

© 2021 г. А.А. ЛАЗАРЕВ, д-р. физ.-мат. наук (jobmath@mail.ru),
Д.В. ЛЕМТЮЖНИКОВА, канд. физ.-мат. наук (darabbt@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.А. ТЮНЯТКИН (andtun@yandex.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

МЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ МАКСИМАЛЬНОГО ВРЕМЕННОГО СМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ПРИБОРА¹

Статья основана на использовании методов непрерывной математики в дискретных задачах. Рассматриваются три новых подхода к решению задач теории расписаний: метрический, интерполяционный и комбинированный — метрическая интерполяция. Метрическая интерполяция является объединением двух других и совмещает в себе их преимущества. Каждый из этих подходов позволяет сокращать время решения соответствующих задач и вычислять значения гарантированной абсолютной погрешности целевой функции.

Ключевые слова: теория расписаний, метрический подход, интерполяция, аппроксимация, дискретная оптимизация.

DOI: 10.31857/S0005231021100081

1. Введение

Подавляющее большинство задач теории расписаний NP-трудны [1]. Для решения таких задач часто используются быстрые алгоритмы, производительность которых сильно зависит от входных данных. Предлагается новый подход нахождения приближенных решений задач теории расписаний — метрическая интерполяция. Данный метод — это комбинация двух различных подходов, интерполяционного и метрического [1, 2], благодаря совместному использованию которых возможно:

- 1) использовать приближенное значение целевой функции как начальное решение для итерационных методов;
- 2) аппроксимировать решение задачи теории расписаний, используя некоторый класс полиномиально разрешимых примеров (при его существовании);
- 3) аппроксимировать значение целевой функции задачи даже при отсутствии полиномиально разрешимых примеров, используя интерполяционный подход.

Следует сразу отметить, что метрическая интерполяция — подход, который используется для ускорения работы уже существующих алгоритмов решения задач теории расписаний. В связке с рассматриваемым подходом могут

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-58-S52006).

быть использованы алгоритмы решения задач теории расписаний, рассмотренные, например, в [1, 3, 4]. Для работы со случайными данными могут быть использованы алгоритмы и методы из [5], а метрическая интерполяция ускоряет их выполнение при обработке трудных случаев.

Поскольку интерполяционный подход работает лишь со значениями целевой функции, с его помощью можно составлять и расписания многостадийных систем, решая задачи, например, алгоритмами из [6]. Метрический подход можно использовать для этой цели при небольшой модификации, рассмотренной в [2].

Для определенности, в данной статье рассматривается решение задачи минимизации максимального временного смещения $1|r_j|L_{\max}$ с помощью двойственного алгоритма [7] и трех подходов, которые упомянуты выше.

2. Задача минимизации максимального временного смещения для одного прибора

2.1. Постановка задачи минимизации максимального временного смещения

В задаче $1|r_j|L_{\max}$, которую будем рассматривать, задано множество из n требований $N = \{1, \dots, n\}$. Для каждого требования j заданы: время поступления r_j , длительность выполнения p_j и директивный срок d_j [1]. Под *расписанием* π будем подразумевать некоторую перестановку требований множества N . Введем время завершения требования j при расписании π :

$$(1) \quad C_j(\pi) = \max_{\pi} \left\{ r_j, \max_{(k \rightarrow j)_{\pi}} C_k(\pi) \right\} + p_j.$$

Здесь $(k \rightarrow j)_{\pi}$ — требования, которые выполняются перед работой j при расписании π .

Таким образом, задача минимизации максимального временного смещения состоит в нахождении такого расписания π_0 , при котором целевая функция принимает минимальное значение:

$$(2) \quad L_{\max}(\pi_0) = \min_{\pi} \max_{j=1, \dots, n} \{C_j(\pi) - d_j\}.$$

Данная задача является NP-трудной в сильном смысле [8].

2.2. Пространство примеров размерности n

Рассмотрим пример A , который состоит из n заявок. Такой пример можно представить точкой в $3n$ -мерном пространстве с координатами $A(r_1, r_2, \dots, r_n, p_1, p_2, \dots, p_n, d_1, d_2, \dots, d_n)$. Для наглядности будем записывать эти координаты в виде матрицы $3 \times n$:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

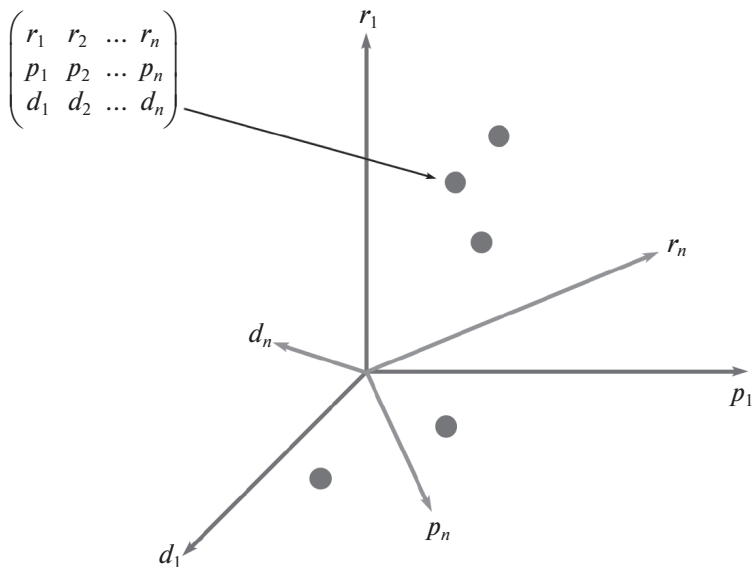


Рис. 1. $3n$ -мерное пространство примеров размерности n .

Далее в работе будем рассматривать каждый пример как точку в $3n$ -мерном пространстве примеров, состоящих из n требований (см. рис. 1). А само это пространство будем называть **пространством примеров размерности n** .

Более подробно о пространстве примеров размерности n см. [9].

3. Метрический подход

3.1. Идея подхода

В этом разделе представлены основы метрического подхода, который был предложен и описан более подробно в [1, 2].

Во введенном пространстве примеров размерности n зададим метрику.

Определение 1. Метрикой для произвольных примеров A и B называется функция $\rho(A, B)$, удовлетворяющая свойствам:

- (3) $\rho(A, B) \geq 0$;
- (4) $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
- (5) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;
- (6) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$ для всех A, B, C ;
- (7) $\rho(A, B) = \rho_d(A, B) + \rho_r(A, B) + \rho_p(A, B)$;
- (8) $\rho_d(A, B) = \max_{j \in N} \{d_j^A - d_j^B\} - \min_{j \in N} \{d_j^A - d_j^B\}$;
- (9) $\rho_r(A, B) = \max_{j \in N} \{r_j^A - r_j^B\} - \min_{j \in N} \{r_j^A - r_j^B\}$;
- (10) $\rho_p(A, B) = \sum_{j \in N} (|p_j^A - p_j^B|)$.

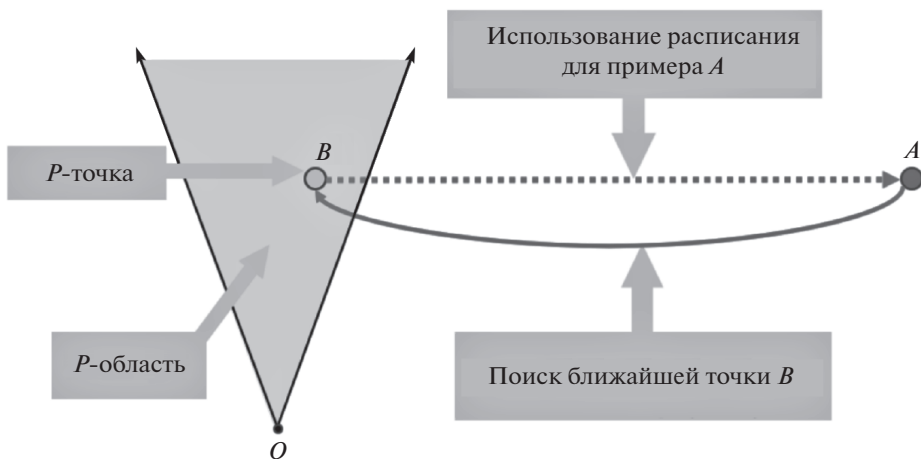


Рис. 2. Метрический подход.

Можно доказать, что если решить задачу $1|r_j|L_{\max}$ для примера B и получить оптимальное расписание π^B , можно оценить погрешность при использовании расписания π^B в качестве решения той же задачи для исходного примера A .

Теорема 1. Пусть $\tilde{\pi}^B$ — приближенное решение примера B , удовлетворяющего $L_{\max}^B(\tilde{\pi}^B) - L_{\max}^B(\pi^B) \leq \delta_B$. Тогда

$$(11) \quad 0 \leq L_{\max}^A(\tilde{\pi}^B) - L_{\max}^A(\pi^A) \leq \rho(A, B) + \delta_B.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в [1, 2].

Согласно этой теореме, получается, что при принадлежности примера B некоторой полиномиально разрешимой области можно поступить следующим образом: решить пример B (за полиномиальное время), использовать полученное расписание для примера A и оценить погрешность, вычислив значение метрики $\rho(A, B)$.

Качественно опишем алгоритм решения задачи $1|r_j|L_{\max}$ при помощи метрического подхода. Будем обозначать через $L_{\max}^A(\pi)$ значения целевой функции для примера A при расписании π .

Алгоритм 1 (метрический подход).

- 1) Найти пример B из полиномиально разрешимой области, наиболее близкий к A по метрике $\rho(A, B)$;
- 2) найти оптимальное расписание π^B для примера B ;
- 3) применить расписание π^B к исходному примеру A ;
- 4) оценить погрешность согласно теореме 1: $0 \leq L_{\max}^A(\pi^B) - L_{\max}^A(\pi^A) \leq \rho(A, B)$.

На рис. 2 проиллюстрирована работа алгоритма 1.

Остается лишь поставить задачу нахождения примера B , наиболее близкого к исходному примеру A по метрике $\rho(A, B)$.

3.2. Поиск ближайшего полиномиально разрешимого примера

Рассмотрим множество точек, которые соответствуют полиномиально разрешимым примерам задачи. В пространстве примеров это множество задается следующей системой неравенств:

$$(12) \quad XR + YP + ZD \leq H,$$

где $R = (r_1, \dots, r_n)^T$, $P = (p_1, \dots, p_n)^T$ ($p_j \geq 0$ для всех $j \in N$), $D = (d_1, \dots, d_n)^T$ и X, Y, Z — некоторые матрицы размерности $k \times n$; а $H = (h_1, \dots, h_k)^T$ является k -мерным вектором, где верхний индекс T обозначает транспонирование.

Решив эту систему, сможем построить многомерный конус в пространстве примеров, все точки которого полиномиально разрешимы [9]. Например, в случае значений $Y = 0$, $Z = 0$ и произвольной матрицы X решением системы будет множество примеров Джексона [10].

Тогда в классе примеров (12) определим пример B с минимальным значением метрики $\rho(A, B)$ относительно исходного примера A , решив следующую задачу линейного программирования [9]:

$$(13) \quad \begin{cases} (x^d - y^d + x^r - y^r) + \sum_{j \in N} x_j^p \rightarrow \min, \\ y^d \leq d_j^A - d_j^B \leq x^d \quad \forall j \in N, \\ y^r \leq r_j^A - r_j^B \leq x^r \quad \forall j \in N, \\ -x_j^p \leq p_j^A - p_j^B \leq x_j^p \quad \forall j \in N, \\ 0 \leq x_j^p \quad \forall j \in N, \\ XR^B + YP^B + ZD^B \leq H. \end{cases}$$

После решения этой подзадачи остается лишь найти расписание для исходного примера, пользуясь алгоритмом 1.

Более подробно про метрический подход, классы полиномиально разрешимых примеров и задачи линейного программирования для этих классов см. [1, 2, 9].

3.3. Оценка сложности алгоритма

Сложность решения задачи с помощью метрического подхода напрямую зависит от трудоемкости алгоритма, используемого для решения примера из полиномиальной области. Для класса полиномиально разрешимых примеров Джексона [10], например, сложность алгоритма будет порядка $O(n \log n)$ без учета трудоемкости решения задачи (13).

4. Интерполяционный подход

4.1. Преобразования в пространстве примеров размерности n

Определение 2. Преобразованием $r'_j = \alpha r_j$ называется такое преобразование, которое ставит в соответствие примеру $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}$ пример $\begin{pmatrix} \alpha r_1 & \alpha r_2 & \dots & \alpha r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}$, где α – произвольное неотрицательное число: $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$.

Аналогично определяются преобразования $p'_j = \alpha p_j$ и $d'_j = \alpha d_j$.

Теорема 2. Все точки, полученные в результате какого-либо из преобразований $r'_j = \alpha r_j$, $p'_j = \alpha p_j$ или $d'_j = \alpha d_j$, лежат на одной прямой в пространстве примеров размерности n .

Из теоремы 2 следует, что любые точки, полученные в результате какого-либо из предложенных преобразований исходного примера, лежат на одной прямой в этом $3n$ -мерном пространстве, причем эта прямая содержит и исходный пример (при $\alpha = 1$). Иллюстрация к этому утверждению приведена на рис. 3. Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении 1.

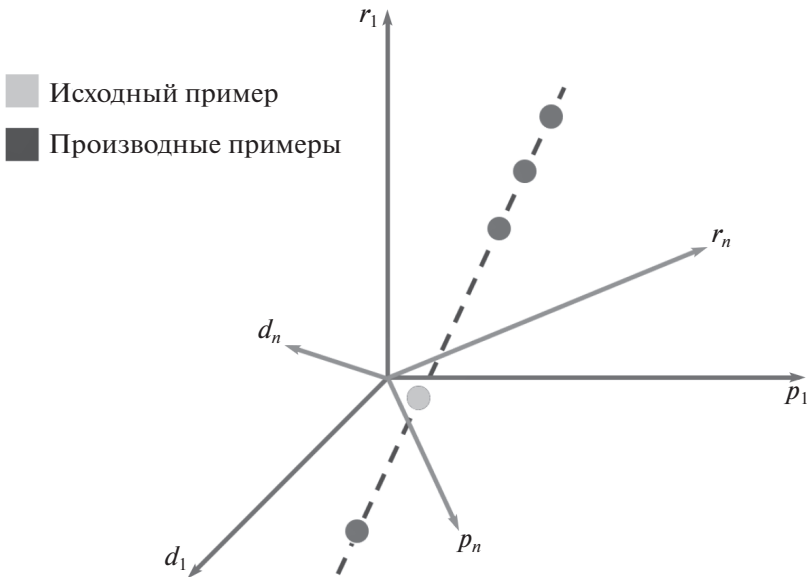


Рис. 3. Иллюстрация к теореме 2.

4.2. Идея подхода

Рассмотрим алгоритм решения задачи $1|r_j|L_{\max}$ при помощи интерполяционного подхода. Для определенности будем использовать преобразование $r'_j = \alpha r_j$, а также интерполяцию Лагранжа [11].

Интерполяционный полином Лагранжа задается следующей формулой:

$$(14) \quad L_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{j \neq k} (x - x_j)} f(x_k),$$

где x_k , $k = 1, \dots, m$ — узлы интерполяции, значения целевой функции в которых соответственно равны $f(x_k)$, причем $x \neq x_j$.

Кроме того, в [11] показано, как оценить погрешность интерполяции функции по m узлам с учетом, что $x \neq x_1 \neq \dots \neq x_m$:

$$(15) \quad \begin{aligned} R_m(x) &= f(x) - L_m(x) = \\ &= \left(\prod_{i=1, \dots, m} (x - x_i) \right) \left(\frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_m)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{f(x_m)}{(x_m - x)(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{m-1})} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, качественный вид алгоритма интерполяционного подхода будет следующим:

Алгоритм 2 (интерполяционный подход).

- 1) Определить множество m численных значений α_i ;
- 2) для каждого α_i получить i -й производный пример A_i путем преобразования $r'_j = \alpha r_j$ (см. определение 2) исходного примера с коэффициентом $\alpha = \alpha_i$;
- 3) для каждого i -го производного примера A_i решить соответствующую задачу и вычислить значение целевой функции;
- 4) зная значения целевых функций производных примеров, оценить значение целевой функции исходного примера, используя (14);
- 5) оценить погрешность аппроксимации целевой функции по формуле (15), т.е. задать в этой формуле $x_i = \alpha_i$ и $x = 1$.

Для наглядного объяснения принципа работы алгоритма приведен график на рис. 4. По оси x отложены значения α_i , по оси y — значения целевой функции. Темные точки — производные примеры — используются как узлы интерполяции, по ним и строится интерполяционная кривая. Затем для $\alpha = 1$, т.е. в точке, соответствующей исходному примеру, вычисляется значение интерполирующего полинома $L_m(x)$, которое и является аппроксимацией значения целевой функции исходного примера.

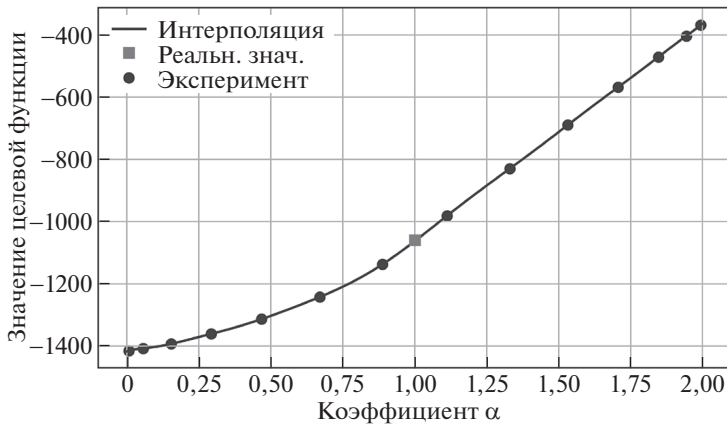


Рис. 4. Иллюстрация к алгоритму 2.

4.3. Модификации алгоритма

Акцентируем внимание на том, что преобразование $r'_j = \alpha r_j$, т.е. домножение всех параметров r исходного примера на некоторый коэффициент α , является лишь одним из возможных преобразований и приводится здесь в качестве примера.

Полученные в результате какого-либо из преобразований точки можно решить некоторым полиномиальным в среднем алгоритмом (например, двойственным [7]), который долго работает над решением исходного примера, но, как показали эксперименты, решит производные примеры за полиномиальное в среднем время.

Стоит также подчеркнуть, что представленный алгоритм отличается гибкостью: можно использовать любые алгоритмы решения производных примеров, а также различные методы интерполяции.

Например, по принципу оптимального выбора узлов интерполирования [11] рекомендуется выбирать эти узлы с помощью многочленов Чебышева.

При большом количестве узлов интерполирования рекомендуется использовать кусочно-полиномиальную интерполяцию ввиду неравномерной сходимости интерполяционных полиномов Лагранжа [11].

В численных экспериментах, параметры которых будут указаны в табл. 1, а результаты — в табл. 2, 3, для решения примеров использовался двойственный алгоритм [7], а для интерполяции значений целевой функции — методы Лагранжа и Чебышева.

4.4. Оценка сложности алгоритма

Время выполнения алгоритма будет наиболее низким при следующей модификации: необходимо задать некоторый лимит времени вычислений τ и при итерации через множество значений α_i , как только время вычисления примера A_i превышает τ , сразу переходить к примеру A_{i+1} . Благодаря такой модификации, время работы алгоритма гарантированно не будет превышать значения $m\tau$, где m — количество всех производных примеров.

Таким образом, при использовании алгоритма решения задач с помощью интерполяционного подхода возможно заранее оценить максимальное время работы алгоритма.

5. Метод метрической интерполяции

Метрическая интерполяция — комбинированный метод, совмещающий в себе оба предыдущих. Введем его для общего случая, не опираясь на конкретные задачи и алгоритмы их решения.

Алгоритм 3 (метод метрической интерполяции).

1) На вход подается исходный пример A , принадлежащий классу примеров некоторой задачи теории расписаний;

2) при наличии полиномиально разрешимого класса примеров рассматриваемой задачи с помощью алгоритма 1 находится некоторый пример B с минимальным расстоянием до исходного примера A по метрике $\rho(A, B)$;

3) по теореме 1 оценивается погрешность метрического подхода;

4) с помощью некоторого заранее выбранного преобразования заполняется множество производных примеров A_i ;

5) проводится интерполяция значений целевой функции для производных примеров согласно алгоритму 2;

6) для производного решенного примера A_i с наиболее близким к исходному примеру A значением целевой функции составляется оптимальное расписание π^{A_i} ;

7) по теореме 1 оценивается расстояние по метрике $\rho(A, A_i)$ между примерами, а значит, и погрешность аппроксимации;

8) получив окрестность, содержащую точное решение, используем найденную точку этой окрестности в качестве начального значения для других точных алгоритмов.

Схема алгоритма 3 приведена на рис. 5.

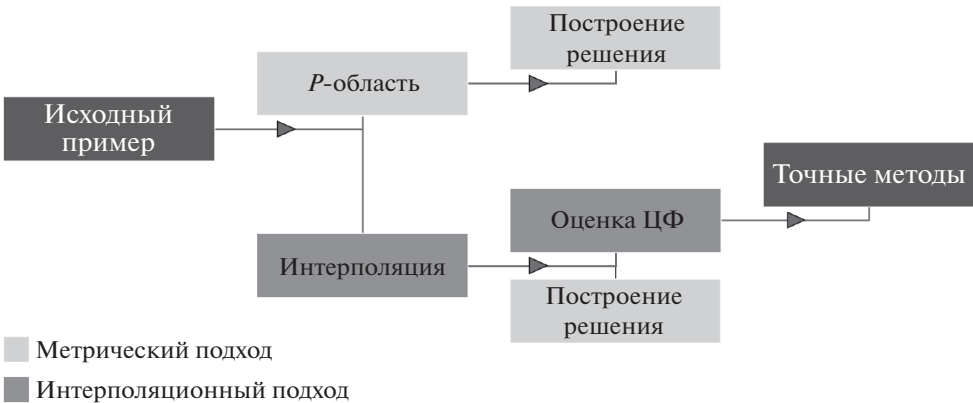


Рис. 5. Схема алгоритма 3.

6. Пример решения задачи

1) Дан пример $A = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$.

2) Воспользуемся для определенности классом L полиномиально разрешимых примеров Лазарева [1, 2, 9]. Решив задачу (13), найдем пример $B \in L$, принадлежащий классу L , с минимальной метрикой $\rho(A, B)$.

3) Решим пример B двойственным алгоритмом [7]. Из теоремы 1 следует оценка погрешности этого решения: она не превосходит $\rho(A, B)$.

4) Рассмотрим два производных примера: $A_0 = \begin{pmatrix} 0 \cdot r_1 & 0 \cdot r_2 & 0 \cdot r_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$, $A_\xi = \begin{pmatrix} \xi \cdot r_1 & \xi \cdot r_2 & \xi \cdot r_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$, $\xi \gg \max(r_1 + p_1, r_2 + p_2, r_3 + p_3)$. Пример A_0 — поли-

номиально разрешимый случай Джексона [10], решаемый очевидным перебором: подставляя на первое место расписания любую из работ, все остальные работы упорядочиваем в порядке возрастания директивных сроков. Пример A_ξ — случай, в котором момент поступления следующей работы превосходит продолжительность предыдущей. Оптимальное расписание составляется сортировкой требований по возрастанию времен поступления r_j .

5) Вычислим оптимальные значения целевой функции $L_{\max}(\pi_0^*)$ и $L_{\max}(\pi_\xi^*)$ для примеров A_0 и A_ξ соответственно. Используя (14) и (15), получим оценку целевой функции исходного примера $L_{\max}(\pi^*)$ и погрешность этой оценки.

7. Результаты экспериментов

7.1. Метрический подход

В численных экспериментах с метрическим подходом подсчитывались три параметра:

- 1) μ — процент примеров, для которых алгоритм нашел оптимальное решение;
- 2) β_{av} — средняя относительная погрешность значения целевой функции;
- 3) $\beta_{\max}$ — максимальная относительная погрешность значения целевой функции.

Погрешность определяется относительно оптимального значения целевой функции тестового примера. Перечисленные параметры рассчитываются по следующим формулам:

$$(16) \quad \beta_{av} = \sum_{i=1}^{\bar{K}} \frac{L_{\max}(\pi_i) - L_{\max}(\pi^*)}{L_{\max}(\pi^*)} \cdot 100\%;$$

$$(17) \quad \beta_{\max} = \max_{i=1, \dots, K} \left\{ \frac{L_{\max}(\pi_i) - L_{\max}(\pi^*)}{L_{\max}(\pi^*)} \cdot 100\% \right\};$$

$$(18) \quad \mu = \frac{K^* \cdot 100\%}{K}.$$

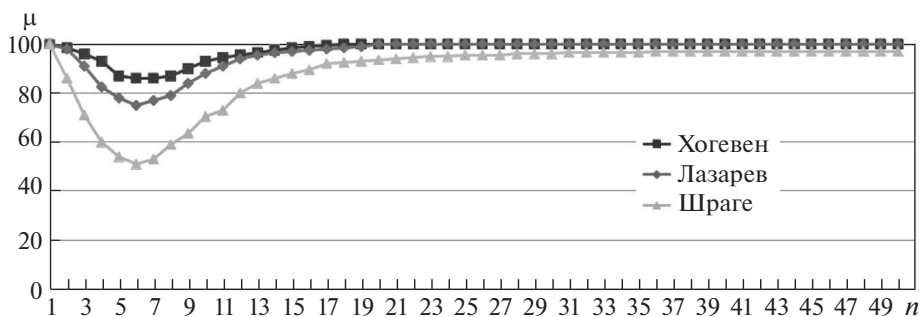


Рис. 6. График зависимости значения μ от количества требований в примере.

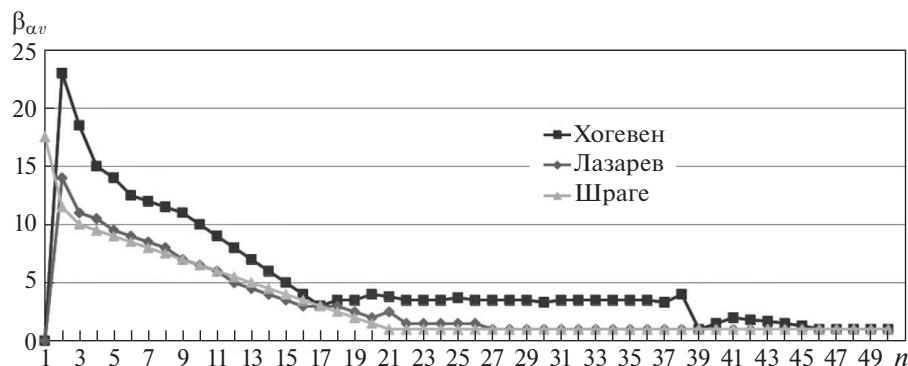


Рис. 7. График зависимости значения β_{av} от количества требований в примере.

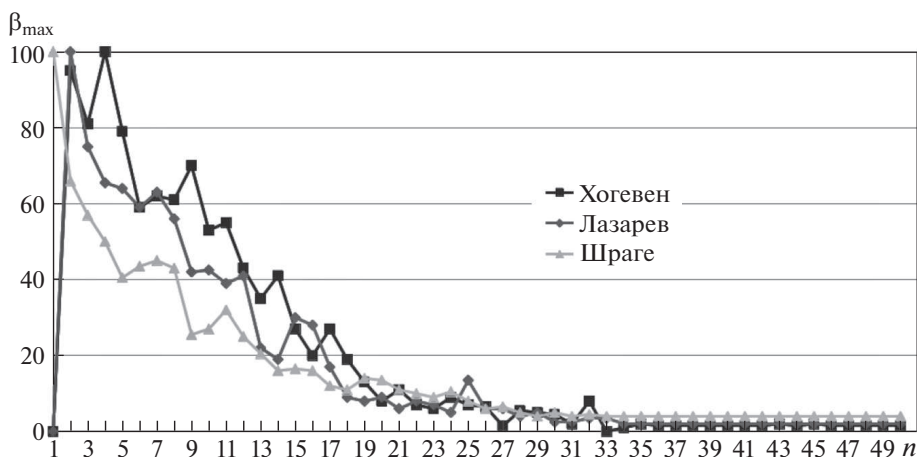


Рис. 8. График зависимости значения β_{max} от количества требований в примере.

Здесь K – количество сгенерированных примеров, $\bar{K}$ – количество примеров, для которых решение, полученное алгоритмом, не было оптимальным ($\bar{K} = K - K^*$), π_i и π_i^* – найденное алгоритмом расписание и оптимальное расписание для i -го сгенерированного примера, решенного неоптимально, а K^* – количество тестовых примеров, оптимально решаемых алгоритмом.

Результаты экспериментов приведены на графиках рис. 6–8.

Три класса примеров (Хогевена, Лазарева и Шраге), указанные на графиках, – это разновидности областей полиномиально разрешимых примеров, на которые проецировался исходный пример в ходе проведения эксперимента. Выбор множества полиномиально разрешимых примеров рассмотрен подробнее в [9].

Подробнее о метрическом подходе, полиномиально разрешимых классах примеров, методике проведения экспериментов и их результатах см. [2].

7.2. Интерполяционный подход

На численных экспериментах с интерполяционным подходом стоит остановиться подробнее, поскольку их результаты представляются впервые. В табл. 1 приведена основная информация о методике проведения этих экспериментов.

Сто простых примеров, каждый — из 10 требований, были сгенерированы. Критерий простоты — время решения каждого такого примера двойственным алгоритмом [7] не должно превышать 1 секунду. Это множество примеров использовалось во всех последующих экспериментах, чтобы иметь возможность сравнивать результаты. Простота этих примеров — способ ускорить вычисления.

На приведенных графиках рис. 9, 10 представлены экспериментальные результаты для одного из этих примеров с использованием двух методов интерполяции: Лагранжа и Чебышева [11, 15]. Коэффициент α изменялся в диапазоне $\alpha \in [0; 2]$ с шагом 0,1. Таким образом, для интерполяции использовалось 20 точек, а затем 21-я, соответствующая исходному примеру, также отображалась на графике для сравнения аппроксимации с действительностью.

Обозначения следующие: значение целевой функции исходного примера показано серым квадратом, узлы и кривая интерполяции отображены темно-серым. Визуально оценить точность метода можно, сравнивая положение серого квадрата (реальное значение целевой функции) относительно темно-серой кривой (аппроксимированное значение).

Таблица 1. Основная информация о методике проведения экспериментов с интерполяционным подходом

Операционная система	Windows 10
ЦП	Intel core i3
Оперативная память	4 Гб
Язык программирования	Python 3.6 [12]
Среда программирования	Jupyter Notebook [12]
Основная библиотека для вычислений	numpy [13]
Библиотека для построения графиков	matplotlib/pyplot [14]
Способ генерации r_j	$r_i = r_{i-1} + X_i$; $X_i \sim \exp(\lambda)$; $\lambda = 0,01$
Способ генерации p_j	$p_j \sim N(\mu, \sigma)$; $\mu = 100$, $\sigma = 40$
Способ генерации d_j	$d_j = r_j + E[p_j]$

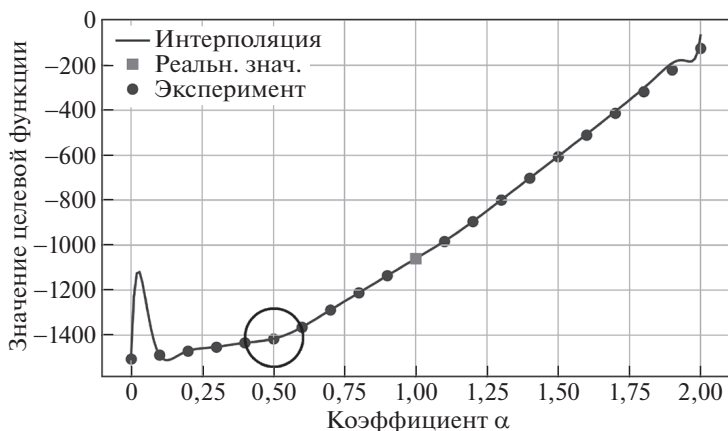


Рис. 9. Результаты эксперимента для преобразования $r'_j = \alpha r_j$ с использованием интерполяции Лагранжа.

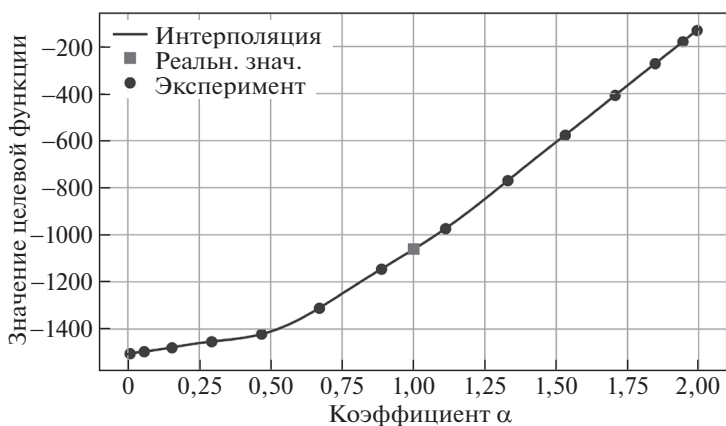


Рис. 10. Результаты эксперимента для преобразования $r'_j = \alpha r_j$ с использованием интерполяции Чебышева.

На графике рис. 9 рассмотрим точку перегиба, соответствующую значению $\alpha = 0,5$ – она помещена в круг. Тем не менее оптимальные расписания в точках $\alpha = 0,4, 0,5, 0,6$ одинаковы. Таким образом, наличие точки перегиба не означает изменение оптимального порядка расстановки требований.

При использовании в рассматриваемой задаче метода Лагранжа характерны всплески по краям отрезка интерполяции. Возможная причина этого – большое количество узлов интерполяции [11], однако это явление требует дальнейшего исследования.

При использовании интерполяции Чебышева такие всплески не характерны (см. график рис. 10). Несмотря на это, у метода Чебышева есть свой недостаток – невозможно выбирать узлы интерполяции произвольным образом. Узлы интерполяции строго выбираются при помощи многочленов Чебышева [15].

Таблица 2. Таблица результатов экспериментов для интерполяции Лагранжа

Величина	Значение	Формула
Максимальный модуль ошибки, %	287,66	$\max_{i \in N} \left \frac{L_{\max}(i) - L_{\max}^T(i)}{L_{\max}^T(i)} \right \cdot 100\%$
Минимальный модуль ошибки, %	0,00	$\min_{i \in N} \left \frac{L_{\max}(i) - L_{\max}^T(i)}{L_{\max}^T(i)} \right \cdot 100\%$
Средний модуль ошибки, %	5,48	$\frac{1}{n} \sum_{i \in N} \left \frac{L_{\max}(i) - L_{\max}^T(i)}{L_{\max}^T(i)} \right \cdot 100\%$
Среднее значение ошибки, %	3,73	$\frac{1}{n} \left \sum_{i \in N} \left(\frac{L_{\max}(i) - L_{\max}^T(i)}{L_{\max}^T(i)} \right) \right \cdot 100\%$

Таблица 3. Таблица результатов экспериментов для интерполяции Чебышева

Величина	Значение	Формула
Максимальный модуль ошибки, %	137,32	$\max_{i \in N} \left \frac{L_{\max}(i) - L_{\max}^T(i)}{L_{\max}^T(i)} \right \cdot 100\%$
Минимальный модуль ошибки, %	0,00	$\min_{i \in N} \left \frac{L_{\max}(i) - L_{\max}^T(i)}{L_{\max}^T(i)} \right \cdot 100\%$
Средний модуль ошибки, %	1,93	$\frac{1}{n} \sum_{i \in N} \left \frac{L_{\max}(i) - L_{\max}^T(i)}{L_{\max}^T(i)} \right \cdot 100\%$
Среднее значение ошибки, %	0,28	$\frac{1}{n} \left \sum_{i \in N} \left(\frac{L_{\max}(i) - L_{\max}^T(i)}{L_{\max}^T(i)} \right) \right \cdot 100\%$

В табл. 2 и 3 представлены результаты численных экспериментов со всеми сгенерированными примерами при использовании преобразования $r'_j = \alpha r_j$ и обоих методов интерполяции.

Обозначения следующие: $L_{\max}^T(i)$ – реальное значение целевой функции i -го примера, $L_{\max}(i)$ – аппроксимированное значение целевой функции i -го примера; N – множество n различных примеров.

8. Заключение

В статье рассмотрен метрический подход [2] к решению задач теории расписаний. Кроме того, представлен новый — интерполяционный — метод, приведены результаты численных экспериментов. Также представлена идея комбинированного подхода — метрической интерполяции — как способа объединения двух предыдущих методов.

Перечисленные подходы отличаются универсальностью и гибкостью, а экспериментальные результаты подтверждают также и их высокую точность, позволяющую использовать рассмотренные подходы для решения широкого круга задач теории расписаний.

Доказательство теоремы 2. Задача ставится следующим образом: пусть выбраны три произвольных неотрицательных числа α^A , α^B , α^C и задан пример $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}$. Доказать, что в рассмотренном выше $3n$ -мерном пространстве примеры

$$\begin{pmatrix} \alpha^A r_1 & \alpha^A r_2 & \dots & \alpha^A r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix} (A),$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^B r_1 & \alpha^B r_2 & \dots & \alpha^B r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix} (B),$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^C r_1 & \alpha^C r_2 & \dots & \alpha^C r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix} (C)$$

лежат на одной прямой. В силу произвольности выбора значений $\alpha^A \dots \alpha^C$ это утверждение будет означать, что исходный пример лежит на той же прямой, что и примеры (A)–(C).

Таким образом, решение задачи докажет, что любые точки, полученные в результате преобразования $r'_j = \alpha r_j$ исходного примера, лежат на одной прямой в $3n$ -мерном пространстве, причем эта прямая содержит и исходный пример.

Рассмотрим некоторое $3n$ -мерное пространство и три точки на нем: $A(x_1^A \dots x_{3n}^A)$, $B(x_1^B \dots x_{3n}^B)$, $C(x_1^C \dots x_{3n}^C)$. Каноническое уравнение прямой (AB) имеет вид [16]:

$$(П.1) \quad \frac{x_1 - x_1^A}{x_1^B - x_1^A} = \frac{x_2 - x_2^A}{x_2^B - x_2^A} = \dots = \frac{x_{3n} - x_{3n}^A}{x_{3n}^B - x_{3n}^A}.$$

Тогда критерий того, что точка C лежит на прямой (AB):

$$(П.2) \quad \frac{x_1^C - x_1^A}{x_1^B - x_1^A} = \frac{x_2^C - x_2^A}{x_2^B - x_2^A} = \dots = \frac{x_{3n}^C - x_{3n}^A}{x_{3n}^B - x_{3n}^A}.$$

В рассматриваемой задаче анализируется расположение трех точек:

$$\begin{pmatrix} \alpha^A r_1 & \alpha^A r_2 & \dots & \alpha^A r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix} (A),$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^B r_1 & \alpha^B r_2 & \dots & \alpha^B r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix} (B),$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^C r_1 & \alpha^C r_2 & \dots & \alpha^C r_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix} (C).$$

Заметим, что координаты $p_1, p_2, \dots, p_n, d_1, d_2, \dots, d_n$ у всех трех точек одинаковы. Тогда критерий (П.2) в приложении к рассматриваемой задаче примет вид

$$(П.3) \quad \frac{\alpha^C r_1 - \alpha^A r_1}{\alpha^B r_1 - \alpha^A r_1} = \frac{\alpha^C r_2 - \alpha^A r_2}{\alpha^B r_2 - \alpha^A r_2} = \dots = \frac{\alpha^C r_n - \alpha^A r_n}{\alpha^B r_n - \alpha^A r_n}.$$

Преобразуем его:

$$(П.4) \quad \frac{r_1(\alpha^C - \alpha^A)}{r_1(\alpha^B - \alpha^A)} = \frac{r_2(\alpha^C - \alpha^A)}{r_2(\alpha^B - \alpha^A)} = \dots = \frac{r_n(\alpha^C - \alpha^A)}{r_n(\alpha^B - \alpha^A)}.$$

И после сокращения получим тождество

$$(П.5) \quad \frac{\alpha^C - \alpha^A}{\alpha^B - \alpha^A} = \frac{\alpha^C - \alpha^A}{\alpha^B - \alpha^A}.$$

Таким образом, критерий (П.2) выполняется при любых $\alpha^A, \alpha^B, \alpha^C$. То есть любые три точки, полученные в результате преобразования $r'_j = \alpha r_j$ исходного примера, лежат на одной прямой в $3n$ -мерном пространстве.

Преобразования $p'_j = \beta p_j$ и $d'_j = \gamma d_j$ вводятся и доказываются аналогично. Так же как и в случае с $r'_j = \alpha r_j$, полученные в результате этих преобразований примеры лежат на одной прямой в $3n$ -мерном пространстве, содержащей и исходный пример.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лазарев А.А. Теория расписаний. Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019.
2. Lazarev A.A., Lemtyuzhnikova D.V., Werner F. A metric approach for scheduling problems with minimizing the maximum penalty // Appl. Math. Modell. 2021. No. 89. P. 1163–1176.
3. Tanaev V.S., Gordon V.S., Shfransky Y.M. Scheduling theory: single-stage systems Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994.
4. Brucker P. Scheduling algorithms. Berlin: Springer, 1995.
5. Sotskov Y.N., Werner F. (Editors). Sequencing and Scheduling with Inaccurate Data. New York, USA: Nova Science Publishers, Inc., 2014.
6. Tanaev V.S., Sotskov Y.N., Strusevich V.A. Scheduling theory: multi-stage systems. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1994.
7. Lazarev A.A., Pravdivets N., Werner F. On the Dual and Inverse Problems of Scheduling Jobs to Minimize the Maximum Penalty // Mathematics. 2020. V. 8. No. 7. P. 1131.

8. *Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G., Brucker P.* Complexity of machine scheduling problems // *Annals of discrete mathematics*. Elsevier, 1977. V. 1. P. 343–362.
9. *Lazarev A.A., Lemtyuzhnikova D.V., Pravdivets N.A., Werner F.* Polynomially Solvable Subcases for the Approximate Solution of Multi-machine Scheduling Problems // *Communications in Computer and Information Science (Advances in Optimization and Applications, 11th International Conference, OPTIMA 2020)*. 2021. No. 1340. P. 211–223.
10. *Jackson J.R.* Scheduling a production line to minimize maximum tardiness. Los Angeles, CA: University of California, 1955.
11. *Самарский А.А., Гумин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.
12. *Kluyver T., Ragan-Kelley B., Perez F., et.all.* Jupyter Notebooks — a publishing format for reproducible computational workflows. Netherlands: InELPUB, 2016. P. 87–90.
13. *Harris C.R., Millman K.J., van der Walt S.J., et al.* Array programming with NumPy // *Nature*. 2020. V. 585. No. 7825. P. 357–362.
14. *Hunter J.D.* Matplotlib: A 2D Graphics Environment // *Computing in Science & Engineering*. 2007. V. 9. No. 3. P. 90–95.
15. *Rivlin T.J.* Chebyshev polynomials. Courier Dover Publications, 2020.
16. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Рипол Классик, 2013.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 20.01.2021

После доработки 25.05.2021

Принята к публикации 30.06.2021