Автоматика и телемеханика, № 10, 2021

© 2021 г. Л.Г. АФРАЙМОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (levafraimovich@gmail.com),
М.Д. ЕМЕЛИН (makcum888e@mail.ru)
(Нижегородский государственный университет)

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ СТРАТЕГИИ КОМБИНИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Рассматривается NP-трудная целочисленная трехиндексная аксиальная задача о назначениях. Исследуются стратегии комбинирования допустимых решений задачи. Такое комбинирование может быть применено в качестве дополнения к эвристическим или приближенным алгоритмам решения вместо общепринятого шага выбора рекорда среди найденных допустимых решений. Приводятся результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие перспективность предложенного подхода.

Ключевые слова: аксиальная задача о назначениях, многоиндексная задача, приближенные алгоритмы.

DOI: 10.31857/S0005231021100020

1. Введение

Многоиндексные аксиальные задачи о назначениях возникают при решении множества прикладных задач [1–3]. Обзор результатов анализа подклассов многоиндексных задач о назначениях приведен в [1]. Класс трехиндексных аксиальных задач о назначениях является NP-трудным [4]. В [5] доказано отсутствие полиномиальных ε-приближенных алгоритмов решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях (здесь ε – произвольная константа), в противном случае $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Известны приближенные и эвристические алгоритмы решения NP-трудной аксиальной задачи о назначениях [2, 5–10]. Такие алгоритмы, как правило, позволяют строить серию допустимых решений задачи. Далее на финальном шаге таких алгоритмов общепринятым подходом является выбор рекорда среди построенных допустимых решений. В качестве улучшения финального шага выбора рекорда Л.Г. Афраймович и М.Д. Емелин предлагают решение задачи оптимального комбинирования найденных допустимых решений. Ранее в [11] был построен алгоритм оптимального комбинирования пары допустимых решений, обладающий линейной сложностью. В данной статье исследуется проблема комбинирования в случае произвольного числа решений.

Далее статья построена следующим образом. В разделе 2 приводится постановка трехиндексной аксиальной задачи о назначениях и ставится задача комбинирования допустимых решений. В разделе 3 исследуется задача комбинирования допустимых решений и описываются эвристические стратегии комбинирования. В разделе 4 приводятся результаты вычислительных экспериментов.

2. Постановка задачи

Пусть I, J, K – непересекающиеся множества индексов, $I \cap J = \varnothing$, $I \cap K = \varnothing$, $J \cap K = \varnothing$ и $|I| = |J| = |K| = n$; c_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – трехиндексная матрица стоимостей; x_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – трехиндексная матрица неизвестных. Тогда трехиндексная аксиальная задача о назначениях ставится как следующая задача целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} = 1, \quad k \in K, \tag{1}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad j \in J, \tag{2}$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijk} = 1, \quad i \in I, \tag{3}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K, \tag{4}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk} \to \min. \tag{5}$$

Далее пусть задано множество $W \subseteq I \times J \times K$, которое определяет подмножество разрешенных назначений. Тогда рассмотрим задачу (1)–(4), (6), (5)

$$x_{ijk} = 0, \quad (i, j, k) \notin W. \tag{6}$$

Для удобства изложения задачу (1)–(4), (6), (5) для заданного множества W будем обозначать через $Z(W)$. Очевидно, задача (1)–(5) соответствует задаче $Z(I \times J \times K)$.

В общем случае задача $Z(W)$ является NP-трудной [1]. Более того, проблема проверки совместности системы (1)–(4), (6) для произвольного множества W является NP-полной [1]. Будем рассматривать такие множества W, которые соответствуют набору назначений некоторых допустимых решений задачи (1)–(5).

Введем вспомогательные обозначения. Пусть x – допустимое решение системы ограничений (1)–(4). Тогда через $W(x)$ обозначим следующее множество разрешенных назначений:

$$W(x) = \{(i, j, k) |\, x_{ijk} = 1,\ i \in I,\ j \in J,\ k \in K\}.$$

Для удобства через $C(x)$ обозначим значение критерия, соответствующего решению x, $C(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} c_{ijk} x_{ijk}$. Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^m$ – произвольные допустимые решения системы ограничений (1)–(4). Тогда обозначим $W\left(x^1, x^2, \ldots, x^m\right) = \bigcup_{t=1}^m W(x^t)$. Через S_m обозначим множество перестановок размера m.

Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^m$ – некоторые допустимые решения системы ограничений (1)–(4), найденные известными приближенными или эвристическими методами решения аксиальной задачи о назначениях (1)–(5). Общепринятым подходом является выбор рекорда среди данных допустимых решений на финальном шаге алгоритма: $C' = \min_{t=\overline{1,m}} C(x^t)$. В качестве улучшения финального шага выбора рекорда предлагается решение задачи $Z(W(x^1, x^2, \ldots, x^m))$, т.е. выбор рекорда предлагается заменить на поиск решения, скомбинированного из компонент известных допустимых решений.

3. Исследования задачи комбинирования решений

Для случая $m = 2$ в [11] был разработан полиномиальный алгоритм решения задачи $Z(W\left(x^1, x^2, \ldots, x^m\right))$. Вопрос построения алгоритма для случая $m > 2$ является открытым.

Покажем, что решение задачи комбинирования $m > 2$ допустимых решений $Z(W\left(x^1, x^2, \ldots, x^m\right))$ в общем случае не может быть сведено к последовательному комбинированию пар допустимых решений. В качестве базового алгоритма последовательного комбинирования пар допустимых решений рассмотрим следующий алгоритм.

Алгоритм 1. Последовательное комбинирование пар допустимых решений.

Вход: Исходные допустимые решения $x^1, x^2, \ldots, x^m$ и перестановка $p \in$ $\in S_m$.

Шаг 1. y^1 является решением задачи $Z\left(W\left(x^{p_1}, x^{p_2}\right)\right)$.

Шаг 2. y^t является решением задачи $Z\left(W\left(y^{t-1}, x^{p_{t+1}}\right)\right)$, $t = \overline{2, m-1}$.

Выход: y^{m-1}.

Замечание. На шагах 1 и 2 алгоритма 1 применяется алгоритм оптимального комбинирования пар решений (случай $m = 2$), предложенный в [11].

Теорема. Алгоритм 1 не является алгоритмом решения задачи $Z\left(W\left(x^1, x^2, \ldots, x^m\right)\right)$ *при* $m > 2$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы приведем контрпример. Пусть $n = 3$, $m = 3$,

$$c = \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right],$$

$$x^1 = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right],$$

$$x^2 = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right],$$

$$x^3 = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right].$$

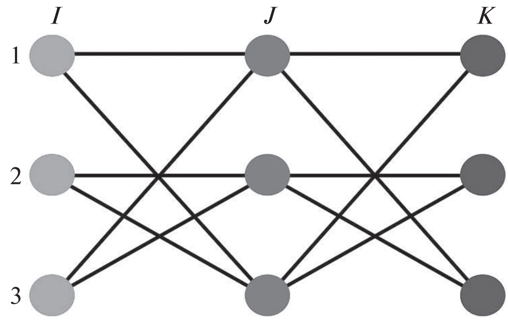

Рисунок.

Несложно увидеть, что граф $G = (V, A)$, где $V = \{I \cup J \cup K\}$, $A = \left\{(i,j), (i,k), (j,k) \,\middle|\, (i,j,k) \in W\left(x^{l_1}, x^{l_2}\right)\right\}$, $l_1 \neq l_2$, $l_1, l_2 \in \{1, 2, 3\}$, имеет одну компоненту связности (на рисунке в качестве примера приведен граф, построенный для $l_1 = 1$, $l_2 = 2$).

Отсюда согласно [11] решением задачи $Z\left(W\left(x^{l_1}, x^{l_2}\right)\right)$ является x^{l_1} или x^{l_2}. Следовательно, при применении алгоритма 1 комбинирования решений x^1, x^2, x^3 с произвольной перестановкой $p \in S_3$ получим на выходе одно из этих решений. При этом оптимальным решением задачи $Z(W\left(x^1, x^2, x^3\right))$ является

$$x^* = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right],$$

в котором тройка $(1, 1, 1)$ выбрана из решения x^1, тройка $(2, 2, 2)$ из x^2, тройка $(3, 3, 3)$ из x^3. И выполняется условие $C\left(x^1\right) = C\left(x^2\right) = C\left(x^3\right) = 5 > 3 = C\left(x^*\right)$. Теорема доказана.

По причине отсутствия на данный момент известного эффективного алгоритма решения задачи $Z(W\left(x^1, x^2, \ldots, x^m\right))$ при $m > 2$ в данной статье предлагается ряд эвристических стратегий решения данной задачи, основанных на последовательном комбинировании пар решений. Согласно теореме данные стратегии не гарантируют построение оптимального решения, однако на численных задачах предложенные стратегии показывают улучшение результатов по сравнению с общепринятым выбором рекорда.

Предлагаются следующие эвристические стратегии комбинирования решений:

Стратегия 1.

Применить алгоритм 1 к решениям $x^1, x^2, \ldots, x^m$ со случайной перестановкой $p \in S_m$. Полученное алгоритмом 1 решение выбрать в качестве выходного.

Стратегия 2.

Применить алгоритм 1 к решениям $x^1, x^2, \ldots, x^m$ с перестановкой $p \in S_m$, удовлетворяющей свойству $C\left(x^{p_i}\right) \leq C\left(x^{p_{i+1}}\right)$, $i = \overline{1, m-1}$, т.е. решения упорядочены в порядке неубывания критерия. Полученное алгоритмом 1 решение выбрать в качестве выходного.

Стратегия 3.

Применить алгоритм 1 к решениям $x^1, x^2, \ldots, x^m$ с перестановкой $p \in S_m$, удовлетворяющей свойству $C(x^{p_i}) \leq C(x^{p_{i+1}})$, $i = \overline{1, m-1}$. Обозначим полученное алгоритмом 1 решение через y_1.

Получить k решений y_t, $t = \overline{2, k+1}$, следующим способом. Для каждого $t = \overline{2, k+1}$ создать перестановку $p \in S_m$, удовлетворяющую свойству $C(x^{p_i}) \leq C(x^{p_{i+1}})$, $i = \overline{1, m-1}$, выбрать случайным образом $d = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ элементов перестановки и случайно поменять их местами. Применить алгоритм 1 к решениям $x^1, x^2, \ldots, x^m$ с перестановкой $p \in S_m$. Полученное решение обозначим через y_t.

Применить алгоритм 1 к решениям $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ с тождественной перестановкой $e = (1, 2, \ldots, k+1)$. Полученное алгоритмом 1 решение выбрать в качестве выходного.

4. Вычислительный эксперимент

По аналогии с [12] построим тестовый набор с матрицами стоимостей, элементы которых сгенерированы с целочисленными значениями, равномерно распределенными в интервале $[0, 300]$. Будем строить серии экспериментов с задачами размерности $n \in \{10, 11, \ldots, 19\}$, в каждой серии построим $M = 10$ задач. Для каждой из тестовых задач случайным образом сгенерируем $m = n^3$ допустимых решений, к каждому из которых применим алгоритм локальной оптимизации, предложенный в [6]. Полученные допустимые решения задачи (1)–(5) обозначим через x^t, $t = \overline{1, m}$. Тогда рекорд среди полученных решений обозначим $C' = \min_{t=\overline{1,m}} C(x^t)$. Далее применим разработанные стратегии оптимального комбинирования решений к полученным локально оптимальным решениям и обозначим значения критерия, соответствующего решению, полученному с использованием стратегии s, через C^s, $s = \overline{1, 3}$. Наконец, через C^* обозначим оптимальное значение критерия исходной задачи. Будем сравнивать отклонение от оптимума рекорда среди локально оптимизированных случайных решений и отклонение от оптимума среди локально

Таблица

n	M	$\frac{C'-C^*}{C^*} \cdot 100\%$	$\frac{C^1-C^*}{C^*} \cdot 100\%$	$\frac{C^2-C^*}{C^*} \cdot 100\%$	$\frac{C^3-C^*}{C^*} \cdot 100\%$
10	10	3,195	2,399	2,399	1,478
11	10	8,883	7,413	6,332	4,274
12	10	15,054	14,185	14,185	10,923
13	10	24,319	24,319	24,319	22,010
14	10	41,210	34,207	34,387	23,276
15	10	54,856	47,248	52,372	46,553
16	10	72,872	69,792	70,677	69,473
17	10	68,145	68,145	59,684	51,387
18	10	87,201	81,402	82,272	66,769
19	10	100,464	88,211	90,114	81,358

оптимальных случайных решений, к которым применили соответствующие разработанные стратегии комбинирования. Для серии экспериментов будем оценивать среднее отклонение в серии. Полученные результаты приведены в таблице.

Таким образом, среднее отклонение для C' по всем сериям составляет 47,620 %, для C^1 составляет 43,732 %, для C^2 составляет 43,674 %, для C^3 составляет 37,750 %.

5. Заключение

В литературе известны приближенные и эвристические алгоритмы решения NP-трудной аксиальной задачи о назначениях. Такие алгоритмы, как правило, позволяют строить серию допустимых решений задачи. На финальном шаге таких алгоритмов общепринятым является выбор рекорда среди построенных допустимых решений. В качестве улучшения финального шага выбора рекорда Л.Г. Афраймович и М.Д. Емелин предложили решение задачи оптимального комбинирования найденных m допустимых решений. Для случая $m = 2$ ранее был разработан эффективный алгоритм решения. В данной статье было показано, что решение задачи комбинирования при $m > 2$ в общем случае не сводится к последовательному комбинированию пар допустимых решений. Тем не менее предложенные эвристические стратегии последовательного комбинирования пар решений для случая $m > 2$ позволяют получить улучшение результатов по сравнению с общепринятой стратегией выбора рекорда. Построение эффективного алгоритма оптимального комбинирования при $m > 2$ остается открытой проблемой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spieksma F.C.R.* Multi Index Assignment Problems. Complexity, Approximation, Applications / P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 1–11.
2. *Афраймович Л.Г.* Эвристический метод решения целочисленных декомпозиционных многоиндексных задач // АиТ. 2014. № 8. С. 3–18.

   Afraimovich L.G. A Heuristic Method for Solving Integer-Valued Decompositional Multiindex Problems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 8. P. 1357–1368.
3. *Афраймович Л.Г., Прилуцкий М.Х.* Многоиндексные задачи оптимального планирования производства // АиТ. 2010. № 10. С. 148–155.

   Afraimovich L.G., Prilutskii M.Kh. Multiindex Optimal Production Planning Problems // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 10. P. 2145–2151.
4. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
5. *Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation Algorithms for Three-Dimensional Assignment Problems with Triangle Inequalities // Eur. J. Oper. Res. 1992. V. 60. P. 273–279.
6. *Huang G., Lim A.* A Hybrid Genetic Algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Eur. J. Oper. Res. 2006. V. 172. P. 249–257.

7. *Karapetyan D., Gutin D.* A New Approach to Population Sizing for Memetic Algorithms: A Case Study for the Multidimensional Assignment Problem // Evolutionary Computation. 2011. V. 19. No. 3. P. 345–371.

8. *Медведев С.Н., Медведева О.А.* Адаптивный алгоритм решения аксиальной трехиндексной задачи о назначениях // АиТ. 2019. № 4. С. 156–172.

   Medvedev S.N., Medvedeva O.A. An Adaptive Algorithm for Solving the Axial Three-Index Assignment Problem // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 4. P. 718–732.

9. *Gabrovšek B., Novak T., Povh J., Rupnik Poklukar D., Žerovnik J.* Multiple Hungarian Method for k-Assignment Problem // Mathematics. 2020. V. 8. 2050.

10. *Гимади Э.Х., Коркишко Н.М.* Об одном алгоритме решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2003. Т. 10. № 2. С. 56–65.

11. *Афраймович Л.Г., Емелин М.Д.* Комбинирование решений аксиальной задачи о назначениях // АиТ. 2021. (принято к печати)

12. *Balas E., Saltzman M.J.* An Algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Oper. Res. 1991. V. 39. No. 1. P. 150–161.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 20.01.2021

После доработки 01.06.2021

Принята к публикации 30.06.2021