Автоматика и телемеханика, № 10, 2021

© 2021 г. **М.С. ГЕРМАНЧУК (m.german4uk@yandex.ru),**
М.Г. КОЗЛОВА, канд. физ.-мат. наук (art-inf@mail.ru),
В.А. ЛУКЬЯНЕНКО, канд. физ.-мат. наук (art-inf@yandex.ru)
(Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь)

ПСЕВДОБУЛЕВЫЕ МОДЕЛИ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ КЛАССА ЗАДАЧ МНОГИХ КОММИВОЯЖЕРОВ

Рассматриваются знаниеориентированные модели, задачи и алгоритмы построения маршрутов в сложных сетях агентами-коммивояжерами. Формализация приводит к моделям псевдобулевой дискретной оптимизации с ограничениями, учитывающими специфику задачи многих коммивояжеров. Рассмотрен класс задач, который представи́м в виде псевдобулевых оптимизационных моделей с сепарабельными целевыми функциями (монотонные, линейные) и ограничениями в виде дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). Показана возможность приближенного синтеза ДНФ ограничений на основе прецедентной информации. Приведена методология, теоретические положения и алгоритмы решения такого класса задач. Показано, что решение задач маршрутизации может базироваться на применении многоагентного подхода в сочетании с кластеризацией исходной задачи, алгоритмах псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивными ограничениями и метаэвристиках.

Ключевые слова: многоагентные задачи коммивояжера, модели псевдобулевой условной оптимизации с дизъюнктивными ограничениями, метаэвристики.

DOI: 10.31857/S0005231021100044

1. Введение

Прикладная теория задач маршрутизации на сложных сетях (типа многих агентов-коммивояжеров) базируется на точных решениях выделенных классов задач с полиномиальными алгоритмами решения, использовании приближенных алгоритмов решения (например, с гарантированной функциональностью) и декомпозиции (кластеризации) исходной задачи, т.е. сведения к задачам меньшей размерности и уточняющих преобразованиях для возврата к исходной задаче. Важным в этом процессе является учет всей имеющейся информации, знаний, фактов и прецедентов как для построения иерархии моделей (извлечение моделей), так и для разработки практических алгоритмов решения [1–10].

Разнообразие алгоритмов также связано с наличием априорных знаний о решении или структуре сети, прецедентным характером знаний и требованиями к точности решения. Рационально использование как точных, так и приближенных алгоритмов и их композиций. Заметим, что задачи прикладной маршрутизации возникают в сочетании с другими известными задачами:

задача о ранце, распределение ресурсов, кластеризации, максимального разреза, покрытия и т.п.

Многоагентные системы с роевым интеллектом используются для решения сложных задач дискретной оптимизации, которые нельзя эффективно решать классическими алгоритмами. Агентная модель для сложной сети задачи типа многих коммивояжеров (Multiple Traveling Salesman Problem, $mTSP$) становится интеллектуализированной системой, определяющей эвристические алгоритмы поиска оптимального решения реактивными агентами (следующих заложенным в них правилам).

Синтез многоагентных систем (МАС) искусственного интеллекта (ИИ) по частичной, прецедентной, априорной информации базируется на результатах наблюдения за поведением МАС на основе накопленной информации в виде [6]: "...вектора состояния, значения качества функционирования системы, бинарного индикатора допустимости этого состояния". Для МАС маршрутизации типа $mTSP$ используется модель скалярной псевдобулевой условной оптимизации с ограничениями в виде дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ). Такие модели естественным образом учитывают линейные ограничения по прохождению вершин сети, декларативные требования, требования предшествования, обязательного прохождения выделенного множества дуг и другую прецедентную информацию.

Псевдобулевые оптимизационные модели с сепарабельными целевыми функциями и ДНФ ограничениями, имеющими ограниченную постоянной величиной длину, являются полиномиально разрешимыми. Представляют интерес классы задач, которые приведены или легко приводятся к форме с ДНФ ограничениями, так как в общем случае такие приведения являются экспоненциальными. Синтез модели с ДНФ ограничениями из данных можно осуществлять приближенно, и сложность такой аппроксимации оказывается полиномиальной. В [6] показано, что число конъюнкций в извлеченной ДНФ не превышает числа примеров в исходной прецедентной информации. При этом указывается, что для построения ДНФ ограничений целесообразно использовать решающие деревья. В случае монотонности и линейности частично заданной целевой функции в публикациях В.И. Донского [3, 6] и М.Г. Козловой [7, 8] предложены алгоритмы решения задач псевдобулевой скалярной оптимизации при наличии неполной, прецедентной начальной информации. Идея этого подхода будет применена для решения многоагентных задач типа многих коммивояжеров.

В настоящей статье приводится часть проекта, представленного в декабре 2020 г. на Международной конференции "Интеллектуализация обработки информации" [2]. Исторические аспекты по задачам коммивояжера, их обобщениям, точным и приближенным алгоритмам решения можно найти в [11–13]. В [14] показано применение композиции алгоритмов: модификация генетического алгоритма, муравьиный, роевой (пчелиной колонии), имитации отжига. Предложен и реализован обобщенный алгоритм, в котором исходной сети ставится в соответствие более простая сеть (сеть облета). Алгоритм инспирирован рядом актуальных прикладных задач: задачей планирования многодневных туристических маршрутов на инфраструктурной сети достопримечательностей Крыма и задачей доставки ресурсов агентами-коммивояжерами по территории Ялты в условиях чрезвычайных ситуаций (ЧС). Численный эксперимент проведен для задачи маршрутизации по карте ГИС для городской инфраструктуры. Реализованы алгоритмы кластеризации, в которых первоначально пройденные маршруты уточняются с помощью алгоритмов 2-opt, имитации отжига и других метаэвристик [14].

В данной статье выделено важное направление – построение МАС $mTSP$ на базе моделей псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивными ограничениями.

2. Предварительные сведения. Задачи псевдобулевой оптимизации

Оптимизационные задачи с булевыми переменными имеют широкие приложения [1, 3, 15]. В связи с задачами маршрутизации на графах особый интерес представляют задачи псевдобулевой оптимизации. Достаточно подробно такие задачи исследовались в [16, 17], где разработаны методы решения в случае аналитически заданных моделей псевдобулевой оптимизации. В [18] псевдобулевые функции рассматриваются как отображения из семейства подмножеств конечного исходного множества действительных чисел. Оптимизация на графах в классе псевдобулевых функций представлена в [19, 20]. Базовые результаты содержатся в [21, 22].

Введем обозначения:

$B^n = \{0,1\}^n$ — единичный n-мерный куб, $P_2(n) = \{F : B^n \to \{0,1\}\}$ — класс функций алгебры логики (ФАЛ), зависящих от n переменных, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$.

Функция вида $f: B^n \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, называется псевдобулевой [1, 3, 18]. Для обозначения класса таких функций будем использовать обозначение $PS_2(n)$, а для обозначения класса линейных псевдобулевых функций — $LPS_2(n)$. Функции из $PS_2(n)$ определены на множестве вершин единичного n-мерного куба B^n и могут принимать вещественные значения.

Задача вида

$$extr\, f(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Omega \subseteq B^n, \quad f \in PS_2(n), \tag{1}$$

называется задачей псевдобулевой оптимизации.

Введем характеристическую функцию множества ограничений Ω:

$$F_\Omega(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & \tilde{x} \in \Omega; \\ 0, & \tilde{x} \in B^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

Задачу (1) можно представить в эквивалентной форме:

$$extr\, f(\tilde{x}), \quad F_\Omega(\tilde{x}) = 1, \quad f \in PS_2(n), \quad F_\Omega \in P_2(n), \quad \tilde{x} \in B^n, \tag{2}$$

где $P_2(n)$ – класс функций алгебры логики от n переменных.

Пусть $D_{F_\Omega} = \bigvee_{j=1}^{m} K_j$ – любая дизъюнктивная нормальная форма функции $F_\Omega(\tilde{x})$; тогда задача, эквивалентная задачам (1) и (2), имеет вид:

$$extr\ \ f(\tilde{x}), \quad D_{F_\Omega}(\tilde{x}) = 1, \quad \tilde{x} \in B^n. \tag{3}$$

Задача (3) называется задачей псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением, и форму ее представления называют канонической.

Определение 1. *Переменная x_i называется существенной для $f \in \in PS_2(n)$, если найдется такой набор значений переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots \ldots, \alpha_n)$. В противном случае переменная называется фиктивной.*

Определение 2. *Псевдобулевые функции f_1 и f_2 называются равными, если функция f_2 может быть получена из f_1 путем введения или удаления фиктивных переменных.*

Каноническая форма псевдобулевой функции f аналогична совершенной дизъюнктивной нормальной форме в $P_2(n)$ и имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\tilde{\sigma} \in B^n} a_{\tilde{\sigma}} x_1^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot x_i^{\sigma_i} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}, \tag{4}$$

где

$$\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \sigma_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_{\tilde{\sigma}} \in \mathbb{R}, \quad x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1, \\ \overline{x}, & \sigma = 0. \end{cases}$$

Каждая псевдобулевая функция может быть представлена в полиномиальной форме над полем действительных чисел

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{k_f} c_j x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_{r_j}} + c_0, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, k_f. \tag{5}$$

Задача псевдобулевой оптимизации в форме слабых неравенств имеет вид:

$$\begin{gathered} extr\ \ f(x_1, \ldots, x_n), \quad g_j(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \\ (x_1, \ldots, x_n) \in B^n, \quad f, g_j \in PS_2(n). \end{gathered} \tag{6}$$

Определение 3. *Две формы представления оптимизационной задачи называются эквивалентными, если множества их решений совпадают.*

Теорема 1 [4]. *Для любой задачи псевдобулевой оптимизации в форме (1) существует эквивалентная форма представления*

$$extr\ \ f(\tilde{x}), \quad h(\tilde{x}) \leqslant 0, \quad \tilde{x} \in B^n, \tag{7}$$

с единственным ограничением в виде нестрогого неравенства, где $f, h \in \in PS_2(n)$ есть некоторые полиномы.

Полиномиальное представление для функции $f \in PS_2(n)$ существует всегда.

Теорема 2 [4]. *Любая задача оптимизации псевдобулевой функции с ограничениями, определяющими непустое множество допустимых решений Ω задачи* (1)*, может быть представлена в эквивалентной форме с дизъюнктивным условием* (3).

Доказательство теоремы 2 следует из существования эквивалентной формы задачи с характеристическими функциями на наборе допустимых значений $F_\Omega(\tilde{x})$ и полноты представления ФАЛ в виде дизъюнктивных нормальных форм.

Определение 4. Представление задач произвольного класса Z в форме F называется полным в Z, если любая задача этого класса может быть представлена в форме F.

Из данного определения следует, что представление задач условной оптимизации псевдобулевой функции в форме с дизъюнктивным условием является полным.

Область допустимых решений задачи (3) и эквивалентной ей задачи (1) может быть представлена в виде:

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} N_{K_j},$$

где N_{K_j} – интервал ранга r_j, соответствующий элементарной конъюнкции $K_j = x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \ldots \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}}$, что приводит к еще одной эквивалентной форме задачи (1):

$$\underset{1 \leqslant j \leqslant m}{extr} \quad \underset{\tilde{x} \in N_{K_j}}{extr} \quad f(\tilde{x}). \tag{8}$$

Действительно, учитывая, что область допустимых решений есть объединение интервалов N_{K_j}, $j = \overline{1, m}$, легко убедиться, что экстремальное решение задачи можно определить путем его выбора из предварительно найденных допустимых решений, являющихся экстремальными в интервалах N_{K_j}.

Рассмотрим основные алгоритмы решения задач псевдобулевой оптимизации. Пусть дана задача псевдобулевой оптимизации с линейной целевой функцией

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad \bigvee_{j=1}^{m} K_j(\tilde{x}) = 1, \quad \tilde{x} \in B^n, \tag{9}$$

где $K_j(\tilde{x}) = x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \ldots \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}}$, $j = \overline{1, m}$. Приведем к эквивалентной форме:

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \qquad \tilde{x} \in \bigcup_{j=1}^{m} N_{K_j}, \tag{10}$$

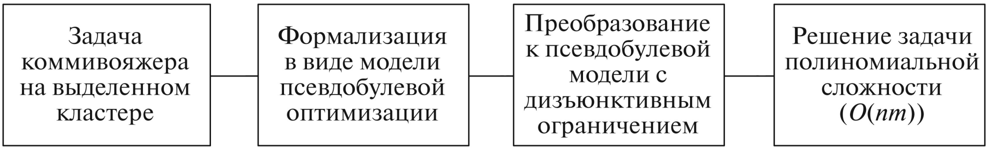

Рис. 1. Схема решения задачи.

где N_{K_j} – интервал в B^n, соответствующий конъюнкции K_j; интервал N_{K_j} определяется набором значений $\{j_1, \ldots, j_{r_j}\}$ (направление) и множеством $\{\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_{r_j}}\}$ (код интервала).

Решение (10) сводится к решению задачи

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} \max_{\tilde{x} \in N_{K_j}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{11}$$

которое в свою очередь требует решения m задач вида:

$$\max_{\tilde{x}} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad \tilde{x}: \ (x_{j_1} = \sigma_{j_1}) \& \ldots \& (x_{j_{r_j}} = \sigma_{j_{r_j}}). \tag{12}$$

Задача (12) решается следующим образом: допустимыми являются только те булевы наборы $\tilde{x}$, у которых зафиксированы координаты $x_{j_1} = \sigma_{j_1}, \ldots$ $\ldots, x_{j_{r_j}} = \sigma_{j_{r_j}}$, а остальные могут иметь любые значения из множества $\{0, 1\}$. Свободные переменные (вне множества номеров $\{j_1, \ldots, j_{r_j}\}$) можно назначать единичными или нулевыми в зависимости от значения c_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}$ – коэффициентов целевой функции. Экстремальные решения $\tilde{x}^*$ задачи (12) будут определяться формулой [23]:

$$x_i^* = \begin{cases} \sigma_i, & i \in \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}, \\ \varphi(c_i), & i \notin \{j_1, \ldots, j_{r_j}\}, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\varphi(c_i) = \begin{cases} 1, & c_i > 0, \\ 0, & c_i < 0, \\ \alpha, & c_i = 0, \end{cases}$$

α – любое значение из $\{0, 1\}$. В случае когда все $c_i \neq 0$, задача (12) имеет единственное решение, а исходная задача (11) – не более m решений.

На каждом интервале N_{K_j} при вычислении x_i^* согласно (13) просматривается n значений, а интервалов всего m, поэтому сложность решения $O(mn)$.

Так как любую задачу псевдобулевой оптимизации можно представить в эквивалентной форме с ДНФ ограничением, то это справедливо и для задач с линейной целевой функцией. Следовательно, решение любой линейной задачи (в том числе задачи коммивояжера) можно осуществлять по схеме, представленной на рис. 1.

Теорема 3 [4]. *Если задача условной оптимизации линейной псевдобулевой функции с ограничениями-неравенствами приводится к эквивалентной форме с дизъюнктивным ограничением за число шагов, ограниченное полиномом от размерности задачи, то она разрешима за полиномиальное время.*

3. Псевдобулевая модель задачи коммивояжера

Рассмотрим задачу коммивояжера, формализованную в виде модели линейной псевдобулевой условной оптимизации с неотрицательными коэффициентами ($c_{ij} \geqslant 0$) целевой функции:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i,j=\overline{1,n}, \tag{15}$$

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leqslant n-1, \quad i,j=\overline{2,n}, \quad i \neq j. \tag{16}$$

Здесь u_i — произвольные действительные числа (в частности, им может соответствовать нумерация вершин, по которым проходит коммивояжер). Ограничения (16) препятствуют образованию подциклов. Чтобы упростить выкладки, будем использовать обозначение двухиндексных величин через одноиндексные: $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}) \in B^N$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_N) = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn})$, где $N = n^2$. Ограничениям можно поставить в соответствие функции $F_j(\tilde{x}) \in P_2(N)$, $j = \overline{1,M}$, где M – число ограничений. Можно в $\tilde{x}$ использовать и другую нумерацию элементов: x_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$.

Определение 5. Вершина $\tilde{\alpha} \in B^n$ называется верхним нулем монотонной функции алгебры логики $f(\tilde{x})$, если $f(\tilde{\alpha}) = 0$ и для всякой вершины $\tilde{\beta}$ из $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$ следует, что $f(\tilde{\beta}) = 1$ [24].

Лемма 1. Если

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i,j=\overline{1,n},\ u_i - u_j + nx_{ij} \leqslant n-1, \quad i \neq j\right\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{F_j(\tilde{x}) = 0\},$$

то F_j – монотонные функции алгебры логики (ФАЛ) и задачу (14)–(16) *можно записать в виде*

$$(c, \tilde{x}) \to \min, \quad F_0(\tilde{x}) = \bigvee_{j=1}^{M} F_j(\tilde{x}) = 0, \tag{17}$$

где $c = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn})$, $(c, \tilde{x})$ – скалярное произведение, $F_0(\tilde{x})$ – монотонная ФАЛ.

Доказательство. Покажем монотонность функций $F_j(\tilde{x})$. Пусть $\tilde{\alpha},\, \tilde{\beta} \in B^N$ такие, что $\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}$, т.е. $\alpha_{ij} \leqslant \beta_{ij}\ \ \forall i, j = \overline{1, n}$. Тогда

$$S(\tilde{\alpha}) = \Biggl\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} - 1,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} - 1,\ i, j = \overline{1, n},$$

$$u_i - u_j + n\alpha_{ij} - (n-1),\ i, j = \overline{2, n} \Biggr\} \leqslant$$

$$\leqslant \Biggl\{ \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} - 1,\ \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} - 1,\ i, j = \overline{1, n},$$

$$u_i - u_j + n\beta_{ij} - (n-1),\ i, j = \overline{2, n} \Biggr\} = S(\tilde{\beta}).$$

Неравенства выполняются покомпонентно в силу $\alpha_{ij} \leqslant \beta_{ij}\ \forall i, j = \overline{1, n}$.

По условию леммы $(S(\tilde{\alpha}) \leqslant 0) \Leftrightarrow (F_j(\tilde{\alpha}) = 0)$, $(S(\tilde{\beta}) \leqslant 0) \Leftrightarrow (F_j(\tilde{\beta}) = 0)$. Учитывая, что $S(\tilde{\alpha}) \preccurlyeq S(\tilde{\beta})$, имеем $(F_j(\tilde{\alpha}) = 1) \Rightarrow (F_j(\tilde{\beta}) = 1)$, поэтому $F_j(\tilde{\alpha}) \leqslant F_j(\tilde{\beta})$. Следовательно, $F_j(\tilde{x})$ – монотонная ФАЛ.

Функция $F_0(\tilde{x}) = \bigvee_{j=1}^{M} F_j(\tilde{x})$ является монотонной. Это следует из того, что класс монотонных ФАЛ является замкнутым и содержит дизъюнкцию. Функция $F_0(\tilde{x})$ равна нулю тогда и только тогда, когда выполняются все ограничения (14)–(16), так как дизъюнкция $\bigvee_{j=1}^{M} F_j(\tilde{x})$ равна нулю только при $F_j(\tilde{x}) = 0$ для всех $j = \overline{1, M}$. Лемма 1 доказана.

Отсюда следует, что если область допустимых решений $\Omega = \Bigl\{ \tilde{x} \in B^N : F_0(\tilde{x}) = 0 \Bigr\} \neq \varnothing$, то решением задачи является верхний ноль функций $F_0(\tilde{x})$. Задача (17) сводится к задаче расшифровки монотонной ФАЛ или к поиску ее верхних нулей [4].

Псевдобулевая задача линейного программирования (17)

$$\min_{x \in \Omega} (c, \tilde{x}), \quad \Omega = \Bigl\{ \tilde{x} \in B^N :\ F_0(\tilde{x}) = 0 \Bigr\}, \tag{18}$$

с ДНФ ограничениями позволяет учитывать знания о решении задачи коммивояжера, которые представимы в ДНФ форме. Например, если необходимо включить прохождение дуг x_{kl} и x_{pm}, тогда к ограничениям добавляется условие $(x_{kl} - 1) \vee (x_{pm} - 1) = 0$. Если, наоборот, не включать, то $x_{kl} \vee x_{pm} = 0$ [25].

Полученный формализм позволяет учитывать знания о модели и решениях, использовать их в теоретических обоснованиях и конкретных алгоритмах решения.

4. Модели псевдобулевой условной оптимизации с дизъюнктивными ограничениями для задачи многих коммивояжеров

Задаче многих коммивояжеров ($mTSP$) с общими интересами соответствует одна целевая функция, выражающая минимум общего расстояния, как и в задаче для одного коммивояжера. Ограничения линейные. Задача приводится к задаче псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивными ограничениями.

При большой размерности задачи (сложность сети) условной псевдобулевой оптимизации с ДНФ ограничениями применять полиномиальные алгоритмы, предназначенные для такого класса задач, может быть нерационально. Требуется упрощение задачи (применение приближенных, эвристических методов) с помощью отсечения излишних вариантов перебора на основе имеющихся знаний. Прежде всего снижение сложности (размерности) достигается с помощью кластеризации сети. При этом количество агентов, количество депо и их расположение, количество кластеров может быть задано, искомо или быть произвольным.

Следуя идеологии свед́ения исходной задачи к нескольким задачам меньшей размерности, рассмотрим следующий подход к решению задачи маршрутизации для многих агентов. Пусть $m = 2$ (два агента).

Алгоритм решения задачи для двух коммивояжеров ($AmTSP$).

Вход: сеть $S = (G, C)$, $G = (U, V)$, $n = |V|$, U – множество дуг,
C – матрица расстояний (весов); информация о структуре сети.
Выход: маршруты коммивояжеров, длина общего маршрута.

1: Провести кластеризацию сети: $S = S_1 \cup S_2$, $G = G_1 \cup G_2$, $V = V_1 \cup V_2$ ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$).
2: На сетях S_1, S_2 сформировать задачи коммивояжеров, выписать все основные и дополнительные ограничения.
3: Трансформировать задачи коммивояжеров к задачам псевдобулевой оптимизации с ДНФ ограничениями.
4: Найти решения задач с ДНФ ограничениями.
5: Провести локальные преобразования, обмениваясь вершинами множеств V_1, V_2. Добавление вершины приводит к изменению ДНФ ограничений (добавление интервалов конъюнкций).
Алгоритм остается полиномиальным.
6: Выбрать лучший вариант (или провести заданное число итераций).
7: Получить решение исходной задачи.

Каждый шаг алгоритма $AmTSP$ конкретизируется в зависимости от структуры (сложности) исходной сети и всей имеющейся информации (знаний).

Задача каждого коммивояжера на выделенном кластере является задачей скалярной псевдобулевой условной оптимизации, т.е. может быть представлена в канонической форме с дизъюнктивными ограничениями (9):

$$(19) \qquad \min\left\{ f_k(\tilde{x}) = (c^k, \tilde{x}) = \sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} c_{ij}^k x_{ij},\ \bigvee_{j=1}^{m_k} x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \&\ \ldots\ \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}} = 1,\ k = \overline{1,m} \right\}.$$

Каноническая модель является исчерпывающей в своем классе в силу полноты. Левая часть ограничения (19) является ДНФ характеристической функции множества Ω^k-ограничений искомой задачи на k-м кластере, в которой может быть учтена дополнительная информация о структуре кластера и искомого решения (запреты, предписания и др.).

В случае общих интересов модель будет однокритериальной:

$$(20) \qquad \min f_0(\tilde{x}) = \min \sum_{k=1}^{m} f_k(\tilde{x}),\ \bigvee_{j=1}^{M} x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \&\ \ldots\ \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}} = 1.$$

Процессом выбора решения будем называть поиск такого набора значений $\alpha \in B^N$, признаковых предикатов, чтобы (одновременно или по отдельности):

— обращался в единицу один или несколько целевых предикатов;

— достигала экстремального значения несколько (или одна в однокритериальной постановке) псевдобулевых функций f_k, $k = \overline{1,m}$.

Единственное ограничение канонической модели (20) в виде ДНФ характеристического множества ограничений задает И/ИЛИ граф, которому соответствует логическая система продукций. Существование логической системы продукций (ЛСП)

$$x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \&\ \ldots\ \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}} \to g_j,$$
$$g_j \to g_0, \quad j = \overline{1,M},$$

позволяет выводить целевой факт $g_0 =$ “$\tilde{x}$ — допустимое решение”. Граф И/ИЛИ ограничения канонической модели задачи $mTSP$ является трехъярусным. Любой граф ЛСП, не имеющий циклов, может быть сведен к трехъярусному и представлен в виде ДНФ. Отсюда следует, что соответствующая база знаний (БЗ) системы построения допустимого решения $mTSP$ должна удовлетворять следующим требованиям:

1) решения $mTSP$ должны удовлетворять ограничениям задачи, следовательно, ЛСП должна обеспечивать возможность вывода целевых предикатов, соответствующих этим ограничениям;

2) группа ограничений, которые должны выполняться одновременно, задаются вершиной типа “И”, связывающей эти ограничения вместе.

Заметим, что ДНФ ограничение может быть получено с помощью обучения по прецедентной (эмпирической) информации [6, 7]. Для синтеза ДНФ по заданным ЛСП можно использовать D- и DS-алгоритмы [3], реализующие соответственно стратегии “сверху вниз” и “снизу вверх”, т.е. реализуется синтез областей допустимости решений в знаниеориентированных продукционных системах моделей псевдобулевой условной оптимизации, соответствующих $mTSP$ (в этих же публикациях можно найти оценки сложности алгоритмов).

Вопрос полноты знаний об ограничениях в БЗ задачи коммивояжера является важным и рассматривается самостоятельно в теории знаниеориентированных систем.

Уточним шаги 4, 5 алгоритма $AmTSP$ с точки зрения преодоления неопределенности (для $m = 2$, аналогичная ситуация для $m > 2$). Задачи псевдобулевой оптимизации для каждого кластера имеют вид:

$$\begin{gathered} \min f_1(\tilde{x}) = \min(c^1, \tilde{x}), \quad F_1(\tilde{x}) = 0, \\ \min f_2(\tilde{x}) = \min(c^2, \tilde{x}), \quad F_2(\tilde{x}) = 0, \\ c^k = (c^k_{11}, c^k_{12}, \dots, c^k_{nn}) \equiv (c^k_1, c^k_2, \dots, c^k_j, \dots, c^k_N), \\ \tilde{x} \in B^N, \quad N = n^2, \quad F_k(\tilde{x}) \in P_2(N), \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{21}$$

В том случае, когда кластеры определены единственным образом, а целевые функции и ограничения заданы точно, решение полученных задач на кластерах сводится к расшифровке монотонной функции алгебры логики (или к поиску ее верхних нулей). В более общем случае модели $mTSP$ получены как неполное представление исходной задачи $mTSP$: когда в результате кластеризации (или при другом сведении и задаче меньшей размерности) при исследовании линейной модели не удалось получить полную информацию о ее ограничениях. Но по доказанному выше $F_j(\tilde{x})$ являются монотонными функциями алгебры логики.

Будем предполагать, что существуют множества

$$\begin{gathered} M^{F_k}_{k0} = \Big\{\tilde{x} \in B^N : F_k(\tilde{x}) = 0\Big\}; \quad M^{F_k}_{k1} = \Big\{\tilde{x} \in B^N : F_k(\tilde{x}) = 1\Big\}; \\ M^{f_k}_{k0} = \Big\{\tilde{x} \in B^N : f_k(\tilde{x}) = 0\Big\}; \quad M^{f_k}_{k1} = \Big\{\tilde{x} \in B^N : f_k(\tilde{x}) = 1\Big\},\ k = 1, 2. \end{gathered} \tag{22}$$

С позиции первого коммивояжера ($k = 1$) $F_k(\tilde{x})$ — функция, определяющая допустимые решения, задана частично с помощью указания множеств наборов $M^{f_k}_{k0}, M^{f_k}_{k1}$ (прецедентов или фактов), т.е. заданы некоторые частичные функции алгебры логики f_k, $k = 1, 2$.

Пусть Φ_k — множество монотонных функций алгебры логики из $P_2(n)$, принимающих значение “0” на множестве $M^{f_k}_{0k}$ и значение “1” на множестве $M^{f_k}_{1k}$, а $Z_k(\Phi_k)$ — множество всех верхних нулей всех функций из Φ_k.

Непротиворечивым решением задач (21) называется такой набор $\tilde{z}_k^* \in \in Z_k(\Phi_k)$, что

$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k z_j^* = \min_{z \in Z_k(\Phi_k)} \sum_{j=1}^{N} c_j^k z_j.$$

Не теряя общности, можно считать, что булевы переменные упорядочены так, что $c_1^k > \ldots > c_N^k$. Это легко выполнить для любой исходной задачи.

Теорема 4. Функция $f_k \in P_2(N)$, не являющаяся константой, монотонна тогда и только тогда, когда для любых пар вершин $\tilde{x}, \tilde{y} \in B^N$ таких, что $f_k(\tilde{x}) = 1$, $f_k(\tilde{y}) = 0$, найдется переменная с номером $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ такая, что $x_i = 1$, $y_i = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Докажем необходимость методом от противного. Пусть $f_k \in P_2(N)$ не константа, монотонна и не существует переменной с номером $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ такой, что $x_i = 1$, $y_i = 0$, т.е. $x_i \leqslant y_i$, $i = \overline{1, N}$. Тогда $\tilde{x} \preccurlyeq \tilde{y}$, но $f_k(\tilde{x}) > f_k(\tilde{y})$, что противоречит условию монотонности функции f_k.

Достаточность. Рассмотрим три множества пар наборов $\tilde{x}, \tilde{y} \in B^N$:

$$W_{k1} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \ f_k(\tilde{x}) = 1, \ f_k(\tilde{y}) = 0\};$$
$$W_{k2} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \ f_k(\tilde{x}) = 0, \ f_k(\tilde{y}) = 1\};$$
$$W_{k3} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : \ f_k(\tilde{x}) = f_k(\tilde{y})\}.$$

Пусть $\tilde{x} \in W_{k1}$. Тогда $f_k(\tilde{x}) > f_k(\tilde{y})$ и по условию теоремы 4 найдется такой индекс i, что $x_i > y_i$. Следовательно, либо $\tilde{x} \succ \tilde{y}$, либо наборы $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ – несравнимы. Для всех сравнимых наборов из W_{k1} имеем: $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ и $f_k(\tilde{x}) > f_k(\tilde{y})$.

Аналогично проверяется выполнение условия монотонности функции f_k на множества W_{k2}.

Пусть $\tilde{x} \in W_{k3}$, тогда $f_k(\tilde{x}) = f_k(\tilde{y})$, в том числе всегда, когда $\tilde{x} \preccurlyeq \tilde{y}$. Учитывая, что объединение $W_{k1} \cup W_{k2} \cup W_{k3}$ содержит любую пару вершин куба B^N, получаем, что f_k – монотонная функция: если $\tilde{x} \preccurlyeq \tilde{y}$, то $f_k(\tilde{x}) \leqslant f_k(\tilde{y})$. Теорема 4 доказана.

На основании теоремы 4 можно сделать следующий вывод. Если во множествах $M_{k0}^{f_k}$ и $M_{k1}^{f_k}$ частичной функции алгебры логики f_k найдутся такие наборы $\tilde{\alpha} \in M_{k0}^{f_k}$ и $\tilde{\beta} \in M_{k1}^{f_k}$, что не существует переменной с номером $i \in \{1, \ldots, N\}$, для которой $\alpha_i < \beta_i$, то f_k не может быть доопределена монотонной функцией.

Пусть частичная функция f_k доопределена монотонной функцией φ_k. Необходимо, чтобы $M_{k1}^{f_k} \subseteq M_{k1}^{\varphi_k}$, $M_{k0}^{f_k} \subseteq M_{k0}^{\varphi_k}$, следовательно, любой набор из $M_{k1}^{f_k}$ должен покрываться некоторым интервалом $N_j^k \subseteq M_{k1}^{\varphi_k}$, но N_j^k не должен содержать точек из $M_{k0}^{f_k}$, каждый набор из $M_{k0}^{f_k}$ должен покрываться некоторым интервалом $N_L^k \subseteq M_{k0}^{\varphi_k}$, но N_L^k не должен содержать точек из $M_{k1}^{f_k}$.

Класс монотонных функций φ_k, доопределяющих f_k, обозначим $\Phi_k \subset M_k$. Функции класса Φ_k определяют множество:

$$\overline{\Phi}_k = \Big\{ g_k \in P_2(N): \ g_k(\tilde{x}) = \overline{\varphi}_k(\tilde{x}), \varphi_k \in \Phi_k \Big\}.$$

Любая функция может быть представлена сокращенной дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) так, что может быть указан набор максимальных вне $M_{k1}^{f_k}$ интервалов, покрывающих все точки из множества $M_{k0}^{f_k}$.

Рассмотрим любой максимальный интервал $N_L^k \subseteq M_{k1}^{g_1}$ произвольной функции $g_k \in \overline{\Phi}_k$ и соответствующую ему элементарную конъюнкцию $L = \overline{x}_{i_1} \& \ \ldots \ \& \overline{x}_{i_r}$. Вхождение переменных в простую импликанту только с инверсиями доказывается с учетом монотонности функции $\overline{g}_k(\tilde{x})$. Набор $\tilde{\alpha} \in N_L^k$ является допустимым решением, и в этом наборе $\alpha_{i_1} = 0, \ldots, \alpha_{i_r} = 0$. Среди всех наборов $\tilde{\alpha} \in N_L^k$ наибольшее значение целевой функции будет достигаться на наборе, в котором $\alpha_j = 1$ для всех j из множества $\{1, 2, \ldots, N\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$. Назовем такой набор экстремальным.

Если теперь для каждой простой импликанты всех функций из множества Φ_k выбрать экстремальный набор, то в полученном множестве будут содержаться все непротиворечивые решения задачи.

Различные доопределения функции f_k функциями $\varphi_k \in \Phi_k$ отличаются значениями $\varphi_k(\tilde{x})$ на множестве $B^N \setminus \Big\{ M_{k0}^{f_k} \cup M_{k1}^{f_k} \Big\}$, поэтому простые импликанты различных функций g_k из $\overline{\Phi}_k$ могут отличаться рангом. Экстремальная постановка задачи требует из всех простых импликант всех функций $g_k \in \overline{\Phi}_k$ выделить кратчайшие. Для построения таких простых импликант с инверсиями, необходимыми для любых доопределений, можно использовать следующий алгоритм.

Алгоритм построения простых импликант.

1: Для каждого набора $\tilde{\alpha} \in M_{k0}^{f_k}$ выписать конъюнктивную нормальную форму (КНФ) $K_k(\tilde{\alpha})$, каждая дизъюнкция которой состоит из переменных $\overline{x}_i$ (с инверсиями), таких, что $\alpha_i < \beta_i$ для одного из наборов $\tilde{\beta} \in M_{k1}^{f_k}$; КНФ $K_k(\tilde{\alpha})$ будет содержать $m_1^k = \left| M_{k1}^{f_k} \right|$ дизъюнкций — число наборов в множестве $M_{k1}^{f_k}$.

2: В полученных КНФ $K_k(\tilde{\alpha}_1), \ldots, K_k(\tilde{\alpha}_{m_0^k})$, где $m_0^k = |M_{k0}^{f_k}|$ (число наборов в $M_{k0}^{f_k}$), раскрыть скобки и выполнить операции поглощения, получая ДНФ $D_1, \ldots, D_{m_0^k}$.

3: Записать ДНФ $D_1 \vee \ldots \vee D_{m_0}$ и выполнить все возможные операции поглощения. Будет получена ДНФ $D(\overline{\Phi}_k)$.

Множества $M_{k0}^{f_k}$ и $M_{k1}^{f_k}$, являющиеся частью исходной информации в задаче (21) и содержащие $m_0^k + m_1^k$ двоичных наборов, можно рассматривать как стандартную обучающую информацию задачи Z_k распознавания: в обучающей таблице $T_{m_0^k m_1^k}^k = M_{k0}^{f_k} \cup M_{k1}^{f_k}$, наборы $\tilde{x} \in M_{k0}^{f_k}$ относятся к классу K_1^k допустимых решений задачи (21), а $\tilde{x} \in M_{k1}^{f_k}$ — к классу K_2^k недопустимых решений.

Обозначим через $A_z^k = A_z^k(T_{m_0^k m_1^k}, \tilde{x})$ алгоритм распознавания класса произвольного набора $\tilde{x} \in B^N \backslash T_{m_0^k m_1^k}$; пусть A_Z^{k*} — корректный алгоритм:

$$A_z^{k*}\left(T_{m_0^k m_1^k}, \tilde{x}\right) = \begin{cases} 1, \ \tilde{x} \in K_2^k = B^n \backslash \Omega_k, \\ 0, \ \tilde{x} \in K_1^k = \Omega_k, \ k = 1, 2. \end{cases}$$

Очевидно, что если информация в $T_{m_0^k m_1^k}$ достоверна и алгоритм A_z^{k*} относит экстремальный набор $\tilde{x}^*$, являющийся непротиворечивым решением задачи (21), к классу $K_1^k = \Omega_k$, то $\tilde{x}^*$ является решением задачи

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i^k x_i / \tilde{x} \in \Omega_k.$$

Пусть алгоритм A_z^k — экстремальный в некотором классе алгоритмов распознавания или построен с применением корректирующих (алгебраических) методов, т.е. является в некотором смысле наилучшим для решения задачи $Z_k(T_{m_0^k m_1^k}, \tilde{x})$.

Подход к решению $mTSP$ как задачи линейного псевдобулевого программирования с частично заданными ограничениями с применением алгоритмов распознавания образов состоит в следующем:

1) при помощи алгоритма находится множество экстремальных наборов $\aleph^k = \{\tilde{x}^*\}$ для задачи (21)–(22);

2) алгоритм A_z^k определяет принадлежность экстремальных наборов из $\aleph^k$ к классу K_1; $\aleph_A^k \subseteq \aleph^k$; $\aleph_A^k = \left\{\tilde{x}^* \in \aleph^k : A\left(T_{m_0^k m_1^k}, \tilde{x}^*\right) = 0\right\}$;

3) если $\aleph_A^k \neq 0$, то входящий в него экстремальный набор, которому соответствует наибольшее значение целевой функции, объявляется решением задачи;

4) если $\aleph_A^k = 0$, то к $M_{k1}^{f_k}$ добавляются наборы $\aleph^k$, т.е. $M_{k1}^{f_k} := M_{k1}^{f_k} \cup \aleph^k$, и повторяется п. 1, внутри которого обеспечивается проверка монотонности, обеспечивающая линейность модели.

Замечание 1. Добавление к множеству $M_{k1}^{f_k}$ множества экстремальных наборов $\aleph^k$ равносильно переопределению для некоторых функций алгебры логики верхних нулей единицами.

Линейность задачи $mTSP$ позволила эффективно “сузить” область поиска решения, что обеспечивается указанным алгоритмом (см. [9] по сужающим запросам).

5. Многокритериальные задачи многих коммивояжеров, представленные в канонической форме

Пусть задача $mTSP$ сводится к многокритериальной псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением:

$$
(23) \qquad \begin{cases} \min f_1(\tilde{x}),\ \min f_2(\tilde{x}),\ \ldots,\ \min f_m(\tilde{x}), \\ \bigvee\limits_{j=1}^{m} x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \ldots \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}} = 1, \\ f_k \in LPS_2(N), \quad k = \overline{1,m}, \quad \tilde{x} \in B^N. \end{cases}
$$

Отметим, что задачи псевдобулевой оптимизации возникают как результат синтеза моделей $mTSP$ на основе индуктивного обобщения или построения логического описания области дедуктивной выводимости в системах, основанных на знаниях.

Необходимо найти паретовское множество $\mathcal{P}$ задачи (23), его логическое описание в виде дизъюнктивной нормальной формы и подходов к выбору решения $\tilde{x}^* \in \mathcal{P}$. Для этого используем необходимое условие принадлежности точки множеству Парето и принцип ветвей и границ.

В задаче $mTSP$ учитывается информация о распределении весов дуг. Выбор прохождения тех или иных дуг для коммивояжера зависит от среднего значения веса дуги, дисперсии (при большой дисперсии преобладают дуги с большими весами). Если в матрице весов вычесть среднее значение веса, получим новую матрицу весов с положительными и отрицательными значениями. Такие матрицы появляются в процессе реализации некоторых алгоритмов TSP. Поэтому необходимое условие принадлежности точки множеству Парето учитывает знаки коэффициентов c_j^k, $j = \overline{1,N}$, $N = n^2$, $k = \overline{1,m}$.

Рассмотрим необходимое условие принадлежности точки множеству Парето в задаче безусловной оптимизации.

Обозначим через P_i множество номеров переменных, имеющих положительный, а через N_i — множество номеров переменных, имеющих отрицательный коэффициент в линейной функции f_i, $i = \overline{1,m}$. Пусть

$$
P_0 = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_m, \quad N_0 = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_m.
$$

Л е м м а 2. *Если для задачи безусловной многокритериальной оптимизации $mTSP$*

$$
(24) \qquad \begin{cases} \min f_1(\tilde{x}),\ \min f_2(\tilde{x}),\ \ldots,\ \min f_m(\tilde{x}), \\ \tilde{x} \in B^N,\ f_1, \ldots, f_m \in LPS_2(N), \end{cases}
$$

множества P_0 и N_0 непусты и точка $\tilde{x}^*$ является паретовской, то она удовлетворяет уравнению

$$
(25) \qquad \left(\mathop{\&}_{i \in P_0} x_i \right) \left(\mathop{\&}_{i \in N_0} \overline{x}_i \right) = 1.
$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}$ — любая точка, удовлетворяющая уравнению (25). Тогда найдется такое i, что $\alpha_i = 0$ при $i \in P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_m$ или $\alpha_i = 1$ при $i \in N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_m$. Заменяя α_i на $\overline{\alpha}_i$, получим точку $\tilde{\alpha}'$ такую, что $f_1(\tilde{\alpha}') < f_1(\tilde{\alpha})$, $f_2(\tilde{\alpha}') < f_2(\tilde{\alpha}), \ldots, f_m(\tilde{\alpha}') < f_m(\tilde{\alpha})$ и тогда $\tilde{\alpha}$ — не является паретовской точкой. Лемма 2 доказана.

Замечание 2. Если $P_0 \neq \varnothing$ и $N_0 \neq \varnothing$, то необходимыми условиями эффективности точки $\tilde{x}^*$ в задаче (24) являются $\underset{i \in P_0}{\&} x_i = 1$ и $\underset{i \in N_0}{\&} \overline{x}_i = 1$. Если $P_0 \neq \varnothing$ и $N_0 = \varnothing$, то необходимым условием эффективности точки $\tilde{x}^*$ в задаче (24) является $\underset{i \in P_0}{\&} x_i = 1$. Если $P_0 = \varnothing$ и $N_0 \neq \varnothing$, то необходимым условием эффективности точки $\tilde{x}^*$ в задаче (24) является $\underset{i \in N_0}{\&} \overline{x}_i = 1$.

Определение 6. Нижней векторной оценкой допустимого множества X называется вектор

$$\left(\min_{\tilde{x} \in X} f_1(\tilde{x}),\ \min_{\tilde{x} \in X} f_2(\tilde{x}),\ \ldots,\ \min_{\tilde{x} \in X} f_m(\tilde{x})\right).$$

Определение 7. Вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ мажорируется вектором $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, если $a_j \leqslant b_j$ для всех $j = \overline{1, m}$, причем хотя бы для одного j выполняется строго неравенство $a_j < b_j$.

Определение 8. Рекордом называется вектор значений скалярных критериев в некоторой допустимой точке $\tilde{\gamma}$, который не мажорируется никаким другим имеющимся рекордом или нижней векторной оценкой, полученной для какого-либо подмножества допустимого множества решений.

Будем использовать метод ветвей и границ (см. [3, 8] для данного класса задач). Ветвление будем осуществлять путем фиксации значений 0 и 1 переменных x_i, $i = \overline{1, N}$. На каждом шаге ветвления будет происходить измельчение множества B^N и порождение подмножеств-интервалов, подлежащих исследованию.

Интервал подлежит исключению из рассмотрения в следующих случаях:

а) существует рекорд, мажорирующий верхнюю векторную оценку этого интервала;

б) известен другой интервал, нижняя векторная оценка которого мажорирует верхнюю векторную оценку этого интервала. Интервал подлежит ветвлению, если он не подлежит исключению и его верхняя векторная оценка отличается от нижней. Выбор переменной и интервала, подлежащего ветвлению, является эвристическим элементом метода и будет рассмотрен далее.

Рассмотрим задачу (24) с добавлением дизъюнктивных ограничений.

Теорема 5. Пусть в задаче (24) *существует непустое множество Парето $\mathcal{P}$, и к данной задаче добавляется ограничение $\tilde{x} \in \Omega$; $\Omega \neq \varnothing$; $\Omega \subset B^N$, $\Omega \neq B^N$. Для полученной задачи множество $\mathcal{P} \cap \Omega$, если оно не пусто, будет состоять только из паретовских точек.*

Доказательство. Пусть $\tilde{x}^* \in \{\mathcal{P} \cap \Omega\}$. Тогда $\tilde{x}^* \in \mathcal{P}$ и не мажорируется ни одной точкой из B^N и, тем более, — ни одной точкой из $\mathcal{P} \cap \Omega$, а так как

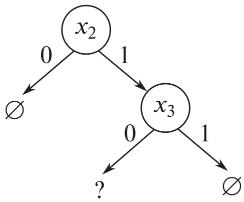

Рис. 2. Начальное дерево.

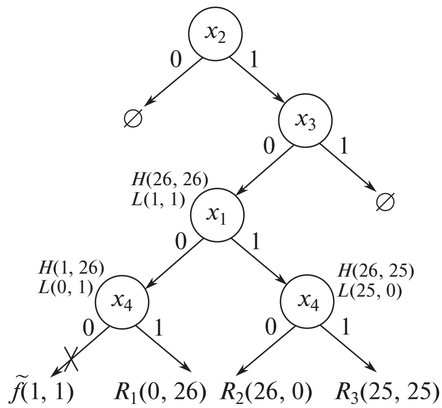

Рис. 3. Результат решения задачи.

$\tilde{x}^* \in \Omega$, то она является допустимой. Таким образом, $\tilde{x}^*$ — немажорируемая допустимая точка, следовательно, является паретовской. Теорема 5 доказана.

Условие (25) не является достаточным. В этом можно убедиться, рассмотрев следующий упрощенный пример:

$$\begin{cases} \min f_1(\tilde{x}) = -25x_1 - x_2 + x_3 + x_4; \\ \min f_2(\tilde{x}) = x_1 - x_2 + x_3 - 25x_4; \\ \tilde{x} \in B^N. \end{cases}$$

Очевидно, что $P_1 \cap P_2 = \{2\}$; $N_1 \cap N_2 = \{3\}$. Условие (25) принимает вид: $x_2\overline{x}_3 = 1$. Этому условию удовлетворяет точка $\tilde{\beta} = (0, 1, 0, 0)$, но она не паретовская: взяв точку $\tilde{\gamma} = (1, 1, 0, 1)$, убеждаемся, что $-25 = f_1(\tilde{\gamma}) < f_1(\tilde{\beta}) = -1$, $-25 = f_2(\tilde{\gamma}) < f_2(\tilde{\beta}) = -1$.

Найдем множество Парето в задаче безусловной многокритериальной оптимизации. Используем необходимое условие, которому должны удовлетворять эффективные точки: $x_2\overline{x}_3 = 1$. Начальное дерево представлено на рис. 2.

Знак “$\varnothing$” указывает на отсутствие эффективных точек в интервале, соответствующем ветви; знак “?” — на необходимость дальнейшего ветвления.

Обозначим через $H(y_1, y_2)$ вектор верхних и через $L(y_1, y_2)$ вектор нижних достижимых оценок функций f_1, f_2, $R(\alpha, \beta)$ — рекорд.

Результат решения задачи представлен на рис. 3.

Знак “$\times$” указывает на отсечение интервала.

Множество Парето состоит из трех точек $\{0101, 1100, 1101\}$, являющихся рекордными (R_1, R_2, R_3), и имеет логическое описание: $\mathcal{P} = \Big\{\tilde{x} : \ x_1x_2\overline{x}_3 \bigvee \bigvee x_2\overline{x}_3x_4 = 1\Big\}$.

Замечание 3. Условие $\tilde{x} \in \mathcal{P} \cap \Omega$, как следует из теоремы 5, является достаточным для того, чтобы точка $\tilde{x}$ была паретовской в задаче с ограничением $\tilde{x} \in \Omega$ при $\mathcal{P} \cap \Omega \neq \varnothing$. Однако это условие не является необходимым.

Действительно, в задаче

$$\begin{cases} \min f_1(\tilde{x}) = -25x_1 - x_2 + x_3 + x_4; \\ \min f_2(\tilde{x}) = x_1 - x_2 + x_3 - 25x_4; \\ \tilde{x} \in \Omega = \{\tilde{x} : \ \overline{x}_1 x_2 = 1\} \subset B^N \end{cases}$$

паретовскими являются точки $\{0100, 0101\}$ со значениями векторов критериев $(-1, -1)$ и $(0, -26)$ соответственно, причем точка $\{0100\}$ не принадлежит множеству $\mathcal{P} \cap \Omega$.

Рассмотрим варианты выбора интервалов и переменных для ветвления.

От последовательности выбора интервалов и переменных для ветвления зависит скорость нахождения решения задачи. Стратегии ветвления являются эвристиками, например (возможны другие):

1) разбиению по переменной с номером i подвергается тот интервал множества допустимых решений, конъюнкция которого не содержит литерала переменной с номером i, и изменение этой переменной с единицы на нуль обеспечивает одновременное уменьшение как можно большего числа скалярных критериев;

2) разбиению подвергается тот интервал, для которого является максимальной следующая мера различия между верхней $H = (h_1, \ldots, h_m)$ и нижней $L = (l_1, \ldots, l_m)$ его векторными оценками:

$$D(H, L) = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} \left(\frac{h_j - l_j}{M_j - \mu_j} \right),$$

где $M_j = \max_{\tilde{x} \in \Omega} f_j(\tilde{x})$; $\mu_j = \min_{\tilde{x} \in \Omega} f_j(\tilde{x})$; $M_j - \mu_j > 0$, поскольку в противном случае критерий f_j может быть исключен из рассмотрения.

Можно привести пример задачи многокритериальной псевдобулевой оптимизации, для которой процесс принятия решения по изложенному методу будет близок к полному перебору. В расчете на такие ситуации возможен приближенный подход к решению, суть которого состоит в следующем.

Пусть заданы значения $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \mathbb{R}^+$. Будем говорить, что два вектора $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ являются $\tilde{\varepsilon}$-равными, если $|a_i - b_i| \leqslant \varepsilon_i$, $i = \overline{1, m}$.

Если верхняя и нижняя векторные оценки некоторого интервала, полученного при ветвлении, $\tilde{\varepsilon}$-равны, то такой интервал называется $\tilde{\varepsilon}$-интервалом.

Если нижняя векторная оценка некоторого $\tilde{\varepsilon}$-интервала мажорируется рекордом или нижней векторной оценкой другого интервала, то такой $\tilde{\varepsilon}$-интервал подлежит исключению.

Совокупность немажорируемых $\tilde{\varepsilon}$-интервалов вместе с рекордами дает приближение к искомому паретовскому множеству. Логическое описание паретовского множества $\mathcal{P}$ получается обратным проходом по ветвям деревьев ветвлений, листья которых соответствуют немажорируемым элементам.

Таким образом, предложены методы решения многоэкстремальных задач, представленных в канонической форме. Показано, как использование метода ветвей и границ решения таких задач позволяет строить логическое описание паретовского множества.

6. Заключение

В статье представлен класс задач для многих коммивояжеров, который приведен или достаточно просто приводится к моделям псевдобулевой условной оптимизации с ограничениями в виде дизъюнктивных нормальных форм. Предложен алгоритм, основанный на кластеризации графа, согласно которому на каждом кластере решаются задачи для одного коммивояжера, представленные в канонической форме скалярной псевдобулевой оптимизации и дизъюнктивными ограничениями. Указывается на возможность формирования ДНФ ограничений с помощью обучения по прецедентной информации, а тем самым — синтез областей допустимости решений в продукционных системах моделей псевдобулевой оптимизации, соответствующих $mTSP$. Предложен подход с частично заданными ограничениями, основанный на применении алгоритмов распознавания образов. Методика распространяется на многокритериальный случай задач $mTSP$.

Прикладные аспекты применения полученных результатов требуют учета всех компонент задачи $mTSP$ в сложных сетях.

Разработка приближенных алгоритмов выбора маршрутов в сложных сетях может быть связана с учетом знаний о свойствах структуры сети, ее сложности, наличием ограничений, предписаний, условий достижимости, числа агентов-коммивояжеров.

Необходимо будет учитывать специфику задач маршрутизации в сложных сетях, которая, в отличие от классической теории графов, связана с рядом уникальных задач: о нахождении метрических характеристик сложных сетей; поиск минимального (максимального) среднего пути в сети; коэффициентов кластеризации; изучения информационных потоков в сети; выявление критичных мест в сети; определения кластеров; выявление блоков, компонент, мостов, точек сочленения (перемычек).

Методология разработки алгоритма решения задач маршрутизации может быть основана на формировании по исходной сложной сети более простой (относительно реализации алгоритмов маршрутизации) по своей структуре сети. Построение рациональных решений $mTSP$ на сетях большой размерности реализуется по схеме алгоритма $AmTSP$ для m коммивояжеров. В случае разных интересов агентов приходим к многокритериальной задаче псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивными ограничениями. Здесь возможны игровые модели.

Дальнейшие исследования также связаны с обучением агентов-коммивояжеров, их автономностью и организацией обмена прецедентной информацией между агентами (системами управления). При этом в многоагентной системе (МАС) $mTSP$ должны сочетаться задачи выбора решения; управления; распределения ресурсов; синтеза сети (вершин-источников ресурсов); устойчивости сети в зависимости от удаления вершины, дуги или некоторого маршрута;

кластеризации сети в зависимости от изменяющихся условий; обмена информацией между агентами; потоковые задачи; задачи прокладки кратчайших путей и замкнутых маршрутов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антамошкин А.А., Масич И.С.* Поисковые алгоритмы псевдобулевой оптимизации // Системы управления, связи и безопасности. 2016. № 1. С. 103–145.
2. *Германчук М.С., Козлова М.Г., Лукьяненко В.А.* Знаниеориентированные модели маршрутизации многих коммивояжеров // Интеллектуализация обработки информации // Тез. докл. 13-й Междунар. конф., Москва, 2020. С. 352–355.
3. *Донской В.И., Башта А.И.* Дискретные модели принятия решений при неполной информации. Симферополь: Таврия, 1992.
4. *Донской В.И.* Задачи псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением // Журн. выч. матем. и матем. физ. 1994. № 4. С. 461–472.
5. *Donskoy V., Perekhod I.* Multiple Criteria Models with the Linear Pseudoboolean Functions and Disjunctive Restrictions / Fandel G., Gal T. (eds). Multiple Criteria Decision Making. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. V. 448. Berlin–Heidelberg: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-3-642-59132-7_2
6. *Donskoy V.I.* A Synthesis of Pseudo-Boolean Empirical Models by Precedential Information // Bulletin SUSU MMCS. 2018. V. 11. No. 2. P. 96–107.
7. *Козлова М.Г.* Знаниеориентированные модели принятия решений // Ученые записки СГУ. 1998. № 7 (46). С. 76–83.
8. *Козлова М.Г.* Многокритериальные модели принятия решений с линейными псевдобулевыми функциями и дизъюнктивным ограничением // Искусственный интеллект. 2000. № 2. С. 67–73.
9. *Козлова М.Г.* Синтез сужающих запросов // Динамические системы. 2000. Вып. 16. С. 208–211.
10. *Масич И.С.* Поисковые алгоритмы условной оптимизации: монография. Красноярск: СибГАУ. 2013.
11. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Вопросы теории // АиТ. 1989. № 9. С. 3–33.

    Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.K. The Traveling Salesman Problem. Issues in Theory // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 9. P. 1147–1173.
12. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Точные методы // АиТ. 1989. № 10. С. 3–29.

    Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.K. The Traveling Salesman Problem. Exact Methods // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 10. P. 1303–1324.
13. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // АиТ. 1989. № 11. С. 3–26.

    Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.K. The Traveling Salesman Problem. Approximate Algorithms // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 11. P. 1459–1479.
14. *Германчук М.С., Лемтюжникова Д.В., Лукьяненко В.А.* Метаэвристические алгоритмы для многоагентных задач маршрутизации // Проблемы управления. 2020. Т. 6. С. 3–13.
15. *Grama Y., Hammer P.L.* Boolean Functions: Theory, Algorithms and Applications. – N.Y.: Cambridge Universuty Press, 2011.

16. *Hammer P.L., Rudeanu S.* Boolean Methods in Operations Research and Related Areas. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer-Verlag, 1968.

17. *Foldes S., Hammer P.L.* Disjunctive and Cojunctive Normal Forms of Pseudo-Boolean Functions // Descrete Appl. Math. 2000. No. 107. P. 1–26.

18. *Boros E., Hammer P.L.* Pseudo-Boolean Optimization // Descrete Appl. Math. 2002. No. 123. P. 155–225.

19. *Hammer P.L.* Pseudo-Boolean Remarks on Balanced Graphs // Int. series of Numerical Math. 1977. No. 36. P. 69–78.

20. *Ebenegger Ch., Hammer P.L., de Werra D.* Pseudo-Boolean Functions and Stability of Graphs // Annals of Descrete Math. 1984. No. 19. P. 83–97.

21. *Журавлев Ю.И.* О локальных алгоритмах над дизъюнктивными нормальными формами // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 2. С. 289–292.

22. *Журавлев Ю.И., Коган А.Ю.* Реализация булевых функций с малым числом нулей дизъюнктивными нормальными формами и смежные задачи // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 4. С. 795–799.

23. *Hammer P.L., Rudeanu S.* Pseudo-Boolean Methods for Bivalent Programming // Lecture Notes in Math. Sept. 2–7, 1966.

24. *Сапоженко А.А.* О поиске максимального верхнего нуля монотонных функций на ранжированных множествах // Журн. выч. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 12. С. 1871–1884.

25. *Германчук М.С., Козлова М.Г., Лукъяненко В.А.* Задачи практической маршрутизации // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем. Сб. науч. тр. XI Междунар. школы-симпозиума АМУР, 2017. С. 116–120.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 24.01.2021

После доработки 16.03.2021

Принята к публикации 30.06.2021