_1,\end{gathered}$$

где C_3 – соответствующее обозначение. Тогда, если $C_3\, C_2\, C_1(\varepsilon) < 1$, что имеет место при всех достаточно малых ε, итерационный процесс (12) является КСА решения задачи (7), (8). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
2. *Лысенко Л.Н.* Внешняя баллистика. М.: МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2018.
3. *Коновалов А.А., Николаев Ю.В.* Внешняя баллистика. М.: ЦНИИ информации, 1979
4. *Козлитин И.А.* Полуэмпирическая баллистическая модель с четыремя степенями свободы // Электронные информационные системы. 2018. № 2. С. 83–100.

5. *Козлитин И.А.* Восстановление входных параметров расчета внешней баллистики тела по результатам траекторных измерений // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 9. С. 121–134.
6. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
7. *Вавилов С.А.* О разрешимости одного класса краевых задач // ДАН СССР. 1989. Т. 305. № 2. С. 268–270.
8. *Вавилов С.А.* Исследование разрешимости одного класса краевых задач со свободной границей // Диффер. уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2075–2081.
9. *Vavilov S.A.* On the Solvability of One Class of Boundary Value Problems // Differ. Integral Equat. 1990. V. 3. No. 1. P. 175–179.
10. *Stepanov E., Vavilov S.A.* The Main Problem of External Ballistics // Comput. Math. Appl. 1997. V. 33. No. 5. P. 95–101.
11. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
12. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
13. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
14. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 15.11.2019

После доработки 21.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020